

mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011**

**Λύσεις
των
Θεμάτων**



Έκδοση 2^η (15/05/2011, 16:05)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=46&t=15510>

Συνεργάστηκαν οι:

*Ανδρέας Βαρβεράκης, Φωτεινή Καλδή,
Σπύρος Καρδαμίτσης, Τάσος Κοτρώνης,
Βασίλης Μαυροφρύδης, Ροδόλφος Μπόρης,
Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Γιώργος Ρίζος,
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Κώστας Τηλέγραφος*

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 4

A3. Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6\bar{x}$.

Μονάδες 2

γ) Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Μονάδες 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A1-A3 Θεωρία

A4. α) Λ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

B1. Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$

Μονάδες 6

B2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί.

Μονάδες 6

B4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

Μονάδες 5

ΛΥΣΗ:

B1. Αφού $64 < N(\Omega) < 72$ διαιρώντας με $N(M)$ έχουμε $\frac{64}{N(M)} < 4 < \frac{72}{N(M)} \Rightarrow N(M) > 16$ και $N(M) < 18$

και αφού το $N(M)$ είναι φυσικός παίρνουμε τελικά $N(M) = 17$,

οπότε, αφού $P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} \Rightarrow N(\Omega) = 68$

B2. Ισχύει

$$N(A) + N(K) + N(M) = N(\Omega) \quad (1)$$

άρα διαιρώντας με $N(\Omega)$ παίρνουμε:

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(K)}{N(\Omega)} + \frac{N(M)}{N(\Omega)} = 1$$

απ' όπου:

$$P(A) + P(K) + P(M) = 1$$

άρα απ' τα δεδομένα έχουμε:

$$4\lambda^2 + \frac{1}{4} - 5\lambda + \frac{7}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{4}$$

Αν $\lambda = 1$ τότε $P(A) = 4$, άτοπο διότι $0 \leq P(A) \leq 1$. Άρα $\lambda = \frac{1}{4}$.

B3. Για $\lambda = \frac{1}{4}$ παίρνουμε $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(K) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(A) = P(A)N(\Omega) \Leftrightarrow N(A) = \frac{68}{4} \Leftrightarrow N(A) = 17$$

$$P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(M) = P(M)N(\Omega) \Leftrightarrow N(M) = \frac{68}{4} \Leftrightarrow N(M) = 17$$

$$P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(K) = P(K)N(\Omega) \Leftrightarrow N(K) = \frac{68}{2} \Leftrightarrow N(K) = 34$$

B4. Επειδή τα ενδεχόμενα να πάρουμε άσπρη ή μαύρη είναι ασυμβίβαστα άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

B1. Οι πιθανές τιμές για το $N(\Omega)$ είναι 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71. Το πλήθος των μαύρων σφαιρών είναι το $\frac{1}{4}$ του συνόλου.

Όμως κανένας από τους αριθμούς 65, 66, 67, 69, 70, 71 δε διαιρείται ακριβώς από το 4 συνεπώς $N(\Omega) = 68$.

B1. Αφού $P(M) = \frac{1}{4}$ άρα $\frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Rightarrow N(M) = \frac{N(\Omega)}{4}$. Αν το $N(\Omega)$ ήταν περιττός τότε το $N(M)$ δε θα ήταν ακέραιος.

Άρα $N(M) = 66$ ή 68 ή 70 . Όμως οι 68, 70 δε διαιρούνται από το 4 άρα $N(M) = 68$

B1. Επειδή $P(M) = \frac{N(M)}{N(\Omega)}$ δηλαδή $\frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$, είναι $N(\Omega) = 4N(M)$.

Άρα $64 < N(\Omega) < 72$ ή $64 < 4N(M) < 72$ ή $16 < N(M) < 18$ ή $N(M) = 17$ και έτσι $N(\Omega) = 4 \cdot 17 = 68$.

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

$A(8, 0)$ $B(10, 10)$ $\Gamma(12, 20)$ $\Delta(14, y_\Delta)$ $E(16, y_E)$ $Z(18, 10)$ $H(20, 0)$

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και E του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta EZH$.

Γ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και E , αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα

Μονάδες 7

Γ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

Μονάδες 3

Γ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Γ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Γ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΛΥΣΗ:

Γ₁ Αφού είναι y_{Δ} και y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε και είναι $\Delta E // x x'$ έχουμε ότι $y_{\Delta} = y_E = x$

$$\text{Επομένως } \bar{x} = \sum f_i x_i \Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14 \cdot \frac{x}{100} + 16 \cdot \frac{x}{100} + 18 \cdot 0,1 \Leftrightarrow x = 30$$

Γ₂ Έστω Α, Β, C, D, E, F τα άκρα των κλάσεων.

Επειδή οι κεντρικές τιμές διαφέρουν όσο και το πλάτος c των κλάσεων θα έχουμε:

$$c = x_2 - x_1 = 12 - 10 = 2$$

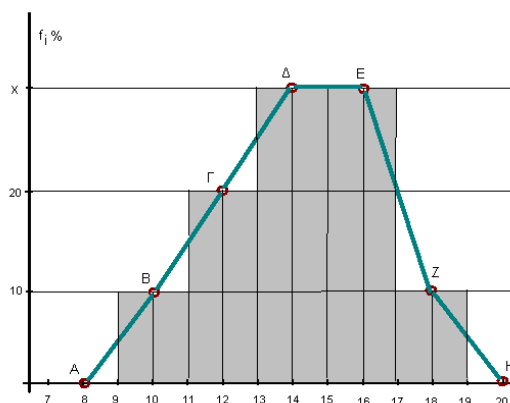
Για το άκρο Α θα ισχύει:

$$A = x_1 - \frac{c}{2} = 10 - 1 = 9$$

και επειδή το πλάτος των κλάσεων είναι 2 θα έχουμε:

$$B - A = 2 \Leftrightarrow B = 11$$

και ομοίως C = 13, D = 15, E = 17, F = 19



Γ₃ Έχουμε τον παρακάτω πίνακα

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$
9 – 11	10	10
11 – 13	12	20
13 – 15	14	30
15 – 17	16	30
17 – 19	18	10
ΣΥΝΟΛΑ		100

