

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ ΜΕ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Δημήτρης Ι. Μπουνάκης

Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

dimitrmp@sch.gr

Ηράκλειο, 18 Δεκεμβρίου 2009

ΓΕΝΙΚΑ

Είναι γνωστό ότι στα σχολικά Μαθηματικά, αλλά και στα πανεπιστημιακά, οι κωνικές τομές μελετούνται (σχεδόν) πάντα με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας (Α. Γ.). Η κατάσταση αυτή δημιουργήθηκε σιγά-σιγά από την εποχή ακόμη του *Νικηφόρου Θεοτόκη* (1731-1800 μ.Χ) ο οποίος στο έργο του, *Στοιχεία Μαθηματικών εκ παλαιών και νεωτέρων συνερανισθέντα* (Μόσχα 1798-1799) μελετά τις κωνικές τομές και με μεθόδους της Α. Γ.. Η παράδοση αυτή έχει δημιουργήσει σήμερα την αντίληψη σε πολλούς ασχολούμενους με την Γεωμετρία, ότι οι κωνικές τομές δεν είχαν ποτέ μελετηθεί με μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Ε. Γ.). Η αλήθεια βέβαια είναι εντελώς διαφορετική.

Λίγα Ιστορικά Στοιχεία

Αφορμή για την ανακάλυψη των κωνικών τομών φαίνεται ότι ήταν το περίφημο «*Δήλιον Πρόβλημα*»:

Να κατασκευαστεί, με κανόνα και διαβήτη, ακμή κύβου ο οποίος να έχει όγκο διπλάσιο του όγκου ενός δοσμένου κύβου.

Το πρόβλημα παρέμενε άλυτο για πολλά χρόνια, μέχρι τη στιγμή που, όπως μας πληροφορεί ο *Πρόκλος* (450 περίπου μ.Χ.), ο *Ιπποκράτης ο Χίος* (≈430 π.Χ.) έκανε ένα σημαντικό βήμα: διαπίστωσε ότι το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το να παρεμβληθούν δυο μέσες ανάλογοι μεταξύ των τμημάτων α και 2α , όπου α η ακμή του δοθέντος κύβου, δηλαδή να κατασκευαστούν τμήματα κ , λ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\alpha}.$$

Τότε εύκολα προκύπτει $\kappa^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή το ζητούμενο τμήμα είναι το κ .

Κατά πληροφορίες του *Ερατοσθένη του Κυρηναίου* (275 - 195 π.Χ.) αλλά και του βυζαντινού σχολιαστή *Ευτόκιου* (6^ο αιών μ.Χ.), ο πρώτος που συνέδεσε τα τμήματα κ , λ με τις τομές κώνου φαίνεται ότι ήταν ο *Μέναιχμος* (375-325 π. Χ.) ο οποίος και

έδωσε δυο «λύσεις» στο πρόβλημα αυτό. Στην πρώτη θεωρώντας τα τμήματα κ , λ σαν τομή δυο παραβολών και στη δεύτερη σαν τομή μιας παραβολής και μιας υπερβολής. Βέβαια οι «λύσεις» αυτές δεν είναι με κανόνα και διαβήτη, αφού οι καμπύλες αυτές δεν κατασκευάζονται με τον τρόπο αυτό. Όπως αποδείχθηκε το 1837 (Θεώρημα P.L. Wantzel) το «δήλιον πρόβλημα», όπως και αυτό της «τριχοτόμησης γωνίας», είναι αδύνατο.

Στην συνέχεια με τις κωνικές τομές ασχολήθηκαν ο *Αρισταίος ο πρεσβύτερος* (320 π.Χ. περίπου), ο *Ευκλείδης* (300 π.Χ.) που έγραψαν σχετικά βιβλία και ο *Αρχιμήδης* (287-212 π.Χ.). Η σχεδόν όμως εξαντλητική μελέτη τους με μεθόδους της Ε.Γ., ήλθε τον επόμενο αιώνα, με τον *Απολλώνιο του Περγαίου* (260-180 π.Χ.), τον επονομαζόμενο και «Μέγα Γεωμέτρη» με το περίφημο έργο του *Κωνικά* (7 βιβλία και 1 χαμένο).

