ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΔΙΑΜΕΣΟΥΣ

Καταρχάς, αποδεικνύουμε την **14.** Λόγω της γνωστής σχέσης

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

η προς απόδειξη ανισότητα γράφεται

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2,$$

η οποία είναι γνωστό ότι ισχύει.

Πηγαίνουμε τώρα στην

2. $m_a + m_b + m_c \leq 4R + r.$

Απόδειξη:
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

•Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, το περίκεντρο O του τριγώνου, είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου. Ας ονομάσουμε K, L, M τα μέσα των πλευρών BC, CA, AB αντίστοιχα. Από την ανισότητα του τριγώνου, έχουμε τότε τις σχέσεις

$$AK \leq AO + OK$$
$$BL \leq BO + OL$$
$$CM \leq CO + OM.$$

Με πρόσθεση αυτών και επειδή $OA = OB = OC = R$, και $OK + OL + OM = R + r$ (Θεώρημα Carnot), προκύπτει η ζητούμενη.

• Ας είναι τώρα το τρίγωνο μη οξυγώνιο. Θεωρούμε τον κύκλο με διάμετρο BC (και άρα με ακτίνα $\frac{a}{2}$). Είναι προφανές τότε, ότι το A βρίσκεται στο εσωτερικό του παραπάνω κύκλου. Επομένως, ισχύει $m_a < R < \frac{a}{2}$. Αυτή, σε συνδυασμό με τις γνωστές ανισότητες (οι οποίες ισχύουν σε τυχόν τρίγωνο)

$$m_b < \frac{a+c}{2}, \quad m_c < \frac{a+b}{2},$$

δίνει

$$m_a + m_b + m_c < \frac{a}{2} + \frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2} = a + s \leq 2R + 2R + r = 4R + r,$$

αφού ως γνωστόν, σε κάθε μη οξυγώνιο τρίγωνο ισχύει $s \leq 2R + r$, και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Από την ανισότητα Euler $R \geq 2r$, και την **2.**, λαμβάνουμε την
1. $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$.

Ακόμα, από την **1.** και την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ, έχουμε

$$\frac{9R}{2} \geq m_a + m_b + m_c \geq 3\sqrt[3]{m_a m_b m_c},$$

από όπου προκύπτει η **5.**

Η **3.** προκύπτει με πρόσθεση των

$$4Rm_a \geq b^2 + c^2, \quad 4Rm_b \geq c^2 + a^2, \quad 4Rm_c \geq a^2 + a^2.$$

Αποδεικνύουμε την πρώτη: Για την ανισότητα αυτή υπάρχουν πολλές διαφορετικές αποδείξεις. Η συντομότερη όμως είναι αυτή που κάνει χρήση της έννοιας της συμμετροδιαμέσου από την κορυφή A, το μήκος k_a της οποίας, αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση

$$k_a = \frac{2bc}{b^2 + c^2} m_a.$$

Επειδή προφανώς είναι $k_a \geq h_a$, λαμβάνουμε τη ζητούμενη.

Αποδεικνύουμε τώρα την

11. $m_a m_b m_c \geq r(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$.

Απόδειξη:

Είναι γνωστό ότι ισχύει $2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2$. Με εφαρμογή του μετασχηματισμού της διαμέσου, προκύπτει η ζητούμενη.

Ας παρατηρηθεί ότι η **26.** είναι η **11.** γραμμένη διαφορετικά.

Επίσης, οι **11,14.** αποδεικνύουν τις **12,15.**(πρόκειται για την ίδια ανισότητα, αφού ισχύει $\prod \cos \frac{A}{2} = \frac{s}{4R}$).

Η **13.** προκύπτει με πρόσθεση των γνωστών ανισοτήτων

$$m_a \geq \sqrt{s(s-a)}, \quad m_b \geq \sqrt{s(s-b)}, \quad m_c \geq \sqrt{s(s-c)}.$$

Η **16.** προκύπτει από τις γνωστές ανισότητες

$$4Rm_a \geq b^2 + c^2, \quad 4Rm_b \geq c^2 + a^2, \quad 4Rm_c \geq a^2 + a^2.$$

Η **4.** προκύπτει από τις ανισότητες

$$am_a \leq sR, \quad bm_b \leq sR, \quad cm_c \leq sR.$$

Πράγματι, από αυτές έχουμε

$$\frac{1}{m_a} \geq \frac{a}{sR}, \quad \frac{1}{m_b} \geq \frac{b}{sR}, \quad \frac{1}{m_c} \geq \frac{c}{sR}.$$

Με πρόσθεση αυτών, προκύπτει η ζητούμενη.

