Π.Σ.Π.Θ. ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, 30 ΜΑΡΤΙΟΥ 2011.

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\dfrac{\ln x}{x}$**, με x > 0.**

1. Να μελετηθεί η μονοτονία της f.
2. Αν $x \in [1, e]$, να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός $z = x + i \cdot f(x)$ με το μέγιστο μέτρο.
3. Αν $x \in [1, e]$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός $z = x + i \cdot f(x)$ με μέτρο 2.
4. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.
5. Να αποδειχθεί η ανισοτική σχέση $\pi > 2 \cdot \ln\pi$.
6. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτηση fof.
7. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)e^{xf(x)} = \ln x$.
8. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\left(f(x)\right)^2 = 2$.
9. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_o > 0$ με $x_o \neq \frac{e+1}{2}$: $f(x_o) = f\left(\frac{e+1}{2}\right)$.
10. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_o > 0$ τέτοιος ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$ να την τέμνει στο σημείο $\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.
11. Αν $g(x) = x^2 \int_1^x f(t)dt$, να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει $x_o > 0$, τέτοιο ώστε $x_o\left(g'(x_o) + 1\right) = g(x_o) + x_o^2 f(x_o)$.
12. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)+1}{e^x}$.

Ο σκοπός αυτού του διαγωνίσματος ήταν να ελέγξει με 12 ερωτήματα τον μέγιστο αριθμό εννοιών που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ’ Λυκείου. Για το λόγο αυτό περιείχε και μιγαδικούς αριθμούς, υπολογισμό ορίων, συνέχεια και σύνθεση συναρτήσεων, μονοτονία, ακρότατα, σύνολο τιμών, απόδειξη ανισοτικών σχέσεων, σημεία καμπής, εύρεση πλήθους ριζών εξισώσεων, ολοκληρωτικές συναρτήσεις, κλπ. Πρόκειται για αρκετά δύσκολο τύπο διαγωνίσματος, απευθύνεται στους μαθητές του τμήματος Θετικής Κατεύθυνσης, οι οποίοι είναι πολύ καλά προετοιμασμένοι για θέματα «παντός καιρού». Να σημειωθεί ότι στα ερωτήματα δεν αντιστοιχούν συγκεκριμένες μονάδες βαρύτητας, χωρίς αυτό βέβαια να σημαίνει ότι έχουν όλα τον ίδιο βαθμό δυσκολίας.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

Ερώτημα 1^o: Η παράγωγος συνάρτηση της f είναι η $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Άρα, για 0 < x < e έχουμε f ΄(x) > 0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Αντίστοιχα, για x > e έχουμε ότι f ΄(x) < 0, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ερώτημα 2^o: Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z ισούται με:

$|z|=\sqrt{x^2+\dfrac{(\ln x)^2}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{x^4+(\ln x)^2}}{x}$, με x > 0. Έχουμε το δεδομένο ότι $1\le x\le e$, από εδώ προκύπτουν οι ανισοτικές σχέσεις (μετά από σχετικές πράξεις) $1\le\sqrt{x^4+(\ln x)^2}\le\sqrt{e^4+1}$ (1) και $\dfrac{1}{e}\le\dfrac{1}{x}\le 1$, (2). Με πολλαπλασιασμό των (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι $\dfrac{1}{e}\le\dfrac{\sqrt{x^4+(\ln x)^2}}{x}\le\sqrt{e^4+1}$.

Άρα η μέγιστη τιμή του μέτρου z θα είναι μικρότερη ή ίση από τον αριθμό $\sqrt{e^4+1}$, αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει τέτοιος z που να έχει αυτό το μέτρο.

Όμως, αποδεικνύεται ότι ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο δεν είναι αυτός για τον οποίο θα έχουμε $\sqrt{e^4+1}$, αλλά ο μιγαδικός z = e + if(e), ο οποίος έχει μέτρο $\dfrac{\sqrt{e^4+1}}{e}$. Αυτό συμβαίνει επειδή η συνάρτηση g(x) = $\dfrac{\sqrt{x^4+(\ln x)^2}}{x}$ στο διάστημα [1, e] είναι γνησίως αύξουσα. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού απαιτεί αρκετές και χρονοβόρες πράξεις.

