«ΝΑ ΦΥΓΕΙ Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» — «ΔΕΝ ΘΑ ΓΙΝΟΥΜΕ ΕΘΝΙΚΟΙ ΜΕΙΟΔΟΤΕΣ»
Μια ιστορικο-διδακτική εξέταση της αντίφασης στη σχολική μας γεωμετρία

Ν. Καστάνη

Ο τίτλος αυτής της ομιλίας[1] μοιάζει με γρίφο. Γι αυτό το πρώτο που πρέπει να κάνουμε είναι να δώσουμε τις απαραίτητες διευκρινίσεις, όπου ταυτόχρονα θα φανούν και τα κίνητρα μας.

«ΝΑ ΦΥΓΕΙ Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» ήταν ένα σύνθημα κι ένας «καταλύτης» της σχολικής γεωμετρίας, διεθνώς, που πρόσφατα εμφανίστηκε με την έκρηξη του μεταρρυθμιστικού κύματος των «μοντέρνων» μαθηματικών. Αν και έχει ιστορία ενός αιώνα[2] στην εποχή μας το ξαναδιατύπωσε[3] με έμφαση ο Jean Dieudonné ηγετικό στέλεχος των Bourbaki και μια αναμφισβήτητη «αυθεντία» της σύγχρονης μαθηματική κοινότητας.

«ΔΕΝ ΘΑ ΓΙΝΟΥΜΕ ΕΘΝΙΚΟΙ ΜΕΙΟΔΟΤΕΣ» ήταν η απάντηση[4] του κ. Βαρουχάκη, συμβούλου του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, στο ερώτημα:

> γιατί επιμένουμε στην Ευκλείδεια γεωμετρία, όπως φαίνεται από τη σχετική προκήρυξη του Υπουργείου Παιδείας για τη συγγραφή νέου βιβλίου σχολικής γεωμετρίας, και δεν ευθυγραμμιζόμαστε και σ' αυτό το μέρος του προγράμματός μας με τα διεθνή δεδομένα;

Η αντίφαση αυτή σηματοδοτεί μια ειδική στάση της επίσημης εκπαιδευτικής μας πολιτικής στα σχολικά μαθηματικά, η οποία εκφράζει μια αντίσταση στη μεταρρυθμιστική «πίεση» των μοντέρνων μαθηματικών.

Από τη πλευρά της διδακτικής το ερώτημα είναι, αν αυτή η κατάσταση προκαλεί «διαταραχή» στο περιεχόμενο των σχολικών μαθηματικών με συνέπεια την παρουσία εμποδίων στην κατανόηση και στη μεθόδευση της διδασκαλίας τους.

Οποιαδήποτε απόπειρα να απαντηθεί αυτό το ερώτημα προϋποθέτει την επίγνωση των παραγόντων που το δημιούργησαν. Γίνεται έτσι αναγκαία η αναδρομή στο παρελθόν για να αποκαλυφθεί το «υπόστρωμα» αυτής της αντίφασης και έτσι θα αναγλυφοποιήσει τη φύση του προβλήματος και στη συνέχεια θα βοηθήσει στην εκτίμηση του και στη διδακτική του εξέταση.

΄Οταν κανείς ξεφυλλίσει[5] τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη θα διαπιστώσει, χωρίς δυσκολία, ότι οι γεωμετρικές κατασκευές πρωταγωνιστούν σ' όλο το περιεχόμενό τους. Το γεγονός αυτό προσδίδει ιδιαίτερη βαρύτητα στη φύση της γεωμετρικής δραστηριότητας, που είναι ενσωματωμένη στη γεωμετρία του Ευκλείδη, γιατί εδραιώνει, σε μεγάλο βαθμό, την ύπαρξη των γεωμετρικών αντικειμένων και επηρεάζει τον τρόπο χειρισμού τους. Η διαπίστωση αυτή, αν και κυριαρχεί, φωτίζει μια μόνο πλευρά του θέματος, αυτή της εμπειρικής πρακτικής.

Από την άλλη μεριά δεν είναι λίγοι εκείνοι που επισήμαναν τον αντι-εμπειρικό χαρακτήρα των Ελληνικών μαθηματικών[6] κι αυτό δείχνει ότι η παρουσία της θεωρητικής διάστασης των «Στοιχείων» είναι μια πραγματικότητα που δεν μπορεί να την αγνοήσει κανείς. ΄Ετσι βλέπουμε την συνύπαρξη των δυο μορφών δραστηριότητας, της εμπειρικής και της λογικοθεωρητικής.

Το ζήτημα τώρα είναι η αποκάλυψη του τρόπου συνύφανσης τους, μια και θα φωτίσει την ουσία της Ευκλείδειας θεωρίας. Εδώ θα επικαλεστούμε την άποψη ενός σύγχρονου αμερικάνου μελετητή της φιλοσοφίας των μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα, του Ian Mueller, που κατά τη γνώμη μας αποτελεί τη σημαντικότερη συνεισφορά στη μελέτη του θέματος τα τελευταία χρόνια.

Σε μια σχετική μελέτη του[7] διαπιστώνει ότι η επιχειρηματολογία του Ευκλείδη μπορεί να χαρακτηρισθεί ως «διανοητικό πείραμα», δηλ. ως πείραμα που τα «υλικά» του είναι εξιδανικευμένα φυσικά αντικείμενα τα οποία μπορούν να αναπαρασταθούν σε σχήματα και που σχεδιάζεται να δείξει ότι κάποιος χειρισμός μπορεί να γίνει είτε κάποιο (γεωμετρικό) αντικείμενο έχει κάποια ιδιότητα. Με την επισήμανση αυτή γίνεται φανερή η αλληλο-υποστήριξη της κατασκευαστικο-εποπτικής λειτουργίας και της θεωρητικής διαπραγμάτευσης, με αποτέλεσμα η πρώτη να προσδίδει τον εμπειρικό χαρακτήρα της γεωμετρικής πραγματικότητας των «Στοιχείων» και η δέτευρη να τακτοποιεί, να συσχετίζει και να ολοκληρώνει το γεωμετρικό υλικό.

Θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε την τοπική βάση της γνωστικής δραστηριότητας στη γεωμετρία του Ευκλείδη, όπου οι μεμονωμένες γεωμετρικές οντότητες αποτελούν την αφετηρία της και ρυθμίζουν το στυλ διεκπεραιώσης της.

Συνοψίζοντας θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Ευκλείδης είναι «προσγειωμένος στη γήινη πραγματικότητα», την οποία επεκτείνει πέρα από την εμπειρική αμεσότητα με τη βοήθεια

της σύγκρισης, της μεθοδολογικής οργάνωσης και της εννοιολογικής επένδυσης.

