

Θέμα Α

A1. Θεωρία (απόδειξη), σελίδα 260 σχολικού βιβλίου (Θεώρημα Fermat)

A2. Θεωρία (Ορισμός), σελίδα 280 σχολικού βιβλίου.

A3.

α)	Σωστό
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Λάθος
ε)	Σωστό

Θέμα Β

B1.

Παρατηρούμε ότι $|z - 3i| = |\overline{z - 3i}| = |\bar{z} + 3i|$

$$\text{Άρα. } |z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - (0 + 3i)| = 1$$

Επομένως, οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται σε κύκλο με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$

B2.

Είναι:

$$|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\overline{z - 3i}) = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1 \Leftrightarrow \bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

B3.

Έστω $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Επειδή $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$, έχουμε:

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2\alpha \in \mathbb{R}$$

Άρα $w = \bar{w} = 2\alpha + 0 \cdot i$.

Επειδή οι εικόνες του z κινούνται στον κύκλο $C: x^2 + (y-3)^2 = 1$ θα ισχύει

$$\alpha^2 + (\beta-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 - (\beta-3)^2 \leq 1$$

Δηλαδή, $\alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\alpha \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$.

B4.

$$\begin{aligned} |z-w| &= |z| \Leftrightarrow |z-w|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot w + w \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{\bar{w}=w}{\Leftrightarrow} w \cdot w - z \cdot w - \bar{z} \cdot w = 0 \Leftrightarrow w^2 - w \cdot (z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow w^2 - w \cdot 2\operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow w^2 - w \cdot w = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow w^2 - w^2 = 0 \text{ ισχύει.} \end{aligned}$$

Θέμα Γ

Γ1.

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$(e^x - 1)f'(x) + (e^x - x)f''(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\left((e^x - x)f'(x)\right)' = (e^x)' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$(e^x - x)f'(x) = e^x + c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=0 \text{ η προηγούμενη σχέση δίνει } (e^0 - 0)f'(0) = e^0 + c \stackrel{f'(0)=0}{\Leftrightarrow} c = -1$$

$$\text{Άρα } (e^x - x)f'(x) = e^x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Λόγω της γνωστής ανισότητας $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και θέτοντας όπου x το e^x προκύπτει $\ln e^x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επειδή $x + 1 > x$ θα ισχύει $e^x > x \Leftrightarrow e^x - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $e^x - x \neq 0$ και διαιρώντας με $e^x - x$ η σχέση (1) δίνει:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = (\ln(e^x - x))' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα υπάρχει σταθερά $c' \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x) = \ln(e^x - x) + c' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $f(0) = \ln(e^0 - 0) + c' \stackrel{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c' = 0$

Άρα $f(x) = \ln(e^x - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = \ln(e^0 - 0) = 0$

Γ3.

$$f''(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \dots = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0 \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^x - xe^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση (2) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $h(x) = 0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = e^x(1 - x)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\text{επειδή } e^x \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$		$-$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = 2 \cdot 0 - 0 - 1 = -1$$

$$h(1) = 2e^1 - 1 \cdot e^1 - 1 = e - 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[xe^x \left(2\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e^x} \right) \right] \stackrel{(+\infty) \cdot (+\infty) \cdot (2 \cdot 0 - 1 - 0)}{=} -\infty$$

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$

$h \nearrow \Delta_1$ και h συνεχής στο Δ_1 . Άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(1) \right] = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), e - 1 \right]$$

Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ και $h \nearrow \Delta_1$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in \Delta_1$

- Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$

$h \searrow \Delta_2$ και h συνεχής στο Δ_2 . Άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$h(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 1} h(x) \right) \stackrel{h \text{ συνεχής στο } 1}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(1) \right) = (-\infty, e - 1)$$

Επειδή $0 \in h(\Delta_2)$ και $h \searrow \Delta_2$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_2 \in \Delta_2$

Επομένως, τόσο η εξίσωση $h(x) = 0$, όσο και η ισοδύναμή της $f''(x) = 0$ έχουν ακριβώς δυο ρίζες $x_1 \in \Delta_1$ και $x_2 \in \Delta_2$.

$$f''(x) > 0 \stackrel{(e^x - x)^2 > 0}{\Leftrightarrow} 2e^x - xe^x - 1 > 0 \quad (3)$$

Επειδή $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, η ανίσωση (3) είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $h(x) > 0$.

