

## Το Βέλτιστο Φράγμα στο Ερώτημα B3 των Πανελληνίων του 2013 είναι το 3

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης  
Ηράκλειο Κρήτης  
[asygelakis@gmail.com](mailto:asygelakis@gmail.com)

*Αφιερώνεται στη μνήμη  
του Λεωνίδα Θαρραλίδη*

### Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η βελτίωση του φράγματος στο ερώτημα B3 των Πανελληνίων του 2013. Η ενασχόληση με το θέμα προέκυψε μετά από σχετικό ερώτημα του Γιώργου Μπαλόγλου στο Μαθηματικό forum mathematica.gr ([1]) τρεις περίπου μήνες μετά τις Πανελλήνιες εξετάσεις του 2013. Η απάντηση δόθηκε το Μάρτιο του 2014 λίγες ημέρες πριν την έναρξη της 6<sup>ης</sup> Μαθηματικής Εβδομάδας και ήταν θετική. Το βέλτιστο φράγμα στο ερώτημα B3 των Πανελληνίων του 2013 είναι πράγματι το 3.

Στη βιβλιογραφία υπάρχει πλήθος τύπων που δίνουν φράγματα των μιγαδικών ριζών ενός πολυωνύμου  $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ . Συνήθως αυτοί δίνουν τον κυκλικό δίσκο μέσα στον οποίο βρίσκονται οι ρίζες του πολυωνύμου, δίνοντας εκτίμηση για το μέτρο τους. Μερικοί από αυτούς είναι οι εξής (με  $\rho$  συμβολίζουμε την τυχαία μιγαδική ρίζα του παραπάνω πολυωνύμου και με  $|\rho|$  το μέτρο της):

Φράγμα του Cauchy

$$|\rho| \leq 1 + \max \left\{ \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right|, \left| \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \right|, \dots, \left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right| \right\}$$

Φράγμα του Fujiwara

$$|\rho| \leq 2 \max \left\{ \left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right|, \left| \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \right|^{\frac{1}{2}}, \dots, \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right|^{\frac{1}{n}} \right\}$$

το οποίο βελτιώνει το φράγμα του Kojima

$$|\rho| \leq 2 \max \left\{ \left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right|, \left| \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} \right|, \dots, \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right| \right\}$$

Τέλος, ελάχιστα καλύτερο είναι το φράγμα του Alan M. Cohen [4]

$$|\rho| \leq \max \left\{ 1 + \left| \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right|, \left| \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} \right|, \dots, \left| \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right| \right\}$$

το οποίο δημοσιεύθηκε το 2009.

### **Το ερώτημα B3 των Πανελληνίων [2]**

*Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  που ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το  $K(2,0)$  και ακτίνα  $\rho=1$ . Αν ο μιγαδικός αριθμός  $v$  ικανοποιεί τη σχέση  $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$  τότε να αποδείξετε ότι  $|v| < 4$ .*

Παρατηρούμε ότι το φράγμα 4, προκύπτει από το φράγμα του Cauchy αλλά και από το φράγμα του Cohen σε αντίθεση με τα φράγματα Fujiwara και Kojima που δίνουν το ασθενέστερο 6. Η απόδειξη του παραπάνω ερωτήματος που δόθηκε από την Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων είναι όμοια με την απόδειξη που ακολουθείται για την απόδειξη του φράγματος του Cauchy προσαρμοσμένη για  $n=3$ . Υπάρχει επίσης πληθώρα τρόπων επίλυσης του συγκεκριμένου ερωτήματος (για 9 λύσεις δείτε π.χ. στο [3]).

Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: Υπάρχει περιθώριο να βελτιωθεί το φράγμα από 4 σε κάτι μικρότερο του 4 και ίσως βέλτιστο; Η απάντηση σε αυτό είναι θετική και δίνεται στη συνέχεια.

### **Ισχυρισμός**

Οι λύσεις της εξίσωσης  $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$  βρίσκονται εντός του κυκλικού δίσκου με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho=3$  δηλαδή το αποδεικτέο που ήταν  $|v| < 4$  μπορεί πλέον να γίνει  $|v| \leq 3$ .

### **Απόδειξη:**

Η εξίσωση γίνεται:

$$(\alpha_2 - 2)v^2 + (\alpha_1 - 2)v + (\alpha_0 - 2) = -v^3 - 2v^2 - 2v - 2$$

η οποία με χρήση της τριγωνικής ανισότητας και του γεγονότος ότι  $|\alpha_i - 2| = 1$ , για  $i = 0, 1, 2$  δίνει:

$$|v^3 + 2v^2 + 2v + 2| \leq |v|^2 + |v| + 1$$

που ισοδύναμα γίνεται

$$|(v+1)(v^2 + v + 1) + 1| \leq |v|^2 + |v| + 1 \quad (1)$$

Όμως από την τριγωνική ανισότητα ισχύει

$$|(v+1)(v^2 + v + 1) + 1| \geq |(v+1)(v^2 + v + 1)| - 1 \quad (2)$$

άρα αρκεί να δείξω ότι εάν ισχύει η

$$|(v+1)(v^2 + v + 1)| - 1 \leq |v|^2 + |v| + 1$$

δηλαδή η

$$|(v+1)(v^2 + v + 1)| \leq |v|^2 + |v| + 2 \quad (3)$$

τότε ισχύει η  $|v| \leq 3$ .