Απ' τον 3ο π.Χ. αιώνα και μέχρι τις μέρες μας είναι, λίγο-πολύ, σ' όλους γνωστός ο ιστορικός ρόλος των «Στοιχείων» ως πρότυπο επιστημονικής σκέψης. Η ηθική του Σπινόζα και τα «principia» του Νεύτωνα είναι δύο ενδεικτικά παραδείγματα της επίδρασής τους. Θα ήταν όμως λάθος να θεωρήσουμε το Ευκλείδειο μοντέλο ως καταλύτη της επιστημονικής αναζήτησης κι ως μια απόλυτη κι αναμφισβήτητη αλήθεια. Κι αυτό γίνεται αμέσως φανερό αν αξιολογήσουμε τις προσπάθειες των σχολιαστών του Ευκλείδη όχι μόνο ως απόπειρες ερμηνείας και διασαφήνισης του αλλά κι ως παρεμβάσεις στις αρχές και το περιεχόμενό τους. Ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι αντιρήσεις και οι συζητήσεις για το αξίωμα των παραλλήλων.

Στη πορεία λοιπόν του χρόνου δεν ήταν λίγες οι περιπτώσεις που ο τρόπος σκέψης των «Στοιχείων» προσαρμόστηκε στο διανοητικό κλίμα της εποχής ή αντιπαρατάθηκε στα νέα δεδομένα και στις νεοφανείς επιστημολογικές αντιλήψεις.

Δύο απ' αυτές έπαιξαν αποφασιστικό ρόλο στο μετασχηματισμό της φυσιογνωμίας της Γεωμετρίας του Ευκλείδη. Η πρώτη έχει την καταγωγή της στον σχολαστικισμό, ο οποίος καλούπωσε την αριστοτελική συλλογιστική και την αξιωματική, έτσι ώστε να προσαρμοστούν στις θεολογικές ανάγκες των καθολικών στον θρησκευτικό-ιδεολογικό αγώνα τους ενάντια στους αλλόπιστους και τους «αντικαθολικούς». Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο τυποποιήθηκαν οι κανόνες της συλλογιστικής κι αποκρυσταλώθηκε η μεταφυσική μορφή της αξιωματικής σκέψης[8]. Οι πηγές απ' όπου αντλήθηκαν τα γνωστιολογικά εφόδια ήταν η αριστοτελική φιλοσοφία (ιδιαίτερα το έργο του Αναλυτικά ύστερα) και η αξιωματική του Ευκλείδη. Το προϊόν αυτής της διεργασίας αποτέλεσε ένα στερεότυπο σκέψης, που η εμβέλειά του, όπως ήταν φυσικό, δεν περιορίστηκε στο θεολογικό επίπεδο, αλλά πέρασε διαμέσου του εκπαιδευτικού (ιδεολογικού) μηχανισμού των Ιησουϊτών στα διδασκόμενα μαθήματα κι έτσι στη γεωμετρία. Η παρέμβαση αυτή προκάλεσε αλλοίωση στο επιστημολογικό υπόβαθρο των «Στοιχείων» και μάλιστα στο πιο ευαίσθητο σημείο τους: στον τρόπο ύπαρξης των γεωμετρικών αντικειμένων, που είχε σαν αποτέλεσμα την «ολίσθηση» στην ενορατική θεώρησή τους ή καλύτερα στην «πλατωνική ανάμνηση» τους[9].

Η δεύτερη περίπτωση πρόβαλλε από τελείως διαφορετικά κίνητρα. Οι υπολογισμοί κι οι ανάγκες μετρήσεων, στη μεταμεσαιωνική περίοδο, απέκτησαν μια νέα θέση στην καθημερινή και επιστημονική πρακτική. Το εμπόριο και οι τραπεζικές

υποθέσεις ωθούσαν προς πιο αποδοτικές και αντικειμενικές τεχνικές των αριθμητικών λογαριασμών. Απ' την άλλη μεριά η αστρονομία, η πυροβολική και η ναυσιπλοΐα απαιτούσαν μια ευρεία κλίμακα μετρήσεων γεωμετρικών μεγεθών. Η συνέπεια ήταν να αποκτήσουν μαι προτεραιότητα οι ποσοτικές σχέσεις σ' όλο το φάσμα της επιστημονικής σκέψης και πρακτικής. Έτσι στη διάρκεια της αναγέννησης υπήρξε ένα δημιουργικός οργασμός στη περιοχή της αριθμητικής, που δεν αναβάθμισε και θεμελίωσε μόνο την αρχαία ελληνική λογιστική, αλλά άνοιξε το δρόμο στην αλγεβρική σκέψη και προκάλεσε ένα άνοιγμα της γεωμετρίας προς νέους ορίζοντες. Η τάση αυτή συνδυασμένη με το αντισχολαστικίστικο ρεύμα, που συνόδευε την προτεσταντική Μεταρρύθμιση, αντανακλάται στο έργο του Peter Ramus (1515-1572), ενός απ' τους επιφανέστερους διανοητές της περιόδου, ο οποίος άσκησε μεγάλη επίραση στις επερχόμενες γενιές της Επιστημονικής Επανάστασης (17ος αιώνας). Είναι χαρακτηριστική η αντι-Ευκλείδεια στάση του Ramus στη γεωμετρία. Αυτή εκφράζεται στην αντικατάστασή της γνωσιολογικής αφετηρίας, στην εννοιολογική αναδιάταξη και στη μεθοδολογική διαφοροποίηση. Παρατηρούμε ότι στη γεωμετρία του Ramus η εξέταση του αριθμού προηγείται της γεωμετρικής διαπραγμάτευσης, η διάρθρωση του περιεχομένου της γίνεται σε νέα βάση και η αποδεικτική μεθόδευση στηρίζεται στα παραδείγματα[10].

Όπως έχει επισημανθεί[11] η επίδραση του Ramus έπαιξε σημαντικό ρόλο στη γέννηση της αναλυτικής γεωμετρίας, η οποία, όπως είναι γνωστό, άνοιξε μια νέα εποχή στη γεωμετρική σκέψη.

Συνοψίζοντας, τώρα τη σημασία της τάσης αυτής στην εξέλιξη της γεωμετρίας μπορούμε να επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε δύο χαρακτηριστικά γνωρίσματα:

— στην αλληλεπίδραση του αριθμού με τη γεωμετρική εικόνα και
— στην έκφραση του χώρου[12] στο εννοιολογικό σύστημα της γεωμετρίας.

Με τη δυναμική της επιστημονικής επανάστασης του 17ου αιώνα οι διεργασίες εμπλουτισμού κι ανάπτυξης της γεωμετρίας συνεχίστηκαν μ' αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια πλατύτερη γεωμετρική αντίληψη απ' αυτή που παρείχε ο Ευκλείδης.