Ο επόμενος μεγάλος σταθμός στην πορεία μελέτης των κωνικών τομών, ήταν η μελέτη τους υπό το πρίσμα της *Προβολικής Γεωμετρίας* τον 17^ο αιώνα. Ενδιαφέρον για τις κωνικές τομές υπήρξε και τον προηγούμενο αιώνα, λόγω της ανάπτυξης της Άλγεβρας που οδήγησε βαθμιαία στην δημιουργία της Αναλυτικής Γεωμετρίας, αλλά και των εφαρμογών τους στην Αστρονομία (τροχιές πλανητών, κομητών κλπ).

Μπροστά σε αυτή την εθνική κληρονομιά, το απαύγασμα θα έλεγα της Αρχαίας Ελληνικής Γεωμετρικής σκέψης, θεώρησα σκόπιμο να δώσω **τις αποδείξεις όλων των εφαρμογών και ασκήσεων** που υπάρχουν στο τωρινό σχολικό βιβλίο της Β' Λυκείου και αφορούν γενικές ιδιότητες των κωνικών τομών, παραβολής, έλλειψης, και υπερβολής με μεθόδους της Ε. Γ. και με βάση τους ορισμούς και την θεωρία που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο (οι αρχαίοι Έλληνες Γεωμέτρες όριζαν τις κωνικές τομές διαφορετικά, αλλά ισοδύναμα). Φυσικά και οι προτάσεις της θεωρίας που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο αποδεικνύονται με τις μεθόδους της Ε.Γ. αλλά θα τις παρουσιάσω σε άλλη ευκαιρία. Οι λύσεις των ασκήσεων αυτών, γίνονται ακριβώς με τη χρήση των ορισμών και γενικά της θεωρίας του σχ. βιβλίου, ώστε να είναι άνετη η διδασκαλία τους στην Β' Λυκείου κατεύθυνσης.

Σκοπός του διδακτικού αυτού υλικού είναι :

α) Να αναδειχθεί και να φανεί ένα μέρος της μελέτης των κωνικών τομών με μεθόδους της Ε.Γ., όπως περίπου τις μελέτησαν οι Αρχαίοι Έλληνες, 2000 χρόνια πριν βρουν πρακτικές εφαρμογές.

β) Να γίνει δυνατή η σύγκριση των μεθόδων της Ε.Γ., οι οποίες χαρακτηρίζονται από κομψότητα και λιτότητα, σε σχέση με την αλγεβρική βάσανο των μεθόδων της Α.Γ. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν και προβλήματα Γεωμετρίας που λύνονται πιο απλά με την Α.Γ., απλά -από επιστημονικής πλευράς- επιλέγουμε κάθε φορά αυτό που μας «συμφέρει» ή δίνει κομψή λύση. Μπορούμε όμως γενικά να πούμε ότι η Ε.Γ. υπερτερεί σε παιδαγωγική αξία, ενώ η Α.Γ., άλγεβρα στην ουσία, είναι χρήσιμη σε πρακτικές εφαρμογές (σύγχρονες μετρήσεις αποστάσεων, εμβαδών, όγκων κλπ),

γ) Να μπορέσουν οι καθηγητές που διδάσκουν στην Β' Λυκείου, να παρουσιάσουν στους μαθητές τους, αν υπάρχει χρόνος, *τουλάχιστον μια άσκηση ή εφαρμογή* από κάθε κωνική τομή του σχ. βιβλίου και με μεθόδους της Ε.Γ., ώστε να δουν οι μαθητές και «τον άλλο παλιό καλό δρόμο» και να αισθανθούν, ίσως, το «χαμένο Γεωμετρικό άρωμα», σε ένα μη ασκησιολογικό - εξεταστικό τομέα των μαθηματικών (γενικές ιδιότητες - θεωρήματα κωνικών) αξιοποιώντας και τις γνώσεις τους από την Ε.Γ.

Σημ. Τα σχήματα στην εργασία αυτή έγιναν με την βοήθεια του προγράμματος *EucliDraw*, προσφορά του Καθηγητή του Πανεπιστημίου Κρήτης, κ. Πάρη Πάμφιλου τον οποίο και ευχαριστώ.

Α. ΠΑΡΑΒΟΛΗ

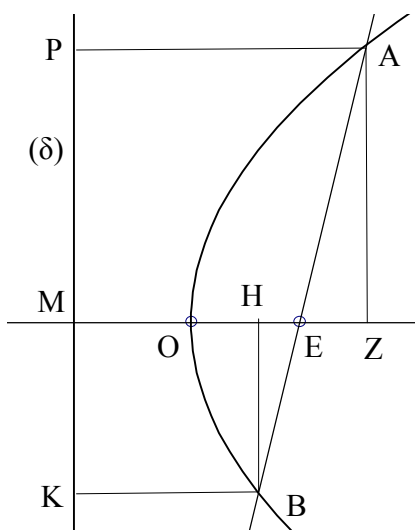
1. Εφαρμογή σχ. βιβλίου, σελίδα 92.