Η **6.** προκύπτει από την **4.**, με εφαρμογή της ανισότητας των δυνάμεων, για $a \geq 1$.

Αποδεικνύουμε τώρα, την **8.**
Είναι γνωστό ότι, αν ABC τρίγωνο και M σημείο του επιπέδου του τριγώνου,τότε ισχύει

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3}.$$

Στη σχέση αυτή θέτουμε

$$M \equiv G$$

(το βαρύκεντρο του τριγώνου) και επειδή ισχύει

$$GA = \frac{2}{3}m_a, \;\; GB = \frac{2}{3}m_b, \;\; GC = \frac{2}{3}m_c,$$

προκύπτει η **8.**

Αν στην **8.** εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό της διαμέσου λαμβάνουμε την **7.**

Από τις **7,8.** με χρήση της ανισότητας των δυνάμεων για $n \geq 1$ προκύπτουν οι **9,10.**

Είναι γνωστό, ότι αν ABC τρίγωνο και M σημείο στο επίπεδό του, τότε

$$\frac{MA \cdot MB}{ab} + \frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} |geq 1.$$

Σε αυτήν θέτουμε $M \equiv G$ και προκύπτει η **25.**, στην οποία αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό της διαμέσου λαμβάνουμε την **17.**

Αποδεικνύουμε την **23.**

Λόγω της ταυτότητας του Bager

$$am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 = \frac{s}{2}(s^2 + 2Rr + 5r^2),$$

η προς απόδειξη ανισότητα, ανάγεται στην γνωστή $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$.

Από την **23.** μέσω του μετασχηματισμού της διαμέσου, προκύπτει η **18.**

Αποδεικνύουμε την **21.** Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την **15.** έχουμε

$$\sum \frac{1}{s-a} \geq \frac{9}{s} \geq \frac{9E}{m_a m_b m_c}.$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό της διαμέσου προκύπτει η ζητούμενη. Με εφαρμογή της ανισότητας των δυνάμεων για $n \geq 1$ και της **21.**προκύπτει η **22.**

Για την **24.** υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a \geq b \geq c$. Τότε είναι εύκολο να δούμε ότι οι τριάδες

$$\{(b+c), (c+a), (a+b)\}, \{m_a, m_b, m_c\}$$

είναι ομοιότροπα διατεταγμένες, ενώ οι

$$\{m_a, m_b, m_c\}, \{a, b, c\}$$

είναι αντίθετα διατεταγμένες. Επομένως, από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε

$$\sum (b+c)m_a \geq \frac{4s}{3} \sum m_a = 2\frac{a+b+c}{3} \sum m_a \geq 2 \sum am_a.$$

Για την **27.**, με εφαρμογή του 1ου θεωρήματος του Πτολεμαίου στο τετράπλευρο $ABDE$ (AD, BE διάμεσοι), λαμβάνουμε

$$m_a m_b \leq \frac{ab}{4} + \frac{c^2}{4}.$$

Με ανάλογο τρόπο προκύπτουν και οι

$$m_b m_c \leq \frac{bc}{4} + \frac{a^2}{2}, \quad m_c m_a \leq \frac{ca}{4} + \frac{b^2}{2}.$$

Με πρόσθεση των παραπάνω σχέσεων προκύπτει η ζητούμενη.

Η **29.** προκύπτει από την **27.** με χρήση της γνωστής ανισότητας

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

και από αυτήν προκύπτει η **30.** μέσω του μετασχηματισμού της διαμέσου.

Για την **31.** ας είναι AD, BE, CZ οι διάμεσοι του τριγώνου και G το βαρύκεντρο. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Πτολεμαίου στα τετράπλευρα $AZGE, BZGD, CDGE$ λαμβάνουμε αντίστοιχα

$$bm_c + cm_b \geq 2am_a, \quad cm_a + am_c \geq 2bm_b, \quad am_b + bm_a \geq 2cm_c.$$

Πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις αυτές επί a, b, c αντίστοιχα, τις σχέσεις που προκύπτουν τις προσθέτουμε και προκύπτει η ζητούμενη.

Πάμε στην **32.** Αποδεικνύουμε πρώτα την αριστερή. Από την **25.** έχουμε

$$\frac{m_a m_b}{ab} + \frac{m_b m_c}{bc} + \frac{m_c m_a}{ca} \geq \frac{9}{4},$$

ενώ από την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ έχουμε

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq 3.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες προκύπτει η ζητούμενη.

Για την δεξιά, χρησιμοποιούμε τις ανισότητες που αποδείξαμε στην **27.**

$$m_a m_b \leq \frac{ab}{4}+\frac{c^2}{4}, \quad m_b m_c \leq \frac{bc}{4}+\frac{a^2}{2}, \quad m_c m_a \leq \frac{ca}{4}+\frac{b^2}{2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτές με c, a, b αντίστοιχα, τις ανισότητες που προκύπτουν τις προσθέτουμε και προκύπτει η ζητούμενη.