Μέσα στην ιστορική κίνηση των επόμενων δεκαετιών, ένας σταθμός για τη σχολική γεωμετρία ήταν τα «Στοιχεία Γεωμετρίας» του Legendre που πρωτοεκδόθηκαν το 1794. Η γεωμετρία αυτή έπαιξε πρωταγωνιστικό ρόλο στα σχολικά μαθημα-

τικά του 19ου αιώνα κι όπως θα δούμε άφησε τα ίχνη της μέχρι τις μέρες μας.

Η αίγλη της γαλλικής επανάστασης και η ανωτερότητα των γαλλικών μαθηματικών την εποχή αυτή περιέβαλαν και προώθησαν το βιβλίο αυτό στο διεθνή χώρο. Τα στοιχεία που το έκαναν να ξεχωρίσει από τα άλλα του ιδίου περιεχομένου και προέλευσης (π.χ. του Lacroix) ήταν[13]:

— η μεγάλη σαφήνεια της παρουσίασής του
— το ελκυστικό του στυλ και
— η πληρέστερη διαπραγμάτευση της στερεομετρίας (σε σύγκριση με τον Ευκλείδη).

Σε πιο μακροσκοπικό πλάνο έχει επισημανθεί ότι η γεωμετρία του Legendre γράφτηκε:

— με την ιδέα να κάνει την αποδεικτική γεωμετρία πιο αυστηρή από την «πρακτική» θεώρηση του θέματος, που εκφράστηκε τους δύο προηγούμενους αιώνες[14] (π.χ. οι γεωμετρίες του Ramus (1571) και του Clairaut (1741) και
— σ' αντίθεση με την αντίστοιχη δουλεία των Ιησουϊτών[15].

Αν κι ο Legendre με το βιβλίο του αυτό θεωρήθηκε ως ο δεύτερος Ευκλείδης θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, παρ' όλες τις ομοιότητές τους (π.χ. η κοινή αφετηρία με αναιτιολόγιτους ορισμούς κι αξιώματα), υπάρχουν σημαντικές διαφορές οι οποίες προσδιορίζουν την επιστημολογική τους απομάκρυνση. Συγκεκριμένα, στη γεωμετρία του Legendre σε σχέση με του Ευκλείδη παρατηρούμε ότι:

1ο γίνεται μι αναδόμιση του περιεχομένου,
2ο η πρόσκληψη των γεωμετρικών εννοιών γίνεται, αποκλειστικά, με ενορατικό τρόπο,
3ο η αποδεικτική διαδικασία στηρίζεται στη λογική συμπερασματολογία,
4ο το περιεχόμενό της υφίσταται μια «απονεύρωση», απ' τις γεωμετρικές κατασκευές, που τώρα περιορίζονται σ' ένα μόνο κεφάλαιο με τη μορφή εφαρμογών, και
5ο επιχειρείται μια λογική αυστηρότητα με την αξιοποίηση της αριθμητικής και της άλγεβρας[16].

Το τελευταίο απ' τα γνωρίσματα, που σημειώσαμε προηγούμενα, σηματοδοτεί και την έναρξη[17] της αριθμητικοποίησης στα μαθηματικά, που σημαίνει την αυστηρή θεμελίωση τους πάνω στη λογική βάση της αριθμητικής και της άλγεβρας με ταυτόχρονο περιορισμό κι απομάκρυνση κάθε σιωπηλής ενορατικής απόδοσης στη γεωμετρική διαπραγμάτευση. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η αριθμητικοποίηση των μαθηματικών

ήταν η καθοριστική τάση ανάπτυξης τους στο 19ο αιώνα, η οποία προκάλεσε και την επιστημολογική τους αλλαγή[18], με κύριο χαρακτηριστικό της απελευθέρωση των γεωμετρικών εννοιών απ' την οντολογική αμεσότητα και το πέρασμα στη δομική τους υπόσταση[19].

Οι συνέπειες της «πίεσης» αυτής αποτυπώνονται στη γεωμετρία, τόσο στο σχολικό όσο και στο επιστημονικό επίπεδο, μ' αποτέλεσμα να περάσει σ' ανώτερο στάδιο ανάπτυξης.

Με το ξετύλιγμα του προηγούμενου αιώνα η νέα αντίληψη των μαθηματικών προοδευτικά μορφοποιήθηκε και εδραιώθηκε. Αυτό είχε ως αντανάκλαση απ' τη μια την κριτική στάση στους παραδοσιακούς μαθηματικούς κλάδους, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τη γεωμετρία του Ευκλείδη κι απ' την άλλη την αναμόρφωση της αξιωματικής σκέψης. Στο σχολικό επίπεδο απ' το 1870 η κριτική στάση απέναντι στον Ευκλείδη μετατράπηκε σ' έντονη αντιπαράθεση. Το γεγονός αυτό παρουσιάζεται ανάγλυφα στην Αγγλία και λίγο αργότερα στη Γερμανία. Και είναι χαρακτηριστικό ότι η «αντι-Ευκλείδεια» κίνηση στην Αγγλία καθοδηγήθηκε απ' την «Ένωση για τη βελτίωση της διδασκαλίας της γεωμετρίας» που συστάθηκε το 1871, κύρια, από εκπαιδευτικούς-μαθηματικούς[20] με σκοπό να αντικαταστήσουν τον Ευκλείδη με μια γεωμετρία τύπου Legendre[21]. Επίσης θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι μεταρρυθμιστικές τάσεις στα σχολικά μαθηματικά και στη γεωμετρία ειδικότερα, που δρούσαν στο γύρισμα απ' τον 20ο αιώνα, δεν ήταν υπόθεση μόνο των μαθηματικών ενώσεων αλλά και των μηχανικών (π.χ. η Ένωση Γερμανών μηχανικών ή το κίνημα Perry στην Αγγλία). Κι αυτό δείχνει ότι οι αντιθέσεις στον Ευκλείδη δεν προέρχονταν μόνο απ' την αλλαγή του τρόπου σκέψης στα μαθηματικά αλλά κι απ' τις απαιτήσεις της παραγωγικής διαδικασίας για ικανότητες που διαμορφώνονται με τη βοήθεια της μαθηματικής εκπαίδευσης[22].