Πράγματι, εάν ισχύει η (1) τότε λόγω της (2) θα ισχύει και η (3) άρα αν δείξουμε τη συνεπαγωγή

$$|(v+1)(v^2 + v + 1)| \leq |v|^2 + |v| + 2 \Rightarrow |v| \leq 3$$

θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη.

Για το λόγο αυτό θα δείξουμε ισοδύναμα ότι εάν  $|v| > 3$ , τότε ισχύει

$$|(v+1)(v^2 + v + 1)| > |v|^2 + |v| + 2 \quad (4)$$

Έστω ότι  $|v| - 3 = k > 0$ . Τότε  $|v| = k + 3$  άρα

$$-(k+3) \leq \operatorname{Re}(v) \leq k+3 \Rightarrow -2(k+3) \leq v + \bar{v} \leq 2(k+3)$$

όπου με  $\operatorname{Re}(v)$  συμβολίζουμε το πραγματικό μέρος του μιγαδικού  $v$ .

Θέτουμε  $x = v + \bar{v}$  και θα εκφράσουμε τις ποσότητες που εμφανίζονται στη σχέση (4) με τη βοήθεια των  $x$  και  $k$ .

$$|v+1|^2 = (v+1)(\bar{v}+1) = |v|^2 + (v + \bar{v}) + 1 = (k+3)^2 + x + 1$$

και επίσης

$$\begin{aligned} |v^2 + v + 1|^2 &= (v^2 + v + 1)(\bar{v}^2 + \bar{v} + 1) \\ &= |v|^4 + v^2\bar{v} + v^2 + v\bar{v}^2 + v\bar{v} + v + \bar{v}^2 + \bar{v} + 1 \\ &= |v|^4 + |v|^2(v + \bar{v}) + (v + \bar{v})^2 - 2v\bar{v} + |v|^2 + (v + \bar{v}) + 1 \\ &= |v|^4 + |v|^2(v + \bar{v}) + (v + \bar{v})^2 - |v|^2 + (v + \bar{v}) + 1 \\ &= (k+3)^4 + (k+3)^2x + x^2 - (k+3)^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Άρα θα δείξω ισοδύναμα ότι όταν  $k > 0$  τότε

$$|v+1|^2 |v^2 + v + 1|^2 > (|v|^2 + |v| + 2)^2$$

δηλαδή ισοδύναμα ότι

$$[(k+3)^2 + x + 1][(k+3)^4 + (k+3)^2x + x^2 - (k+3)^2 + x + 1] > [(k+3)^2 + (k+3) + 2]^2$$

δηλαδή ισοδύναμα ότι

$$\begin{aligned} x^3 + (2k^2 + 12k + 20)x^2 + (2k^4 + 24k^3 + 109k^2 + 222k + 173)x \\ + k^6 + 18k^5 + 134k^4 + 526k^3 + 1138k^2 + 1262k + 534 > 0 \end{aligned}$$

της οποίας το πρώτο μέλος ας ονομάσουμε ως συνάρτηση  $f(x)$ . Η  $f(x)$  ως πολυωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(-2(k+3), 2(k+3))$  στο οποίο ορίζεται, με

$$f'(x) = 3x^2 + (4k^2 + 24k + 40)x + 2k^4 + 24k^3 + 109k^2 + 222k + 173.$$

Η διακρίνουσα  $\Delta$  της  $f'(x)$  είναι ίση με

$$\Delta = -4(2k^2 + 12k + 17)(k^2 + 6k + 7) < 0$$

διότι  $k > 0$ . Συνεπώς ισχύει  $f'(x) > 0$  δηλαδή η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-2(k+3), 2(k+3))$ .

Όμως για  $x > -2(k+3)$  ισχύει  $f(x) > f(-2(k+3))$  που τελικά δίνει

$$f(x) > k^6 + 14k^5 + 82k^4 + 252k^3 + 408k^2 + 280k > 0$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

**Σχόλιο:** Το φράγμα αυτό δε μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω καθώς για παράδειγμα η εξίσωση  $v^3 + 3v^2 + v + 3 = 0$  με συντελεστές που βρίσκονται επί του αρχικού κύκλου, έχει ρίζα την  $v = -3$  που έχει μέτρο ίσο με 3. Συνεπώς:

**Το Βέλτιστο Φράγμα στο Ερώτημα Β3 των Πανελληνίων του 2013 είναι το 3.**

### **Βιβλιογραφία - Παραπομπές**

- [1]. <http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=184806#p184806>
- [2]. <http://www.minedu.gov.gr/anazitisi-thematon-panelliniwn-eksetaseon.html>
- [3]. <http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=172794#p172794>
- [4]. Cohen, Alan M., *Bounds for the roots of polynomial equations*, *Mathematical Gazette* 93, March 2009, 87–88.