Για να αποδείξουμε την **34.**, αντικαθιστούμε τις διαμέσους m_a, m_b, m_c και το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει των πλευρών και αναγόμαστε στην

$$\sum a^2(2b^2+2c^2-a^2) \geq \sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4}.$$

Θέτουμε

$$x=a^2, y=b^2, z=c^2$$

και έχουμε να αποδείξουμε πλέον ότι

$$\sum x(2y+2z-x) \geq \sqrt{3}(x+y+z)\sqrt{2(xy+yz+zx)-x^2-y^2-z^2},$$

η οποία είναι ομογενής και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x+y+z=1$.

Τότε, επειδή $2(xy+yz+zx)=1-(x^2+y^2+z^2)$ θέλουμε να αποδείξουμε ότι

$$\sum x(2-3x) \geq \sqrt{3-6(x^2+y^2+z^2)} \Leftrightarrow 2-3(x^2+y^2+z^2) \geq \sqrt{3-6(x^2+y^2+z^2)},$$

η οποία μετά τις πράξεις ανάγεται στην

$$(3(x^2+y^2+z^2)-1)^2 \geq 0.$$

Για να αποδείξουμε την **35.**, χρησιμοποιούμε τις γνωστές ανισότητες

$$m_a^2 \geq s(s-a), \quad m_b^2 \geq s(s-b), \quad m_c^2 \geq s(s-c),$$

οπότε είναι

$$\sum am_a^2 \geq \sum as(s-a) = s\sum(as-a^2) = s\Big(2s^2-(a^2+b^2+c^2)\Big) = s(2s^2-2s^2+2r^2+8Rr) =$$

$$= 2sr(4R+r) \geq \sqrt{3}E(a+b+c),$$

αφού είναι γνωστό ότι ισχύει $4R+r \geq \sqrt{3}s$.

Η **37.** προκύπτει άμεσα από τις

$$4Rm_a \geq b^2+c^2, \quad 4Rm_b \geq c^2+a^2, \quad 4Rm_c \geq a^2+b^2,$$

με πολλαπλασιασμό επί a, b, c αντίστοιχα και μετά πρόσθεση κατά μέλη.

Για την **39.**: Γνωρίζουμε ότι για τυχόν σημείο P του επιπέδου, τριγώνου ABC, ισχύει

$$PA + PB + PC \geq 6r.$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα για $P \equiv G$ και επειδή $GA = \frac{2}{3}m_a$, προκύπτει η ζητούμενη.

Η **38.** προκύπτει από την

$$E \leq \frac{3}{4}\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

(αυτή είναι ισοδύναμη με την $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$) μέσω του μετασχηματισμού της διαμέσου.

Η **40.**: Έχουμε με χρήση της ταυτότητας $\sum am_a^2 = \frac{s}{2}(s^2+2Rr+5r^2)$,

$$\sum \frac{m_a^2}{h_a} = \sum \frac{am_a^2}{2E} = \frac{1}{4r}(s^2+2Rr+5r^2).$$

Αρκεί τώρα να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{4r}(s^2+2Rr+5r^2)\geq\frac{9}{2}R\Leftrightarrow s^2\geq 16Rr-5r^2,$$

η οποία, ως γνωστόν, ισχύει.

Η **45.**: Γράφοντας τις εκφράσεις των διαμέσων συναρτήσει των πλευρών, έχουμε να αποδείξουμε ότι

$$\sum a\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\leq 3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

η οποία γράφεται ως

$$\sum\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2-a^4}\leq 3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

Λόγω της ανισότητας $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{3(x+y+z)}$, είναι

$$\sum\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2-a^4}\leq\sqrt{3(4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2-a^4-b^4-c^4)}$$

και προκύπτει η ζητούμενη, αφού ισχύει προφανώς

$$a^4+b^4+c^4\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Για την απόδειξη της **44.** θα χρησιμοποιήσουμε την ανίσοτητα

$$m_a\leq\frac{3}{4}\frac{b^2+c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Αυτή είναι απλό να αποδειχθεί. Είναι τότε

$$\sum m_a\leq\frac{3}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

οπότε αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$9abc(a^2+b^2+c^2)\leq(a+b+c)^2(a^3+b^3+c^3).$$

Ισχύει όμως,

$$a^3+b^3+c^3\geq\frac{a+b+c}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

οπότε αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc,$$

η οποία είναι η ανισότητα ΑΜ-ΓΜ.