Οι αντιρρήσεις στη γεωμετρία του Ευκλείδη επικεντρωνόταν:

— στη λογική της ανεπάρκειας, σε σχέση με τα κριτήρια της εποχής,
— στη στενότητα του περιεχομένου της, που άφηνε απ' έξω τα νεώτερα αποτελέσματα της έρευνας στο χώρο της γεωμετρίας (π.χ. τη μέθοδο των συντεταγμένων),
— στον άκαμπτο και παρωχημένο γεωμετρικό τρόπο σκέψης που περιείχε,
— στην αδυναμία της για εφαρμογές σ' άλλες περιοχές της επιστήμης και της τεχνικής και
— στην παιδαγωγική της σκλήρυνση που υπέστη απ' την

επιβολή του ρόλου της ως μέσον για την καλλιέργεια της διανοητικής πειθαρχίας και εξάσκησης.

Σε μια δεύτερη φάση προβληματισμού κι αναζήτησης, στις αρχές του αιώνα μας, για τη σχολική γεωμετρία, επιχειρήθηκε μια βαθύτερη τομή προωθόντας τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς ως βάση της θεωρίας και τις ευρετικές μεθόδους για την απόκτηση κι αφομοίωση της διδακτέας ύλης[23]. Οι συζητήσεις και οι προσπάθειες αυτές ήταν αρκετά γόνιμες. Παρ' όλα αυτά δεν μπόρεσαν να υλοποιηθούν και να καθιερωθούν σε ευρεία κλίμακα λόγω της πολυτάραχης περιόδου που ακολούθησε (δύο παγκόσμιοι πόλεμοι, μια οικονομική κρίση). Έτσι όλη αυτή η δραστηριότητα καταχωρήθηκε στα ιστορικά αρχεία, για να ξαναέρθει στην επικαιρότητα στα τέλη της δεκαετίας του 1950.

Μια αξιόλογη προσπάθεια του μεσοδιαστήματος, που δεν πρέπει να την αγνοήσουμε, έγινε στις ΗΠΑ απ' τους G.D. Birkhoff και R. Beatley με την επαναθεμελίωση της σχολικής γεωμετρίας στη βάση της μετρικής γεωμετρίας[24]. Δυστυχώς η επίδρασή της δεν ήταν μεγάλη και το μόνο που κατάφερε ήταν να παρουσιάσει μια εναλλακτική άποψη του θέματος. Τελικά όλα δείχνουν ότι μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1950 η σχολική γεωμετρία, στο διεθνή χώρο, ήταν κάποια παραλλαγή της γεωμετρίας του Legendre.

Στο επιστημονικό επίπεδο σημειώθηκαν δύο βασικές αλλαγές στο γεωμετρικό τρόπο σκέψης. Η πρώτη εκφράστηκε το 1899 με την έκδοση του βιβλίου «Θεμέλια της Γεωμετρίας» του D. Hilbert και η δεύτερη αποκρυσταλώθηκε στο διάστημα 1935-1955 μέσα απ' τη δουλειά της ομάδα Bourbaki.

«Τα θεμέλια της Γεωμετρίας» ήταν ένα προϊόν της επιστημολογικής αλλαγής των μαθηματικών που πραγματοποιήθηκε στη διάρκεια του 19ου αιώνα, με κύριο γνώρισμα την αυστηρή, δομική, θεμελίωσή τους.

Τα βασικά χαρακτηριστικά που ξεχωρίζουν τη γεωμετρία του Hilbert απ' αυτές του Ευκλείδη και του Legendre είναι:

— η απουσία των ορισμών των αρχικών εννοιών, και
— η στήριξη της θεωρίας πάνω στις αυστηρά καθορισμένες μεταξύ τους σχέσεις.

Τις αρχικές έννοιες απλά τις αναφέρει ως δοσμένα γεωμετρικά στοιχεία. Γράφει σχετικά: «Θεωρούμε τρία διαφορετικά συστήματα αντικειμένων: ονομάζουμε τα αντικείμενα στο πρώτο σύστημα σημεία και σημειώνουμε αυτά με A, B, C, ... ονομάζουμε τα αντικείμενα του δευτέρου συστήματος ευθείες γραμμές και σημειώνουμε αυτές με a, b, c, ... ονομάζουμε τα

αντικείμενα του τρίτου συστήματος επίπεδα και σημειώνουμε αυτά μα α, β, γ, ...»[25].

Μ' αυτό το τρόπο διαπραγμάτευσης γίνεται ένα σημαντικό βήμα, μια και τώρα απελευθερώνονται οι αρχικές έννοιες απ' τη μοναδική ερμηνεία τους, όπως γινόταν στον Ευκλείδη και στον Legendre και εισάγεται η μεταβλητή σημασία τους, δηλ. η ανεξαρτησία τους από συγκεκριμένο περιεχόμενο, και δεσμεύονται μόνο από εκείνες τις μεταξύ τους σχέσεις και ιδιότητες που είναι αναγκαίες για τη λειτουργική ανάπτυξη της θεωρίας. Η αξία αυτού του τρόπου σκέψης βρίσκεται στο γεγονός ότι έχει καθολικότερη ισχύ κι έτσι μεγαλύτερο εύρος αξιοποίησης[26].

Πάνω σ' αυτή τη βάση ο Hilbert ολοκληρώνει το οικοδόμημά του με την τυποκρατικοποίηση (= φορμαλιστικοποιήση) της αποδεικτής διαδικασίας δηλ. με τη λογική τυποποίηση των συστατικών της και τη διάταξη τους με τη βοήθεια της τυπικής λογικής.

Τα «θεμέλια της Γεωμετρίας» που ανήκουν στην κατηγορία της γεωμετρίας τύπου Ευκλείδη, δεν ξεπεράστηκαν μέχρι σήμερα. Γεγονός που δείχνει τη ζωτικότητα των ιδεών τους στην εποχή μας. Θα πρέπει ακόμη να σημειώσουμε ότι με το βιβλίο αυτό εγκαινιάστηκε και η φορμαλιστική σχολή στα μαθηματικά.

Η ομάδα Bourbaki αναδύθηκε μέσα απ' αυτή τη σχολή και προώθησε τις εξής τρεις σημαντικές θέσεις:

— ανύψωση της αυστηρότητας και του φορμαλισμού,
— ενοποίηση των μαθηματικών κλάδων κάτω από τριες βασικές δομές, και
— αλγεβροποίηση της γεωμετρίας.

Η αξιωματική σκέψη με τη δουλειά των Bourbaki πέρασε σ' ένα ανώτερο στάδιο απ' αυτό που την είχε αφήσει ο Hilbert. Έτσι αν δούμε συγκριτικά τα δύο αξιωματικά συστήματα θα διαπιστώσουμε ότι τώρα η αυστηρότητα και η τυποποίηση εντάθηκαν όχι μόνο στο εννοιολογικό και μεθοδολογικό επίπεδο των μαθηματικών αλλά και στα λογικά μέσα που χρησιμοποιούνται για τη δόμιση της θεωρίας[27].