Γ₄ Το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν το εφάπαξ προσδιορίζεται από τις κλάσεις 15 -17 και 17- 19 και είναι $30\% + 10\% = 40\%$

Γ₅ Αφού το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος έχουμε ότι $n = 80$. Άρα ο αριθμός των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ είναι 40% του 80 (άθροισμα συχνοτήτων δύο τελευταίων κλάσεων) δηλαδή $\frac{40}{100} \cdot 80 = 32$ πωλητές

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

Γ1. Είναι $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100 \Leftrightarrow 10 + 20 + \alpha + \beta + 10 = 100 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 60$

Είναι

$$\sum x_i \cdot f_i = \bar{x} \Leftrightarrow 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,20 + 14 \cdot \frac{\alpha}{100} + 16 \cdot \frac{\beta}{100} + 18 \cdot 0,10 = 14,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2,4 + 0,14 \cdot \alpha + 0,16 \cdot \beta + 1,8 = 14,2 \Leftrightarrow 5,2 + 0,14 \cdot \alpha + 0,16 \cdot \beta = 14,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,14 \cdot \alpha + 0,16 \cdot \beta = 14,2 - 5,2 \Leftrightarrow 0,14 \cdot \alpha + 0,16 \cdot \beta = 9$$

Είναι $\alpha = 60 - \beta$.

$$\text{Άρα } 0,14 \cdot (60 - \beta) + 0,16 \cdot \beta = 9 \Leftrightarrow 8,4 - 0,14\beta + 0,16 \cdot \beta = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,02 \cdot \beta = 9 - 8,4 \Leftrightarrow 0,02\beta = 0,6 \Leftrightarrow \beta = \frac{0,6}{0,02} = 30, \text{ άρα } \alpha = 60 - 30 = 30$$

Γ1. Αφού το ΔΕ//στον οριζόντιο άξονα έχουμε $\gamma_E = \gamma_A = \alpha$.

Οι διαδοχικές κορυφές (τεταγμένες) μάς δίνουν τα ύψη των ορθογωνίων που είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες, άρα

$$10 + 20 + \alpha + \alpha + 10 = 100 \Leftrightarrow \alpha = 30$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}, x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = e^{\frac{1}{5}\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}, x \in \mathbb{R}$$

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$.

Μονάδες 3

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1, i = 1, 2, 3$ οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ:

Δ1. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \right)' = e^{\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{30}x + \frac{2}{15} \right)' = e^{\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} \right).$$

Είναι: $e^{\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



Το τριώνυμο $x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}$ έχει ρίζες $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{5}$ και το πρόσημό του δίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}$	+	-	+	

Οπότε το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της $f(x)$ δίνονται στον πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Τ.Μ.

Τ.Ε.

Η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ και στο $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ και γν. φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$.

Δ2. Αφού $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, οπότε είναι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{5}$

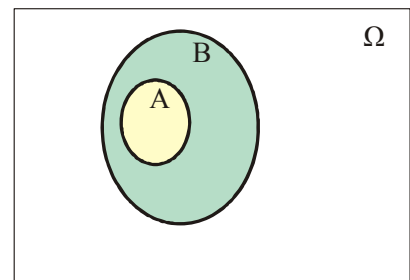
$$\text{Οπότε } P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Επειδή } A - B = A \cap B' = \emptyset \Rightarrow P(A - B) = 0$$

$$(\text{ή } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) = 0)$$

$$P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5},$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$



$$A \cap B = A, A \cup B = B, A - B = \emptyset$$

Δ3.

$$\alpha) f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ή } \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{30}x + \frac{2}{15} = \frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{15}$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 11x + 4 = 9x^2 - 6x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

β) Είναι $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, οπότε: $v_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, $v_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $v_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$$\text{Είναι: } \bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{13} = \frac{31}{13}$$

ΣΧΟΛΙΑ:

Για το A4 β): Για αποφυγή παρερμηνείας του ερωτήματος θα ήταν προτιμότερο να διατυπωθεί ως εξής: «Σε **κάθε** κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή: $R \approx 6\bar{x}$ », γιατί στην περίπτωση που $\bar{x} = s$ τότε είναι αληθής η πρόταση.

Για το A4 γ): (Λάθος, σύμφωνα με το Σχολικό βιβλίο). Επειδή δεν δηλώνεται ότι οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, ενδέχεται να εκληφθεί ως ερώτηση "παγίδα" από μαθητές της Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Προτείνουμε, λοιπόν, να δοθούν όλες οι μονάδες και σε όσους απάντησαν "Λ".

Για το ΘΕΜΑ Γ: Το ένα από τα δυο δεδομένα, της παραλληλίας των ΔΕ και Οχ και της μέσης τιμής περιττεύει. Στις εκφωνήσεις των θεμάτων δεν πρέπει να δίνονται περιττά δεδομένα. Μ' αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται αμφιβολίες στους μαθητές για την ορθότητα των λύσεών τους.

Οποιοδήποτε ένα από τα δύο αυτά δεδομένα θα έπρεπε να είχε διατυπωθεί στην εκφώνηση της άσκησης, πριν τη διατύπωση του Γ1, αφού αφορά την άσκηση και στην υπόλοιπη έκτασή της.