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$
 Για $x < x_1 \Leftrightarrow h(x) < h(x_1) \Leftrightarrow h(x) < 0$
 Για $x > x_1 \Leftrightarrow h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0$
- Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$
 Για $x < x_2 \Leftrightarrow h(x) > h(x_2) \Leftrightarrow h(x) > 0$
 Για $x > x_2 \Leftrightarrow h(x) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x) < 0$

Επομένως οι πίνακες προσήμων τόσο της $h(x)$ όσο και της $f''(x)$ έχουν ως εξής:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$h(x)$		-	+	-

Άρα:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	-
$f(x)$		$\cap$	$\cup$	$\cap$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1, x_2 (δηλαδή έχει εφαπτομένη στα σημεία αυτά), θα έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής, τα $M_1(x_1, f(x_1))$ και $M_2(x_2, f(x_2))$.

Γ4.

Η εξίσωση γίνεται $\ln(e^x - x) = \sin x \Leftrightarrow f(x) = \sin x \Leftrightarrow f(x) - \sin x = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι $\varphi(0) = f(0) - \sin 0 = 0 - 1 = -1 < 0$ και

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Επειδή $\frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

Άρα και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά μεταξύ των συνεχών συναρτήσεων f και $\sin x$
- $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0$. Άρα, η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$\varphi'(x) = f'(x) + \eta \mu x \Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta \mu x$$

Επειδή για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\eta \mu x > 0$ και

$$\text{για } x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0$$

Έχουμε ότι $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $\varphi \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$, αυτή θα είναι και η μοναδική ρίζα.

Θέμα Δ

Για το ολοκλήρωμα-συνάρτηση $I(x) = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$ θέτουμε $x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$

Τότε, $dt = dx$ και

- Για $t=0$, $u=x$
- Για $t=-x$, $u=0$

Επομένως:

$$I(x) = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du = \int_x^0 \frac{e^{2u} \cdot e^{-2x}}{g(u)} du = -e^{-2x} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

$$\text{Άρα, } I(x) = -\frac{1}{e^{2x}} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$$

Ομοίως (με την ίδια αντικατάσταση), προκύπτει:

$$J(x) = -\frac{1}{e^{2x}} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$$

Δ1.

Έχουμε:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = -\frac{1}{e^{2x}} \cdot \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \quad (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επειδή οι συναρτήσεις $g(u)$ και e^{2u} είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ θα είναι

συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως η $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) = e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

$$\text{Ακόμα, για } x=0 \text{ η σχέση (1) δίνει } f(0) = 1 + \int_0^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du = 1 + 0 = 1. \quad (3)$$

Ομοίως, προκύπτουν:

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

$$g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot g'(x) = e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$g(0) = 1 \quad (6)$$

Λόγω των σχέσεων (2) και (5), προκύπτει:

$$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = (\ln g(x))' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αρά, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\ln f(x) = \ln g(x) + c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ η προηγούμενη σχέση δίνει: $\ln f(0) = \ln g(0) + c \Leftrightarrow \ln 1 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα, $\ln f(x) = \ln g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ισοδύναμα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ2.

$$(2) \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) = e^{2x} \stackrel{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} f(x) \cdot f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αρά, υπάρχει σταθερά $c' \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f^2(x) = e^{2x} + c' \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ η προηγούμενη σχέση δίνει: $f^2(0) = e^0 + c' \Leftrightarrow c' = 0$

Άρα, $f^2(x) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και διατηρεί πρόσημο, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f(x) = \sqrt{e^{2x}} = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δ3.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\frac{1}{e^x}}$$

Θέτουμε όπου $\frac{1}{x}$ το $-u$. Τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} u = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x}\right) = +\infty$

$$\text{Άρα } L = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{u}}{e^{-u}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-e^u}{u} \stackrel{\substack{-\infty \\ +\infty}}{\text{de l'Hospital}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-e^u}{1} = -\infty$$

Δ4.

Η $f(t^2) = e^{t^2}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x^2) = e^{x^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $F \nearrow \mathbb{R}$.

Ακόμα είναι $F(1) = \int_1^1 f(t^2) dt = 0$. Άρα:

- Για $x < 1 \stackrel{F \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} F(x) < F(1) \Leftrightarrow F(x) < 0$
- Για $x > 1 \stackrel{F \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} F(x) > F(1) \Leftrightarrow F(x) > 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$F(x)$	$-$		$+$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |F(x)| dx \stackrel{F(x) < 0}{=} - \int_0^1 F(x) dx = - \int_0^1 (x)' F(x) dx = - \left[xF(x) \right]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx = \\ &= -1 \cdot F(1) + 0 \cdot F(0) + \int_0^1 x e^{x^2} dx \stackrel{F(1)=0}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$

τετραγωνικές μονάδες.