Σχετικά με τη γεωμετρία οι Bourbaki δηλώνουν ότι η κλασσική μορφή της έπαιξε ένα ιστορικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών, στο σημερινό, όμως, στάδιο της επιστήμης αποτελεί παρωχημένο υλικό, μια και δεν υπάρχουν πια προβλήματα για το παραπέρα ανέβασμα τόσο της ίδιας όσο και των άλλων μαθηματικών κλάδων[28]. Έτσι προτείνεται η γραμμική άλγεβρα ως πρότυπο της σύγχρονης γεωμετρικής σκέψης και μ' αυτό το τρόπο ευθυγραμμίζεται τόσο με την

ερευνητική κατάσταση της εποχής, όσο και με την απαίτηση για δομική ενοποίηση των μαθηματικών.

Απ' τα τέλη της δεκαετίας του 1950 οι απόψεις των Bourbaki μπαίνουν επικεφαλής στην εκπαιδευτική μεταρρύθμιση των σχολικών μαθηματικών και γενικότερα σ' όλη τη μαθηματική σκέψη. Σήμερα διατηρούνται και εφαρμόζονται σε μεγάλα ποσοστά οι αντιλήψεις αυτές, χωρίς βέβαια να λείπουν και οι κλυδωνισμοί.

Ας δούμε τώρα την κατάσταση της σχολικής γεωμετρίας στην Ελλάδα. Και πρώτα-πρώτα να σκιαγραφίσουμε το παρελθόν της.

Στα πρώτα 50 χρόνια του σύγχρονου Ελληνικού κράτους κυριαρχούσε η Γεωμετρία του Legendre. Υπήρξαν 4 διαφορετικές μεταφράσεις με αρκετές επανεκδόσεις. Στο υπόλοιπο διάστημα και μέχρι το 1968 υπήρχαν διάφορες γεωμετρίες τύπου Legendre π.χ. αυτές του Χατζιδάκη, του Μπαρμπαστάθη και του Νικολάου. Στη συνέχεια εμφανίζονται παροδικά κάποιες γεωμετρίες, οι οποίες χρησιμοποιούν στοιχεία της αξιωματικής του Hilbert, π.χ. του Ιωαννίδη[29] και των Παπαμιχαήλ/Σκιαδά[30], και συμβιώνουν ή εναλλάσσονται μ' αυτές της προηγούμενης κατηγορίας, π.χ. του Παπανικολάου[31]. Τέλος κατά καιρούς συνυπάρχουν, αποσπασματικά και γεωμετρίες άλλων κατηγοριών, όπως π.χ. η αναλυτική, η γραμμική (διανυσματικοί χώροι) και γεωμετρικών μετασηχματισμών. Το 1983 το Υπουργείο Παιδείας προκήρυξε διαγωνισμό για τη συγγραφή Ευκλείδειας Γεωμετρίας[32] κι όπως μας πληροφόρησε ο κ. Βαρουχάκης[33] αυτή τη στιγμή το βιβλίο γράφεται.

Ένα ερώτημα που φυσιολογικά παρουσιάζεται είναι:

ποια γεωμετρία θεωρείται Ευκλείδεια;

Δύο στοιχεία θα μας βοηθήσουν να απαντήσουμε. Το ένα προβάλει από την ιστορική πρακτική και φωτίζει έμμεσα το θέμα. Το άλλο είναι πιο άμεσο και προέρχεται από αρμόδιο υπηρεσιακό παράγοντα, τον κ. Βαρουχάκη.

Απ' την ιστορική αναδρομή που κάναμε δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι με τον όρο Ευκλείδεια γεωμετρία θεωρείται η συνθετική γεωμετρία, δηλ. η γεωμετρία που δεν στηρίζεται σε αναλυτικές τεχνικές που περιλαμβάνουν τη χρήση ενός ή άλλου συστήματος συντεταγμένων, αλλά σε αλυσιδωτή, απαγωγική, εξαγωγή συμπερασμάτων από αξιώματα[34]. Στη δική μας περίπτωση η θεματολογία και η διάταξη του περιεχομένου της θυμίζει περισσότερο τη γεωμετρία του Legendre. Αν, τώρα, συσχετίσουμε και την άποψη δύο ελλήνων μαθηματικών, που έπαιξαν σημαντικό ρόλο στα σχολικά μας μαθήματα, του Νικολάου[35] και του Σωτηράκη[36], σύμφωνα με την οποία «οι γεωμετρίες μας ακολουθούν τη διαίρεση σε

8 βιβλία, όπως την καθιέρωσε ο Legendre», τότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η γεωμετρία του Legendre αποτέλεσε το κύριο πρότυπό μας γι' αυτό που ονομάζουμε Ευκλείδεια γεωμετρία.

Απ' την άλλη μεριά με την απάντηση του κ. Βαρουχάκη ότι «δεν θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες» στο ερώτημα «γιατί δεν ευθυγραμμιζόμαστε με το σύνθημα: να φύγει ο Ευκλείδης», γίνεται φανερό ότι υπάρχει η άποψη, και μάλιστα επίσημη, ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι η γεωμετρία του Ευκλείδη. Ανάλογη στάση συναντάμε και παλιότερα. Στο άρθρο[37] π.χ. του Ν. Χατζιδάκη, του 1929, για τη Γεωμετρία η δεύτερη ενότητα αρχίζει ως εξής:

> «II. ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Η γεωμετρία του Ευκλείδου στηρίζεται.....»

και λίγο παρακάτω διαβάζουμε:

> «... τα διάφορα συγγράμματα, τα οποία σήμερον χρησιμεύουν εις όλον τον κόσμο δια την μέσην εκπαίδευσιν, ακολουθούν κατά το πλείστον τον Ευκλείδην».

Παρόμοια θέση παίρνει δύο δεκαετίες, περίπου, αργότερα και ο Μ Κωβαίος όταν γράφει[38]:

> «... (τα) Στοιχεία του Ευκλείδη (...) αποτελούν μέχρι σήμερα τη βάση της συγγραφής εγχειριδίων για τη διδασκαλία της Θεωρητικής Γεωμετρίας στα σχολεία της Μέσης Παιδείας».

Και οι δύο, όμως, αναγνωρίζουν κάποιες παρεκλίσεις της σχολικής γεωμετρίας απ' το αυθεντικό κείμενο του Ευκλείδη, τις οποίες ο μεν Ν. Χατζιδάκης τις αντιμετωπίζει ως φυσική συνέπεια που προκλήθηκε με τις νεώτερες προσθήκες θεωριών και προτάσεων, ο δε Κωβαίος τις θεωρεί «ατύχημα» για την εκπαίδευσή μας και τη χώρα μας.

