Μαθηματικοί Διαγωνισμοί
Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

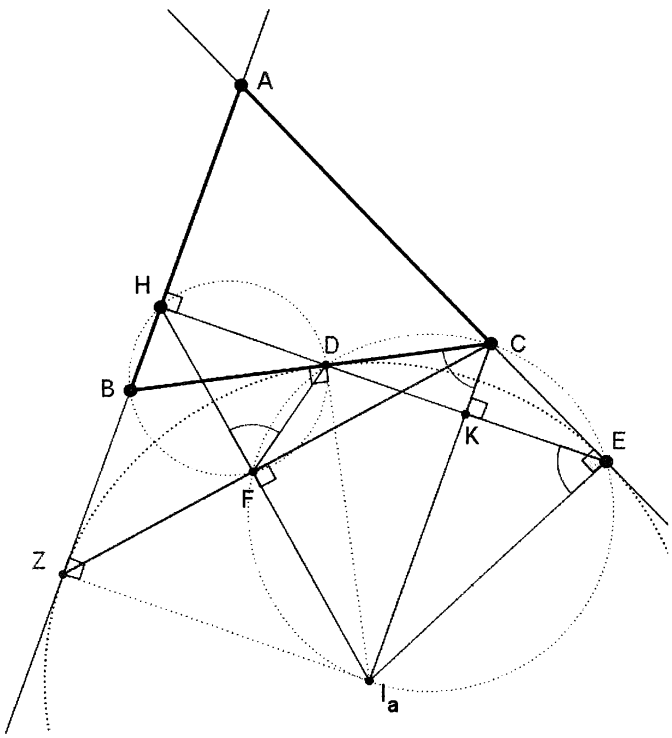
11η ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ 2008

εις μνήμην PETER O' HOLLORAN

Πρόβλημα 1

Έστω c_A ο παρεγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC με κέντρο I_a ο οποίος εφάπτεται της πλευράς BC στο σημείο D και στις προεκτάσεις των πλευρών AC και AB στα σημεία E και Z, αντίστοιχα. Αν η ευθεία ED είναι κάθετη προς την πλευρά AB (την οποία τέμνει στο σημείο H) και η ευθεία ZF είναι η κάθετη από το Z προς την ευθεία HI_a (την οποία τέμνει στο σημείο F), να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{F}D$ και $A\hat{F}E$.

Λύση



Έστω K το σημείο τομής των ευθειών I_aC και ED. Επειδή οι ευθείες CE και CD είναι εφαπτόμενες από το C του κύκλου έπεται ότι $I_aC \perp ED$, οπότε το τετράπλευρο ZI_aKH έχει από τις υποθέσεις τρεις γωνίες ορθές και είναι ορθογώνιο. Άρα είναι $KI_a \| = ZH$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ECI_a λαμβάνουμε: $(I_aZ)^2 = (I_aE)^2 = (I_aC)(I_aK) = (I_aC)(ZH) \Rightarrow \frac{I_aZ}{CI_a} = \frac{ZH}{I_aZ}$,

από την οποία προκύπτει ότι τα τρίγωνα HZI_a και ZI_aC είναι όμοια.

Επομένως, οι γωνίες $Z\hat{H}I_a$ και $C\hat{Z}I_a$ είναι ίσες, οπότε οι ευθείες HI_a και ZC είναι κάθετες, δηλαδή τα σημεία Z, F και C είναι συνευθειακά και

$$H\hat{B}D = B\hat{C}I_a . \qquad (1)$$

Επιπλέον, επειδή το τετράπλευρο $CDFI_a$ είναι εγγράψιμο (αφού $I_a\hat{F}C = I_a\hat{D}C$), έπεται ότι:

$$B\hat{C}I_a = H\hat{F}D . \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι $H\hat{B}D = H\hat{F}D$, οπότε το τετράπλευρο *BHDF* είναι εγγράψιμο και θα έχουμε $D\hat{F}B = 180^\circ - B\hat{H}D = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Επιπλέον, έχουμε $B\hat{H}I_a = H\hat{I}_aC$ [εντός εναλλάξ , $AZ \| I_aC$] (3)

$$H\hat{I}_aC = F\hat{E}C \text{ [γιατί } FI_aEC \text{ εγγράψιμο]}, \qquad (4)$$

οπότε από τις (3) και (4) έπεται ότι $B\hat{H}I_a = F\hat{E}C$ και το τετράπλευρο AHFE είναι εγγράψιμο.

