## ***ΑΣΚΗΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ*** (προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου)

Αν για τους μιγαδικούς α , β , γ ισχύει ότι

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = \left|\frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-1}\right| = \rho > 0$$

να αποδειχθεί ότι $\rho = 1$ ή ότι δύο τουλάχιστον από τους α , β , γ είναι αντίθετοι.

***ΛΥΣΗ***

Έχουμε $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = \rho^2$ και $\left|\frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-1}\right|^2 = \rho^2 \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-1}\cdot\frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma}-\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\beta}\bar{\gamma}+\bar{\gamma}\bar{\alpha}-1} = \rho^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\left(\rho^4-1\right)\left(2\rho^2+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}+\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}\right)=0$ άρα είναι **ρ=1** ή

$\left(2\rho^2+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}+\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}+\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}+\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta}=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\left(\bar{\beta}+\bar{\gamma}\right)+\bar{\alpha}(\beta+\gamma)=0$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{\rho^2}{\beta}+\frac{\rho^2}{\gamma}\right)+\frac{\rho^2}{\alpha}(\beta+\gamma)=0 \Leftrightarrow \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}=0$

$\Leftrightarrow (\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma\right)=0 \Leftrightarrow (\beta+\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ **α=-β ή β=-γ ή γ=-α .**

Αθ. Μπελληγιάννης