Φθάνουμε έτσι στην εξής αντίφαση:

> απ' τη μια μεριά είδαμε ότι στην πράξη η σχολική μας γεωμετρίας ήταν κατά βάση τύπου Legendre την οποία μάθαμε να την ονομάζουμε Ευκλείδεια γεωμετρία, απ' την άλλη προβάλλεται ως η Γεωμετρία του Ευκλείδη.

Και η αντίφαση αυτή εντείνεται τα τελευταία χρόνια όταν κάτω απ' το τίτλο Ευκλείδεια γεωμετρία αναμειγνύονται και θέματα γεωμετρίας του Hilbert η γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (π.χ. η Ευκλείδειος Γεωμετρία του Σπ. Κανέλου, ΟΕΔΒ 1977).

Τι προκαλεί, όμως, αυτή την αντίφαση;

Το μυαλό μας πρώτα-πρώτα θα πάει στην επιστημονική άγνοια. Αλλά είναι πολύ στοιχειώσες θέμα και δεν δικαιολογείται κάτι τέτοιο. Το πιθανότερο είναι, κατά τη γνώμη μας, κάποια ιδεολογική επιλογή. Αυτό ενισχύεται αν παρατηρήσουμε ότι διάφοροι εκπρόσωποι συντηρητικών αντιλήψεων επιχειρη-

ματολογούν υπέρ του αθάνατου μαθηματικού πνεύματος των αρχαίων μας προγόντων και προσπαθούν να αντικρούσουν σύγχρονες επιστημονικές προόδους ή να εγκλωβίσουν επιστημονικά έργα σε ιδεολογικές τους προτιμήσεις. Θα αναφέρουμε δύο τέτοια παραδείγματα.

Ο Ευάγ. Σταμάτης, ένας αρκετά γνωστός έλληνας ιστορικός των μαθηματικών, με το κείμενό του[39]:

«Η προσπάθεια του δαβίδ Χίλμπερτ
δια την κατάρτησιν της Ελληνικής
γεωμετρίας»

παίρνει καθαρά εθνικιστική θέση.

Απ' την άλλη μεριά ο Π. Ζερβός[40] και ο Μ. Κωβαίος[41] υποστηρίζουν ότι ο Ευκλείδης ακολούθησε τα βήματα του Πλάτωνα, κάτι που σύγχρονες μελέτες αποδεικνύουν το αντίθετο[42]. Αυτή η προσπάθεια πάει ακόμη πιο βαθιά μια και κάτω απ' την επίδρασή της η σχολική μας γεωμετρία εντάσσεται αλλά και καλλιεργείται στα πλαίσια της πλατωνικής ιδεολογίας.

Μέσα σ' αυτό το σκηνικό οι διδακτικές ασυνέπειες είναι κάτι το αναμενώμενο. Θα επισημάνουμε, ενδεικτικά δύο απ' αυτές.

'Οπως είπαμε τα σχολικά μαθηματικά, σε διεθνές επίπεδο, μπήκαν απ' το 1960 στην τροχιά των μοντέρνων μαθηματικών. Η χώρα μας ευθυγραμμίστηκε κάτω απ' τις οδηγίες του ΟΟΣΑ[43] και σήμερα η μαθηματική μας παιδεία χαρακτηρίζεται απ' το πνεύμα τους. Εκείνο που προσδιορίζει τη φυσιογνωμία τους δεν είναι η ένταξη των νέων κεφαλαίων στο διδακτικό πρόγραμμα, αλλά η θεμελίωση του περιεχομένου πάνω σε μια απ' τις πιο σύγχρονες φιλοσοφικές βάσεις, που είναι ο στρουκτουραλισμός (= δομισμός). Δεν θα τον αναλύσουμε γιατί είναι έξω απ' τα όρια και τις επιδιώξεις αυτής της ομιλίας. Θα αναφέρουμε μόνο δύο γνωρίσματά του, που καθορίζουν το χαρακτήρα αυτής της θεώρησης των μαθηματικών κι αποτελούν στοιχεία σύγκρισης με τη δική μας περίπτωση. Αυτά είναι: ο αντιπλατωνικός προσανατολισμός[44] και η δομική ενότητα[45] των μαθηματικών θεωριών.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι οι πλατωνικές διαθέσεις που αιωρούνται, όπως σημειώσαμε, στη σχολική μας γεωμετρία έρχονται σ' αντίθεση με τις φιλοσοφικές αρχές των μαθηματικών που τυπικά παρέχονται στο ελληνικό σχολείο. 'Ετσι οι απόπειρες συγκόλλησης τους έχουν για συνέπεια την καταστροφή της επιστημολογικής συνοχής. Το αποτέλεσμα είναι η ερμηνευτική αστάθεια που οδηγεί στην αδυναμία κατανόησης κι έτσι στην αναγκαστική, σιωπηλή, αποδοχή της διδακτέας ύλης.

Για να εκτιμήσουμε, τώρα, τη διδακτική διάσταση της εθνι-

κιστικής εμμονής στον Ευκλείδη θα εξετάσουμε το ρόλο της μέσα στη γεωμετρική γνώση που περιέχεται στα βιβλία του Λυκείου.

Τα τελευταία χρόνια υπάρχουν στη χώρα μας τρία βιβλία γεωμετρίας αντίστοιχα για τις τάξεις του Λυκείου. Αυτά είναι:

— θεωρητική Γεωμετρία, των Παπαμιχαήλ Δ./Α. Σκιαδά
— Ευκείδεια Γεωμετρία, του Παπανικολάου Χρ.Γ και
— Μαθηματικά Ι, Γ΄ Λυκείου, Αναλυτική Γεωμετρία των Βαρουχάκη Ν., Λ. Αδαμόπουλου κ.α.

Το πρώτο βιβλίο[46], η θεωρητική γεωμετρία, εφαρμόζει καθαρά το αξιωματικό σύστημα του Hilbert για την ανάπτυξη κι οργάνωση του περιεχομένου του. Το δεύτερο τυπικά αποτελεί τη συνέχεια του πρώτου λόγου της διαδοχής των σχολικών τάξεων που αντιστοιχού, αλλά και λόγω της θεματολογίας τους. Στην ουσία, όμως, ανήκει σε διαφορετική επιστημολογική κατηγορία. Αυτό γίνεται φανερό αν δούμε τον τρόπο χρησιμοποίησης της ισότητας. Πράγματι, στο βιβλίο της α΄ λυκείου ο χειρισμός της ισότητας γίνεται αξιωματικά[47], ενώ στο βιβλίο του Παπανικολάου στη βάση της ταύτισης με μετατόπιση[48]. Αν πάρουμε υπ' όψη μας ότι η μετατόπιση χρησιμοποείται ενορατικά[49] (κι όχι ως γεωμετρικός μετασχηματισμός), τότε οδηγούμαστε στη διαπίστωση ότι η Ευκλείδεια γεωμετρία της β΄ λυκείου επιστημολογικά διαφέρει απ' τη γεωμετρία της α΄ λυκείου και συγγενεύει με τις γεωμετρίες τύπου Legendre. Με το τρίτο βιβλίο η μελέτη της γεωμετρίας γίνεται τελείως διαφορετικά. Εδώ κάτω απ' το πρίσμα της αναλυτικής προσέγγισης αναπτύσσεται το περιεχόμενο του ανεξάρτητα κι αποκομμένα απ' την προηγούμενη γεωμετρική γνώση που διάχτηκε στο λύκειο. Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι μέσα στην αναλυτική κατεύθυνση εφαρμόζονται δύο μέθοδοι: των διανυσμάτων με φανερή την αλγεβρική τάση στο πρώτο μέρος και των συντεταγμένων, με την κλασσική αντίληψη της αναλυτική γεωμετρίας[50].