Επομένως θα είναι: $A\hat{F}E = A\hat{H}E = 90^\circ$.

Πρόβλημα 2

Αν p και q είναι μη μηδενικοί ακέραιοι και η εξίσωση

$$\mathbf{y^4 + 2(2p-1)y^2 + 8qy - (4p-1) = 0} \qquad \mathbf{(1)}$$

έχει μία ακέραια ρίζα ετερόσημη του q, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\mathbf{x^3 + px + q = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

έχει μία τουλάχιστον άρρητη ρίζα.

Λύση

Γράφουμε την εξίσωση (1) στη μορφή

$$\left(y^2-1\right)^2 + 4p\left(y^2-1\right) + 8qy = 0 \qquad (3)$$

από την οποία εύκολα προκύπτει ότι οι αριθμοί ± 1 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης (1). Πράγματι, αν οι αριθμοί $y = \pm 1$ ήταν ρίζες της (1), τότε θα είχαμε $q = 0$, άτοπο.

Επίσης από την (3) προκύπτει ότι, αν y είναι η ακέραια ρίζα της (1), τότε πρέπει αυτή να είναι της μορφής $y = 2\alpha + 1,\ \alpha \in \mathbb{Z}$, δηλαδή περιττός ακέραιος. Πράγματι, αν ήταν ρίζα της (1) ο άρτιος ακέραιος $y = 2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Z}$, τότε ο όρος $\left(y^2-1\right)^2$ θα ήταν περιττός, ενώ το άθροισμα $4p\left(y^2-1\right) + 8qy$ είναι άρτιος, οπότε δεν μπορεί να αληθεύει η εξίσωση (3).

Επομένως, η ακέραια ρίζα της εξίσωσης (1) είναι της μορφής $y = 2\alpha + 1, \alpha \in \mathbb{Z}$ και ισχύει

$$2\alpha^2(\alpha+1)^2 + 2p\alpha(\alpha+1) + q(2\alpha+1) = 0 . \qquad (4)$$

Γράφουμε την εξίσωση (2) στη μορφή $f(x) = 0$, όπου $f(x) = x^3 + px + q$,

οπότε θα είναι $f(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q$.

Από την τελευταία, με πολλαπλασιασμό των δύο μελών επί $2(\alpha+1)^2$ προκύπτει ότι

$$2(\alpha+1)^2 f(\alpha) = 2\alpha^3(\alpha+1)^2 + 2p\alpha(\alpha+1)^2 + 2q(\alpha+1)^2 ,$$

η οποία λόγω της (4) γίνεται $2(\alpha+1)^2 f(\alpha) = -2\alpha^2(\alpha+1)^2 + q(\alpha+1)$. (5)

Επειδή οι αριθμοί $2\alpha+1$ και q είναι από την υπόθεση ετερόσημοι, έπεται ότι και οι αριθμοί $\alpha+1$ και q είναι ετερόσημοι., οπότε από την (5) προκύπτει ότι $f(\alpha) < 0$.

Ομοίως λαμβάνουμε ότι $2\alpha^2 f(\alpha+1) = 2\alpha^2(\alpha+1)^2 - q\alpha < 0$,

από την οποία λαμβάνουμε τη σχέση $f(\alpha+1) > 0$.

Επειδή η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3 + px + q$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$, και ισχύουν $f(\alpha) < 0$ και $f(\alpha+1) > 0$, από το θεώρημα του Bolzano, έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει μία τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$ με άκρα δύο διαδοχικούς ακέραιους. Η ρίζα αυτή δεν μπορεί να είναι ρητός αριθμός, έστω της μορφής

$\omega=\frac{\mu}{\nu},(\mu,\nu)=1$, γιατί, αν ήταν, τότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα είχαμε ότι $\mu|q$ και $\nu|1$, οπότε θα ήταν $\omega=\pm\mu\in\mathbb{Z}$, άτοπο. Άρα η εξίσωση (2) έχει μία τουλάχιστον άρρητη ρίζα.