Επίσης, ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε ότι η παράσταση $\frac{\sqrt{x^4+(\ln x)^2}}{x}$ δεν παίρνει την τιμή $\sqrt{e^4+1}$ για καμία τιμή του διαστήματος [1, e] είναι να αξιοποιήσουμε την γνωστή ανισοτική σχέση lnx < x- 1 για x > 1. Έτσι, έχουμε $(\ln x)^2 < (x-1)^2 < x^2$. Άρα $x^4 + (\ln x)^2 < x^4 + x^2$.

Άρα, $\frac{\sqrt{x^4+(\ln x)^2}}{x} < \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{e^2+1} < \sqrt{e^4+1}$ για x ≤ e.

Ερώτημα 3^o: Το ερώτημα αυτό είναι πολύ απλούστερο από το προηγούμενο. Έχουμε υπολογίσει το μέτρο του μιγαδικού z, το οποίο ισούται με $|z| = \frac{\sqrt{x^4+(\ln x)^2}}{x}$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η εξίσωση $\frac{\sqrt{x^4+(\ln x)^2}}{x} = 2$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα [1, e]. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση g(x) = $\sqrt{x^4+(\ln x)^2} - 2x$, με x να ανήκει στο διάστημα [1, e]. Αυτή είναι συνεχής στο [1, e] και ισχύει g(1) = -1 < 0, g(e) = $\sqrt{e^4+1} - 2e$ > 0. Η δεύτερη ανισότητα απαιτεί κάποιες αλγεβρικές πράξεις και ότι $e^2 - 4 > 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Bolzano για τη συνάρτηση g προκύπτει ότι αυτή έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [1, e]. Βεβαίως, η συνάρτηση g στο διάστημα [1, e] είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς έχει μία μοναδική ρίζα, δηλαδή υπάρχει μόνο ένας μιγαδικός αριθμός με τη ζητούμενη ιδιότητα, αλλά αυτό δεν ήταν απαραίτητο να απαντηθεί.

Ερώτημα 4^o: Είναι γνωστό ότι το σημείο καμπής μιας συνάρτησης προκύπτει από τη μελέτη της δεύτερης παραγώγου. Για την f έχουμε f΄΄(x) = $\frac{2\ln x - 3}{x^3}$, με x > 0. Πράγματι, η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, αφού η εξίσωση 2lnx – 3 = 0, έχει μία μοναδική ρίζα την x = $e^{\frac{3}{2}}$ > 0 και εκατέρωθεν αυτής η f΄΄ αλλάζει πρόσημο και στο σημείο αυτό ορίζεται η f΄.

Ερώτημα 5^o: Το ερώτημα αυτό σχετίζεται άμεσα με τη μονοτονία της συνάρτησης f. Γνωρίζουμε ότι e < π και ότι η συνάρτησή μας είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [e, π]. Άρα, f(π) < f(e), συνεπώς $\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e} \Rightarrow \frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{1}{e} \Rightarrow e\ln\pi < \pi$. Όμως, 2 < e. Άρα, 2lnπ < elnπ, από εδώ προκύπτει ότι 2lnπ < π.

Η ανισότητα αυτή παρ’ ότι είναι ασθενέστερη από την $e\ln\pi < \pi$, έκρυβε την «καταγωγή» της, κάτι που μπορεί να μας φέρει σε μία προσωρινή αμηχανία ειδικά όταν βρισκόμαστε σε πίεση χρόνου.

Ερώτημα 6^o: Πρόκειται για ένα απλό ερώτημα, το οποίο είχε σκοπό να ελέγξει κυρίως τον ορισμό της σύνθεσης δύο συναρτήσεων και τις βασικές ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης. Επειδή έχουμε f(x) = $\frac{\ln x}{x}$, ο τύπος της σύνθεσης fof είναι ο fof(x) = $\frac{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\frac{\ln x}{x}}$. Για έχει νόημα η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι παρακάτω προϋποθέσεις:
x > 0 και lnx > 0, τελικά πρέπει x > 1. Άρα, το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι το διάστημα $(1,+\infty)$.

