

ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (II)

Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$|- \alpha + \beta + \gamma + \delta| + |\alpha - \beta + \gamma + \delta| + |\alpha + \beta - \gamma + \delta| + |\alpha + \beta + \gamma - \delta| < 4$ **αν και μόνο αν**
($|\alpha| < 1, |\beta| < 1, |\gamma| < 1, |\delta| < 1, |\alpha + \beta + \gamma + \delta| < 2, |\alpha + \beta - \gamma - \delta| < 2,$
 $|\alpha - \beta + \gamma - \delta| < 2$ και $|\alpha - \beta - \gamma + \delta| < 2$).

ΛΥΣΗ

Θέτω $x = -\alpha + \beta + \gamma + \delta$, $\lambda = \alpha - \beta + \gamma + \delta$, $\mu = \alpha + \beta - \gamma + \delta$, $\nu = \alpha + \beta + \gamma - \delta$.

Οπότε είναι $4\alpha = -x + \lambda + \mu + \nu$, $4\beta = x - \lambda + \mu + \nu$, $4\gamma = x + \lambda - \mu + \nu$, $4\delta = x + \lambda + \mu - \nu$.

Η ισοδυναμία μετατρέπεται ως εξής : Δείξτε ότι $|x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4$, αν και μόνο αν ισχύει $|-x + \lambda + \mu + \nu| < 4$, $|x - \lambda + \mu + \nu| < 4$, $|x + \lambda - \mu + \nu| < 4$, $|x + \lambda + \mu - \nu| < 4$, $|x + \lambda + \mu + \nu| < 4$, $|-x - \lambda + \mu + \nu| < 4$, $|-x + \lambda - \mu + \nu| < 4$, $|-x + \lambda + \mu - \nu| < 4$.

✓ Αν ισχύει $|x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4$ έχουμε $|-x + \lambda + \mu + \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4$,

$$|x - \lambda + \mu + \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4 , \quad |x + \lambda - \mu + \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4 ,$$

$$|x + \lambda + \mu - \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4 , \quad |x + \lambda + \mu + \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4 ,$$

$$|-x - \lambda + \mu + \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4 , \quad |-x + \lambda - \mu + \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4$$

$$|-x + \lambda + \mu - \nu| \leq |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4 .$$

✓ Αν ισχύει $|-x + \lambda + \mu + \nu| < 4$, $|x - \lambda + \mu + \nu| < 4$, $|x + \lambda - \mu + \nu| < 4$, $|x + \lambda + \mu - \nu| < 4$,

$$|x + \lambda + \mu + \nu| < 4 , \quad |-x - \lambda + \mu + \nu| < 4 , \quad |-x + \lambda - \mu + \nu| < 4 , \quad |-x + \lambda + \mu - \nu| < 4$$
 τότε σε

μία από τις παραστάσεις $-x + \lambda + \mu + \nu$, $x - \lambda + \mu + \nu$, $x + \lambda - \mu + \nu$, $x + \lambda + \mu - \nu$,
 $x + \lambda + \mu + \nu$, $-x - \lambda + \mu + \nu$, $-x + \lambda - \mu + \nu$, $-x + \lambda + \mu - \nu$ οι όροι της είναι ομόσημοι ,

άρα μία από τις $|-x + \lambda + \mu + \nu|$, $|x - \lambda + \mu + \nu|$, $|x + \lambda - \mu + \nu|$, $|x + \lambda + \mu - \nu|$,

$$|x + \lambda + \mu + \nu| , \quad |-x - \lambda + \mu + \nu| , \quad |-x + \lambda - \mu + \nu| , \quad |-x + \lambda + \mu - \nu|$$
 ισούνται με

$$|x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| , \text{ δηλαδή ισχύει } |x| + |\lambda| + |\mu| + |\nu| < 4 .$$