Πρόβλημα 3

Η τετράδα θετικών ακέραιων (a,b,c,d) λέγεται *«ενδιαφέρουσα»*, αν οι αριθμοί

$$a^2,\ b^2,\ c^2,\ d^2+1$$

με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αύξουσας αριθμητικής προόδου.

α) Βρείτε μία τουλάχιστον *«ενδιαφέρουσα»* τετράδα.

β) Ο αριθμός όλων των τετράδων που είναι *«ενδιαφέρουσες»* είναι πεπερασμένος ή άπειρος; Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι η τετράδα (a,b,c,d) είναι *ενδιαφέρουσα*, αν, και μόνον αν,

$$2b^2=a^2+c^2 \qquad (1)$$

και

$$2c^2=b^2+d^2+1. \qquad (2)$$

Θεωρώντας την σχέση (1) ως εξίσωση με αγνώστους a,b,c, αν θέσουμε

$$x=\frac{a}{b}<1 \text{ και } y=\frac{c}{b}>1,$$

τότε λαμβάνουμε την εξίσωση $x^2+y^2=2,\ x,y\in\mathbb{Q}$. (3)

Μία προφανής λύση της (3) είναι το ζεύγος $(x,y)=(1,1)$. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε λύσεις (x,y) της (3) τέτοιες ώστε $1-x=m(y-1), m\in\mathbb{Q}$, δηλαδή λύσεις της μορφής $(1-m(y-1),y),\ y\in\mathbb{Q}$.

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (3) προκύπτει ότι $y=1$ ή $y=\frac{m^2+2m-1}{m^2+1}$,

οπότε προκύπτει η γνωστή λύση $(x,y)=(1,1)$ και οι λύσεις $(x,y)=\left(\frac{2m+1-m^2}{m^2+1},\frac{m^2+2m-1}{m^2+1}\right), m\in\mathbb{Q}$.

Έστω $m=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{Z}$ με $p>q$. Τότε η τριάδες (a,b,c) με

$$a=q^2+2pq-p^2,\ b=p^2+q^2,\ c=p^2+2pq-q^2, \qquad (4)$$

είναι λύσεις της εξίσωσης (1), για κάθε $p,q\in\mathbb{Z}$ με $p>q$. Έτσι πρέπει να προσδιορίσουμε ένα τουλάχιστον κατάλληλο ζεύγος p,q για το οποίο η τριάδα (a,b,c) ικανοποιεί την εξίσωση (2). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που δίνονται στη (4) στην εξίσωση (2), λαμβάνουμε την εξίσωση

$$2\left(p^2+2pq-q^2\right)-\left(p^2+q^2\right)^2-1=d^2 \Leftrightarrow p^4+8p^3q+2p^2q^2-8pq^3+q^4-1=d^2.$$

Για να βρούμε μία τουλάχιστον λύση με $p>q$, επιλέγουμε $p=q+1$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$$4q^4+24q^3+32q^2+12q=d^2 \Leftrightarrow 4q(q+1)\left(q^2+5q+3\right)=d^2,$$

για την οποία με δοκιμές εύκολα λαμβάνουμε μία λύση $q=3,\ d=36$. Τότε είναι $p=4$ και προκύπτει η τετράδα $(a,b,c,d)=(17,25,31,36)$.

β) Θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός των τετράδων που είναι *ενδιαφέρουσες* είναι άπειρος. Έστω (a,b,c,d) μία *ενδιαφέρουσα* τετράδα. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο k, οι αριθμοί

$$k^2a^2,\ k^2b^2,\ k^2c^2,\ k^2\left(d^2+1\right)$$

αποτελούν μία αύξουσα αριθμητική πρόοδο. Επομένως, για να κατασκευάσουμε μία νέα *ενδιαφέρουσα* τετράδα, αρκεί να προσδιορίσουμε θετικό ακέραιο r τέτοιο ώστε να ισχύει

$$k^2\left(d^2+1\right)=r^2+1. \qquad (5)$$

Μία κατάλληλη επιλογή για τον θετικό ακέραιο r είναι στη μορφή $r=kd+s$, οπότε η εξίσωση (5) γίνεται $k^2\left(d^2+1\right)=r^2+1\Leftrightarrow k^2d^2+k^2=k^2d^2+2kds+s^2+1\Leftrightarrow k^2=2kds+s^2+1$.