Ερώτημα 7^o: Παρ’ ότι η εξίσωση αυτή με πρώτη ματιά φαίνεται περίπλοκη, ουσιαστικά η απάντηση είναι πολύ απλή. Αντικαθιστούμε στη θέση του f(x) τον δεδομένο τύπο με την προϋπόθεση x > 0 και παίρνουμε την εξίσωση: $\frac{\ln x}{x}e^{\ln x} = \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\cdot x = \ln x \Leftrightarrow \ln x = \ln x$, εξίσωση που ισχύει για κάθε x > 0.

Ερώτημα 8^o: Η ζητούμενη εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις $\frac{\ln x}{x} = \sqrt{2}$ ή $\frac{\ln x}{x} = -\sqrt{2}$. Για να επιλύσουμε τις εξισώσεις αυτές σύντομα αρκεί να αξιοποιήσουμε το ερώτημα 1^o. Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι η f(e) =1/e. Συνεπώς, η εξίσωση $\frac{\ln x}{x} = \sqrt{2}$ δεν έχει λύση, αφού 1/e < $\sqrt{2}$.
Η δεύτερη εξίσωση η $\frac{\ln x}{x} = -\sqrt{2}$ έχει μόνο μία λύση αφού η συνάρτηση f στο διάστημα (0, 1) παίρνει αρνητικές τιμές και είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή η τιμή $\sqrt{2}$ ανήκει στις τιμές που μπορεί να πάρει η f(x), σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών για τις συνεχείς συναρτήσεις, η εξίσωσή μας έχει μία μοναδική λύση, η οποία είναι και η λύση της εξίσωση $(f(x))^2 = 2$.
Άλλοι τρόποι για την επίλυση της ζητούμενης εξίσωσης βασίστηκαν στην κατασκευή της συνάρτησης $g(x) = (f(x))^2 - 2 = [f(x) - \sqrt{2}][f(x) + \sqrt{2}]$. Αυτή είναι συνεχής όπως και η f για κάθε x > 0 και με τη βοήθεια των δεδομένων

που έχουμε για τη συνάρτηση f αποδεικνύουμε πάλι ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης g(x) = 0 βρίσκεται στο διάστημα (0, 1).

Ερώτημα 9^{ο}: Η ύπαρξη αριθμού $x_o > 0$ με $x_o \neq \frac{e+1}{2}$: $f(x_o) = f\left(\frac{e+1}{2}\right)$ με μια πρώτη ματιά παραπέμπει στην κατασκευή συνάρτηση και στη χρήση του θεωρήματος του Bolzano. Η ιδέα κατασκευής του ερωτήματος αυτού είναι πολύ απλή και βασίστηκε στα χαρακτηριστικά της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Στο διάστημα [1, e] η f είναι γνησίως αύξουσα και μετά το e γίνεται γνησίως φθίνουσα. Ο αριθμός $\frac{e+1}{2}$ βρίσκεται στο διάστημα [1, e] και συγκεκριμένα είναι το μέσο του διαστήματος, άρα είναι σίγουρο ότι υπάρχει ένας «αντίστοιχος» αριθμός μεγαλύτερος του e, ώστε να ισχύει η ζητούμενη ιδιότητα. Είναι ένα θέμα που δοκιμάζει την επινοητικότητα και την τεχνική κατάρτιση των εξεταζομένων.

Οι περισσότεροι μαθητές στην περίπτωση αυτή επιλέγουν την τεχνική της εύρεσης του συνόλου τιμών της f στο διάστημα [e, $+\infty$) με δεδομένο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Με υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ = 0 με τη βοήθεια του κανόνα l' Hospital, προκύπτει ότι το σύνολο τιμών είναι το διάστημα (0, 1/e). Επειδή ο αριθμός $\frac{e+1}{2}$ ανήκει στο διάστημα αυτό, η συνάρτηση μας είναι συνεχής, συνεπώς ισχύει το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, άρα υπάρχει κάποιος αριθμός $x_o > e$ για το οποίο ισχύει η ζητούμενη ιδιότητα.