Τα στοιχεία αυτά κάνουν φανερή την πολυδιάσπαση και την απόκλιση της γεωμετρικής γνώσης στο λύκειο, γεγονός που έρχεται σ' αντίθεση με τη βασική αρχή των μοντέρνων μαθηματικών για δομική ενότητα των θεωριών. Κι αυτό είναι αποτέλεσμα της εμμονής στον Ευκλείδη, που παγιδεύει την ανανέωση και την εναρμόνιση της σχολικής μας γεωμετρίας μέσα στα σύγχρονα πλαίσια των σχολικών μαθηματικών στα οποία τυπικά λειτουργεί η μαθηματική μας παιδεία.

Το ζήτημα αυτό των διδακτικών ασυνεπειών φανερώνει και δύο ακόμη όψεις του τρόπου αντιμετώπισης της μαθηματικής γνώσης απ' τους επίσημους καθοδηγητές της μαθηματικής

μας παιδείας. Η πρώτη δείχνει ότι η διαχείρηση του περιεχομένου των σχολικών μας μαθηματικών γίνεται μ' ένα αθροιστικό πνεύμα. Η δεύτερη αποκαλύπτει ότι το μαθηματικό υλικό που απαιτείται για την οργάνωση και την παρουσίαση των σχολικών μαθημάτων αντλείται από τα προϊόντα της μαθηματικής δραστηριότητας και παραμελείται η διαδικασία διαμόρφωσης κι ανάπτυξή τους. Έτσι στην καλύτερη περίπτωση είναι δυνατή μια ανεκτή συγκόλιση θεμάτων που επιλέγονται μέσα απ' τη διαθέσιμη σχολική βιβλιογραφία.

Κλείνοντας θα θέλαμε να τονίσουμε ότι αυτή η προσπάθεια απέβλεπε στην αποκάλυψη του προβλήματα. Για να βρεθούν λύσεις θα πρέπει να γίνει αρκετή δουλειά μια και οι έτοιμες δεν είναι αποδοτικές και η ιδεολογική αδράνεια είναι πολύ μεγάλη.

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

(1) πραγματοποιήθηκε στις 24.5.1986 στη Σχολή Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ.

(2) βλ. Brock W.H.: Geometry and the Universities: Euclid and his Modern Rivals 1860-1901, History of Education, 4, 1975: 21-35.

(3) βλ. Dieudonné J.: New thinking school mathematics, στο βιβλίο New Thinking in School Mathematics, O.E.E.C. 1961, σελ. 31-46.

(4) δόθηκε στα πλαίσια της διάλεξης του στις 27-3-1986 στο παρ/μα Θεσ/νίκης της ΕΜΕ.

(5) π.χ. Σταμάτη Ε.Σ. Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία, τομ. I, II, III, IV, ΟΕΔΒ, 1953-1975.

(6) βλ. Szabo A.: Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών, Τ.Ε.Ε. 1973.

(7) βλ. Meuller I.: Euclid' s Elements and the Axiomatic Method, The British Journal for the Philosophy of Science, 20, 1969: 289-309.

(8) βλ. Schüling H.: Die Geschichte der axiomatischen Methode im 16. und beginnenden 17. Jahrhundert, Georg Olms Verlag 1969.

(9) βλ. Crombie A.C.: Mathematics and Platonism in the sixteenthcentury Italien Universities and in Jesuit education policy, στο βιβλο: Maeyama Y./W.G. Saltzer (eds): ΠΡΙΣΜΑΤΑ, Franz Steiner Verlag, 1977, σελ. 63-94.

(10) βλ. Verdonk J.J.: Über die Geometrie des Petrus Ramus, Sudhoffs Archiv 52, 1 968-9: 371-381.

(11) βλ. Mahoney M.S.: Die Anfänge der algebraischen Denkweise im 17. Jahrhundert, Rete 1, 1971-2: 15-31

(12) βλ. Einstein A.: Esays in Science, A Division of Philosophical Library, 1934, σελ. 64-65.
(13) βλ. Cajori F.: Attempts made during the eighteenth and nineteenth centuries to reform the teaching of geometry, The American Math. Monthly 17, 1910: 181-201.
(14) βλ. Sanford V.: Adrien-Marie Legendre, The Math Teacher 28, 1935: 182-184.
(15) βλ. Miller G.A.: On the development of elementary geometry in nineteenth century, School science and Math. 7, 1907: 752-755.
(16) βλ. Stamper A.W.: A history of the teaching of elementary geometry, Dissertation in Columbia Univ. 1906, σελ. 81-82.
(17) βλ. Miller G.A. προγ. υποσημ.
(18) βλ. Jahnke H.N./M. Otte: Origins of the program of "Arithmetization" of MAthematics στο βιβλίο Mehrtens H. et al (eds): Social History of Nineteenth Centrury Mathematics, Birkhäuser, 1981, σελ. 21-49.
(19) βλ. Folta J. Geometric and algebraic axiomatics and the generalization of the subject of geometry, XII^{e} Congrès Intern d' histoire des Sciences, Albert Blanchard, 1971, tom IV, σελ. 59-65.
(20) βλ. Price M.: Mathematics in English education 1860-1914: Some questions and explanations in curriculum history, History of Education 12, 1983: 271-284.
(21) βλ. Klein F.: Elementary mathematik vom höheren Standpunkte aus, band 2, Springer Verlag 1925, σελ. 233.
(22) βλ. Assistant Masters Association: The teaching of mathematics in secondary schools, Cambridge Univ. Press 1973, σελ. 8-9 και Neander J.: Mathematik und Ideologie, Werner Raith Verlag, 1974, σελ. 42-48.
(23) βλ. Klein F.: προηγούμενη υποσημείωση σελ. 226-262.
(24) βλ. Birkhoff G.D./R. Beatley: Basic Geometry, Experimental Edition by the authors 1933 (3η έκδοση Chelsea Publ. Comp. 1959) και Birkhoff G.D./R. Beautley: A new approach to elementary geometry, The Fifth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics σελ. 86-95.
(25) βλ. Hilbert D.: Grudlagen der Geometric, Verlag und Druck von B.G. Teubner, 1930, σελ. 2.
(26) βλ. Kedrovskij O.I.: Metody postronija teoreticeskich sistem znanija (Dialog filosofa i mathematika), kiev "Visca skola" 1982, σελ. 49.
(27) βλ. παραμ. (26) σελ. 49-50.