Επιλέγοντας $k=s^2+1$ η εξίσωση μετά την απλοποίηση γίνεται $s^2+1=2sd+1\Leftrightarrow s=2d$.

Για $s=2d$ λαμβάνουμε $k=4d^2+1$ και $r=4d^3+3d$, οπότε η τετράδα $\left(ka,kb,kc,r\right)$ είναι επίσης *ενδιαφέρουσα*. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή ξεκινώντας από την τετράδα $\left(ka,kb,kc,r\right)$, οπότε κάθε φορά λαμβάνουμε μία καινούρια διαφορετική τετράδα με μεγαλύτερους θετικούς ακέραιους. Έτσι καταλήγουμε σε άπειρο αριθμό τέτοιων τετράδων.

Πρόβλημα 4

Έστω ότι $\mathbf{x,y,z\in[0,1)}$ και $\mathbf{x+y+z=1}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}}+\sqrt{\frac{yz}{x+yz}}+\sqrt{\frac{zx}{y+zx}}\le\frac{3}{2}.$$

Λύση.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αντικατάσταση $m^2=\dfrac{xy}{z+xy}$, $n^2=\dfrac{yz}{x+yz}$, $p^2=\dfrac{zx}{y+zx}$, $m,n,p\ge0$.

Από την ισότητα $x+y+z=1$ λαμβάνουμε:

$$z+xy=(1-x)(1-y),\ y+zx=(1-z)(1-x),x+yz=(1-y)(1-z),$$

οπότε

$$\begin{aligned}&m^2+n^2+p^2+2mnp=\\&=\frac{xy}{(1-x)(1-y)}+\frac{yz}{(1-y)(1-z)}+\frac{zx}{(1-z)(1-x)}+2\sqrt{\frac{x^2y^2z^2}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2}}\\&=\frac{xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y)+2xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)}=\frac{xy-xyz+yz-xyz+zx-xyz+2xyz}{1-x-y-z=xy+yz+zx-xyz}=1.\end{aligned}$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι $m+n+p\le\dfrac{3}{2}$,

υπό τις συνθήκες $m,n,p\ge0$ και $m^2+n^2+p^2+2mnp=1$.

Από τις παραπάνω συνθήκες προκύπτει ότι $m\le1$, $n\le1$, $p\le1$, ενώ η δεύτερη μπορεί να γραφεί ως

$$(m+n+p)^2-2(m+n+p)+1=2(1-m)(1-n)(1-p),$$

από την οποία, με χρήση της ανισότητας αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου, έπεται ότι

$$(m+n+p-1)^2\le2\left(\frac{1-m+1-n+1-p}{3}\right)^3.$$

Αν θέσουμε $m+n+p=w\ge0$, τότε από την τελευταία ανισότητα λαμβάνουμε

$$(w-1)^2\le2\left(\frac{3-w}{3}\right)^3\Leftrightarrow27(w-1)^2\le2(3-w)^3\Leftrightarrow2w^3+9w^2-27\le0.$$

Μία από τις πιθανές ρητές ρίζες του πολυωνύμου $f(w)=2w^3+9w^2-27$ είναι ο ρητός αριθμός $\dfrac{3}{2}$, ο οποίος παρατηρούμε ότι μηδενίζει το πολυώνυμο, οπότε με το σχήμα Horner ή με τη συνήθη διαίρεση πολυωνύμων λαμβάνουμε

$$f(w)=2w^3+9w^2-27\le0\Leftrightarrow\left(w-\frac{3}{2}\right)\left(w^2+3w+9\right)\le0\Leftrightarrow w\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow m+n+p\le\frac{3}{2},$$

αφού ισχύει $w^2+3w+9>0$, για κάθε $w\in\mathbb{R}$.