Μία άλλη τεχνική είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση g(x) = f(x) – f($\frac{e+1}{2}$), η οποία είναι συνεχής για κάθε x > e, (επειδή αυτό το διάστημα μας ενδιαφέρει). Όμως, g(e) > 0, αφού η τιμή f(e) είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Αυτή η παρατήρηση είναι πολύ χρήσιμη επειδή έτσι αποφεύγουμε τους υπολογισμούς. Μένει να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αριθμός $x_o > e$, τέτοιος ώστε g (x_o) < 0, για να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano. Πράγματι, θεωρώντας μια αρκετά «μεγάλη» τιμή του x_o την e^{10}, θα αποδείξουμε ότι $g(e^{10}) < 0$.

Ισχύει, $g(e^{10}) = f(x^{10}) - f(\frac{e+1}{2}) = \frac{\ln e^{10}}{e^{10}} - \frac{\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}{\frac{e+1}{2}} = \frac{10}{e^{10}} - \frac{\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}{\frac{e+1}{2}} =$

$$=\frac{5(e+1)-e^{10}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}{\frac{e^{10}(e+1)}{2}}$$, αρκεί να ισχύει $5(e+1)-e^{10}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)<0$.

Όμως, $\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)>\ln\sqrt{e}\Leftrightarrow \frac{e+1}{2}>\sqrt{e}\Leftrightarrow e+1>2\sqrt{e}\Leftrightarrow (\sqrt{e}-1)^2>0$.

Αυτό σημαίνει ότι $e^{10}\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)>\frac{e^{10}}{2}=\frac{e^9\cdot e}{2}>e^9$. Προφανώς ο αριθμός 5(e+1) < e^9, αφού 5(e+1) < 5(3+1) = 20. Αυτό σημαίνει ότι g (e^{10}) < 0.

Ερώτημα 10^o: Τα πρώτα βήματα για την απάντηση στο θέμα είναι απλά. Η εφαπτομένη στο ζητούμενο σημείο (x_o, f(x_o)) πρέπει να ικανοποιεί την σχέση y – f(x_o) = f'(x_o)(x- x_o), θέτουμε για x = 3/2 και έχουμε:
f(3/2) – f(x_o) = f'(x_o) (3/2 – x_o).

Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση $f'(x)\left(\frac{3}{2}-x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)+f(x)=0$ πρέπει να έχει και μία δεύτερη ρίζα εκτός από την 3/2. Για να το αποδείξουμε αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση

g(x) = $f'(x)\left(\frac{3}{2}-x\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)+f(x)$ με x > 0.

Από το σημείο αυτό και μετά έχουμε αρκετή δουλειά για να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.
Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$g''(x)=f''(x)\left(\frac{3}{2}-x\right)=\frac{(2\ln x-3)\left(\frac{3}{2}-x\right)}{x^3}=\frac{(2\ln x-3)(3-2x)}{2x^3}$$

Η παράγωγος συνάρτηση έχει δύο ρίζες την 3/2 και την $e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}$.
Με την κατασκευή του πίνακα προσήμων της g΄ βρίσκουμε τα διαστήματα μονοτονίας της g. Έχουμε μετά από επίπονες πράξεις και υπολογισμούς ότι g($e^{\frac{3}{2}}$) > 0 και ότι $\lim_{x\to\infty} g(x)<$ 0. Το όριο αυτό το οποίο ισούται με $-\frac{2}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ υπολογίζεται με τη χρήση του κανόνα L' Hospital. Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα ($e^{\frac{3}{2}}$, $+\infty$) σημαίνει ότι έχει ρίζα στο διάστημα αυτό, η οποία είναι διαφορετική από την 3/2. Αυτό σημαίνει ότι η απάντηση στο αρχικό μας ερώτημα είναι θετική.

Ερώτημα 11^{ο}: Με το ερώτημα αυτό ζητάμε να απαλειφθεί η ολοκληρωτική εξίσωση που δίνεται και να μετατραπεί το πρόβλημα σε πρόβλημα μη ύπαρξης σημείου του πεδίου ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί τη δεδομένη συνθήκη. Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ολοκληρωτική συνάρτηση $g(x)=x^2\int_1^x f(t)dt$ μπορεί να πάρει απλούστερη μορφή. Δηλαδή δεν είναι όπως οι περισσότερες συναρτήσεις που δεν μπορούμε να τις γράψουμε με απλούστερο τύπο και το μόνο που μας μένει είναι να υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση. Επειδή λοιπόν $\int_1^x f(t)dt=\frac{(\ln x)^2}{2}$, ο υπολογισμός αυτός πραγματοποιείται με αλλαγή της μεταβλητής lnx = u, έχουμε ότι g(x) = $\frac{(x\ln x)^2}{2}$ και ότι g΄(x) = x·lnx·(lnx + 1).