«Μια χορδή παραβολής τέμνει την παραβολή στα σημεία Α, Β και διέρχεται από την εστία της Ε. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των Α, Β από τον άξονα της παραβολής είναι σταθερό».

Λύση

Έστω παραβολή με διευθετούσα (δ), εστία Ε και παράμετρο $EM = p$.

Αν πράγματι το γινόμενο αυτό είναι σταθερό, θα είναι το ίδιο για οποιοδήποτε χορδή που διέρχεται από την εστία, άρα και για την κάθετη στον άξονα. Εύκολα βρίσκουμε τότε ότι $AZ \cdot BH = AZ^2 = p^2$ (αυτή η κάθετη λέγεται *εστιακτομή* και είναι ίση με την παράμετρο της παραβολής). Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να δείξουμε αυτό.



Είναι $AZ^2 = 2pOZ$, $BH^2 = 2pOH$ (βλ. σημείωση), οπότε $AZ^2 \cdot BH^2 = 4p^2 OZ \cdot OH$ (1)

Από τα όμοια τρίγωνα AEZ , HBE έχουμε ($AE = AP = MZ$, $BE = BK = MH$)

$$\frac{AE}{BE} = \frac{EZ}{HE} \quad \text{ή} \quad \frac{MZ}{MH} = \frac{EZ}{HE} \quad \text{ή} \quad \frac{p/2 + OZ}{p/2 + OH} = \frac{OZ - p/2}{p/2 - OH} = \frac{p}{2OH} = \frac{2OZ}{p}$$

Οπότε $4OZ \cdot OH = p^2$ και από την (1), $AZ \cdot BH = p^2$.

Παρατηρούμε ότι και το γινόμενο των αποστάσεων των προβολών των Α, Β στον άξονα της παραβολής, από την κορυφή της παραβολής είναι σταθερό (και ίσο με $p^2/4$).

Σημείωση

Η ισότητα $AZ^2 = 2pOZ$ είναι μια ιδιότητα - χαρακτηριστική- της παραβολής («σύμπτωμα» κατά τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρους) που αποδεικνύεται με βάση τον ορισμό της και το Πυθ. Θεώρημα και επομένως μπορούμε να την χρησιμοποιούμε και στην Ε.Γ. Στην Α.Γ. η ισότητα αυτή αντιστοιχεί στην γνωστή μας εξίσωση παραβολής κλπ.

Σχετική άσκηση

Ισχύει το αντίστροφο: Αν το γινόμενο των αποστάσεων των άκρων μιας χορδής ΑΒ παραβολής από τον άξονά της είναι ίσο με p^2 , τότε η χορδή αυτή διέρχεται από την εστία της παραβολής.

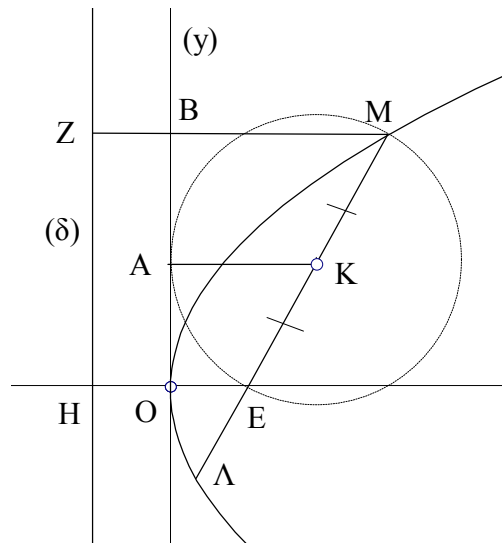
3. Άσκηση 4, σελίδα 100.

«Έστω M σημείο της παραβολής $y^2 = 2px$. Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με διάμετρο EM , όπου E η εστία της παραβολής, εφάπτεται στον άξονα $y'y$ ».

Απόδειξη

Έστω παραβολή με διευθετούσα (δ) , εστία E και παράμετρο $EM = p$.