(28) βλ. New trends in mathematics teaching, Vol. III Unesco 1972, σελ. 25.
(29) βλ. Ιωαννίδη Ι. Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, τόμος Δεύτερος, Ο.Ε.Δ.Β. 1968.
(30) βλ. Παπαμιχαήλ Δ./Α. Σκιαδά. Θεωρητική Γεωμετρία, Τεύχος Πρώτό, Γ΄ Γυμνασίου, Ο.Ε.Δ.Β. 1977.
(31) βλ. Παπανικολάου Χρ. Γ.: Ευκλείδειος Γεωμετρία, Ο.Ε.-Δ.Β. 1975.
(32) Απόφαση του ΥΠΕΘ με αριθμ. πρωτ. Φ. 211.11/1/Γ2/ 2396/21-9-83.
(33) Στην ομιλία του στις 27.3.1986 στη Θεσ/νίκη.
(34) βλ. Yalgom I.M.: Elementary Geometry, Then and Now, στο βιβλίο Davis C. et al. (eds): The Geometry Vien, Springer Verlag, σελ. 253-269, ειδικά στη σελίδα 157.
(35) βλ. Νικολάου Ν.Δ.: Θεωρητική Γεωμετρία, Ο.Ε.Δ.Β., 1968, σελ. 388.
(36) βλ. Σωτηράκη Ν.Δ.: Ανακαίνιση της διδασκαλίας των μαθηματικών, Παιδεία και Ζωή, 5, 1956: 215-219, ειδικά στην υποσ. 1.
(37) βλ. Χατζιδάκη Ν.: Γεωμετρία, Ανάτυπο εκ της Μεγάλης Ελληνικής Εγκυκλοπαίδειας του Πυρσού, 1929, ειδικά στη σελ. 3.
(38) βλ. Κωβαίου Μ.: Τα στοιχεία του Ευκλείδη σαν σχολικό βιβλίο άλλοτε και σήμερα, Παιδεία και Ζωή, 1, 1952: 70-79.
(39) βλ. Σταμάτη Ευαγ.: Ελληνικά Μαθηματικά, εκδόσεις Εταιρείας των Φίλων του Λαού, Αθήναι 1976, σελ. 123.
(40) βλ. Ζερβού Π. : Αι Μαθηματικαί έννοιαι παρά Πλάτωνι, Πρακτικά της Ακαδημίας Αθηνών 25, 1950: 344-358, ειδικά σελ. 354 και 356.
(41) βλ. παραπομπή (38) σελ. 74.
(42) βλ. Maziarz E.A./T. Greenwood: Greek Mathematical Philosophy, Frederick Ungar Publ. co. 1968 ειδικά σελ. 243.
(43) βλ. Πειραματική Διδακολία των Μαθηματικών εις την πρώτη βαθμίδα των γυμνασίων, Βιβλίο Ι, Μαθηματικά Α΄ τάξεως, Υπουργείον Εθνικής Παιδείας και θρησκευμάτων, Υπηρεσία μελετών και Συντονισμού, Αθήναι 1962, πρόλογο.
(44) βλ. Dieudonné: Πρέπει να διδάσκουμε «Μοντέρνα» μαθηματικά; Μαθηματική Επιθεώρηση 21, 1981: 34-47, ειδικά στη σελ. 40 και Beth E.W./J. Piaget: Mathematical epistemology and psychology, D. Reidel Publ. Comp. 1966, σελ. 274.
(45) βλ. Λευκοπούλου Μ.: «Η αρχιτεκτονική» των μαθηματι-

κών και η επίδρασή της στη διδασκαλία τους, Εκπαίδευση και Επιστήμη 1, 1980: 40-48.

(46) βλ. Το μέρος αυτό είναι εκτενέστερο απ' το αντίστοιχο της προφορικής παρουσίασης.

(47) βλ. Παπαμιχαήλ Δ./Α. Σκιαδά: Θεωρητική Γεωμετρία Α΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ, 1979, σελ. 64.

(48) βλ. Παπανικολάου Χρ.: Ευκλείδειος Γεωμετρία, Β΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ, 1983, σελ. 103.

(49) βλ. Παπανικολάου Χρ. Ευκλείδειος Γεωμετρία, Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Γυμνασίου, ΟΕΔΒ, 1975, σελ. 15-16.

(50) Το φαινόμενο αυτό το συναντάμε και σε πανεπιστημιακά συγγράμματα. Για μια ενιαία αντιμετώπιση στη βάση των διανυσμάτων, βλ. Athen H: The teaching of vectors in the German gymnasium II, The Mathematics Teacher, May 1966: 485-495.

Υπεύθυνος κρίσης: Σ. Παπασταυρίδης

Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΠΟΥ... ΜΕΤΑΤΡΕΠΟΤΑΝ ΣΕ ΑΛΛΑ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ

Δημήτρης Ζαχαριάδης - Τάσος Πατρώνης

Προσπαθείστε να λύσετε πρώτα κάποιο σχετικό πρόβλημα (πιο προσιτό)· τότε ίσως βρείτε κουράγιο να ξαναπιάσετε το αρχικό σας πρόβλημα

G. POLYA, "How to solve it"

1. Στο νησί...

Οι διακοπές προσφέρονται για λύση προβλημάτων. Είτε μαθηματικά προβλήματα είναι αυτά, είτε αστυνομικά, είτε γρίφοι σε περιοδικά του τύπου «Για να περνάει η ώρα», το γεγονός είναι ότι πρόκειται βασικά για το ίδιο όμορφο, «αρχέγονο», παιχνίδι του ανθρώπινου πνεύματος, που με τις σημερινές συνθήκες της ζωής μας δύσκολα βρίσκει το χρόνο για να διεξαχθεί...

Η ιστορία αυτού του προβλήματος άρχισε (όσο αφορά τουλάχιστον εμάς που γράφουμε) στις διακοπές του καλοκαιριού, όταν ο ένας από τους δυο μας επισκέφτηκε τον άλλο στο νησί που μένει μόνιμα. Εκεί ένας ηλικιωμένος κύριος, ερασιτέ-