Αυτό σημαίνει ότι η ζητούμενη σχέση γράφεται:

$x^2\ln x(\ln x+1)+x=\frac{(x\ln x)^2}{2}+x\ln x$ ή $2x^2\ln x(\ln x+1)+x2=(x\ln x)^2+2x\ln x$.

Με αλγεβρικές απλοποιήσεις καταλήγουμε στην ισότητα:

$x^2(\ln x)^2+2x^2\ln x+2x-2x\ln x=0$. Η τελευταία όμως ισότητα δεν ισχύει για κάποιο θετικό αριθμό. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού γίνεται ως εξής.

Η ισότητα γράφεται ως $x^2(\ln x)^2+2x(x-1)\ln x+2x=0$.

Όμως, για κάθε x > 1 το αριστερό μέλος είναι θετικός αριθμός.

Για κάθε x με 0 < x < 1 το αριστερό μέλος είναι πάλι θετικός αριθμός, αφού ισχύει lnx < 0 και x – 1 < 0.

Προφανώς, τέτοιου είδους θέμα είναι εκτός πνεύματος των Πανελλαδικών εξετάσεων, αφού απαιτούν αρκετές αλγεβρικές πράξεις και «ασυμβατότητες», δηλαδή διαφοροποιούνται από τα συνηθισμένα θέματα.

Ερώτημα 12^{ο}: Το ερώτημα αυτό είναι σχετικά απλό, αλλά κρύβει μία «παγίδα». Επειδή ορισμένα ερωτήματα πριν από αυτό είναι πολύ δυσκολότερα, ορισμένοι μαθητές μπορεί να απογοητευθούν και να χάσουν μονάδες, αφού δεν θα μπουν καν στο κόπο να ασχοληθούν μαζί του, παρ’ ότι είναι σίγουρα εντός του πλαισίου των δυνατοτήτων τους. Το ίδιο έχει συμβεί και σε θέματα Πανελλαδικών εξετάσεων και όχι μόνο στα Μαθηματικά. Συνεπώς, αποτελεί ένα καλό παράδειγμα, για το πώς πρέπει να ενεργούμε κατά τη διάρκεια των εξετάσεων κάθε είδους στις οποίες ο σκοπός είναι η συγκέντρωση όσων γίνεται περισσότερων μονάδων. Το ζητούμενο όριο γράφεται $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}+1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x+x}{xe^x}$

Πρόκειται για όριο της μορφή άπειρο προς άπειρο, το οποίο με εφαρμογή του κανόνα L΄ Hospital και τις απαραίτητες διευκρινήσεις για την ισχύ του κανόνα, γράφεται ως $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{e^x(x+1)}=0$, επειδή το όριο του αριθμητή είναι το 1, ενώ του παρονομαστή είναι το (συν) άπειρον.

Τελικές παρατηρήσεις:

Τα ερωτήματα 1, 4, 6, 7 και 12 είναι απολύτως συμβατά με τα θέματα ή τις ερωτήσεις που δίνονται συνήθως στις Πανελλαδικές εξετάσεις.

Τα ερωτήματα 3, 5, 8, 9 είναι και αυτά συμβατά με το πνεύμα των εξετάσεων, αλλά έχουν αυξημένο βαθμό δυσκολίας.

Το θέμα 2, επειδή στερείται τις γνωστές κλιμακούμενες ερωτήσεις, κρύβει «παγίδες» στις οποίες μπορεί να «πέσει» και ένας καλά προετοιμασμένος μαθητής.

Τέλος, τα θέματα 10 και 11 είναι δύσκολα και απαιτούν αυξημένη προσοχή και ικανότητα για το χειρισμό τους.