Ο άξονας $y'y$ στην Ε.Γ. είναι απλά η κάθετη στο μέσο O του καθέτου τμήματος EH στη διευθετούσα.



Έστω MZ κάθετη στην διευθετούσα, άρα και στην OB , K το μέσο του EM και KA κάθετη στην OB .

Για να δείξουμε ότι η ευθεία OB είναι εφαπτομένη στο κύκλο διαμέτρου EM αρκεί να δείξουμε ότι $KA = \frac{ME}{2}$ (EAM ορθ. τρίγωνο στο A κλπ).

Από το τραπέζιο $OEMB$ όπου η KA είναι διάμεσός του, έχουμε διαδοχικά

$$KA = \frac{OE + BM}{2} = \frac{OH + BM}{2} = \frac{ZB + BM}{2} = \frac{ZM}{2} = \frac{ME}{2} \quad \text{ό.έ.δ.}$$

Σχετική Άσκηση

Ο κύκλος με διάμετρο μια χορδή παραβολής που διέρχεται από την εστία της, εφάπτεται στην διευθετούσα της.

4. Άσκηση 5, σελίδα 100.

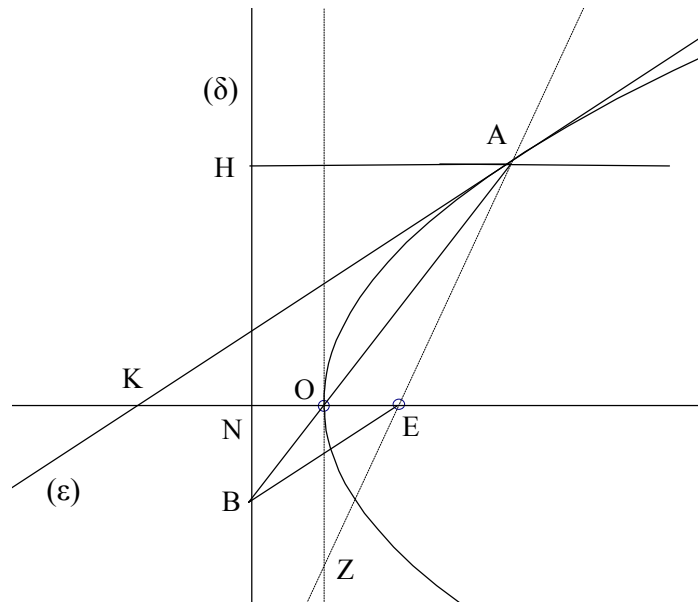
«Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και (ε) η εφαπτομένη σε ένα σημείο της A . Αν η ευθεία OA τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B , να αποδειχθεί ότι $BE \parallel (\varepsilon)$ ».

Λύση

Έστω παραβολή με διευθετούσα (δ) , εστία E και παράμετρο $EN = p$.

Έστω ότι η εφαπτομένη στο A τέμνει τον άξονα της παραβολής στο σημείο K . Φέρνουμε την AH κάθετη στην διευθετούσα (δ) , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα (συμμετρίας) της παραβολής. Από την ανακλαστική ιδιότητα της εφαπτομένης στο A , έχουμε ότι η ευθεία AK είναι διχοτόμος της γωνίας HAE και το τρίγωνο AKE ισοσκελές.

Αν η BE είναι πράγματι παράλληλη στην AK , βάση του ισοσκελούς τριγώνου AKE , τότε $\hat{OEB} = \hat{K}$ και η BE θα είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{OEZ} , εξωτερικής γωνίας του τριγώνου AOE , και αντίστροφα. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί αυτό



Από τα όμοια τρίγωνα BNO , BHA έχουμε

$$\frac{BO}{BA} = \frac{NO}{HA} = \frac{OE}{AE}, \text{ αφού } A, O \text{ σημεία της παραβολής.}$$

Επομένως από αντίστροφο του θεωρήματος εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου (AOE) , η EB είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{OEZ} . Έτσι έχουμε

$$2\hat{OEB} = \hat{K} + \hat{A} = 2\hat{K}, \text{ οπότε } \hat{OEB} = \hat{K} \text{ άρα } BE \parallel KA, \text{ ό. έ. δ.}$$

Σχετική άσκηση

Μια χορδή $ΑΓ$ παραβολής, με εστία E τέμνει την διευθετούσα της στο σημείο B . Τότε η EB είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας E του τριγώνου $ΑΕΓ$.

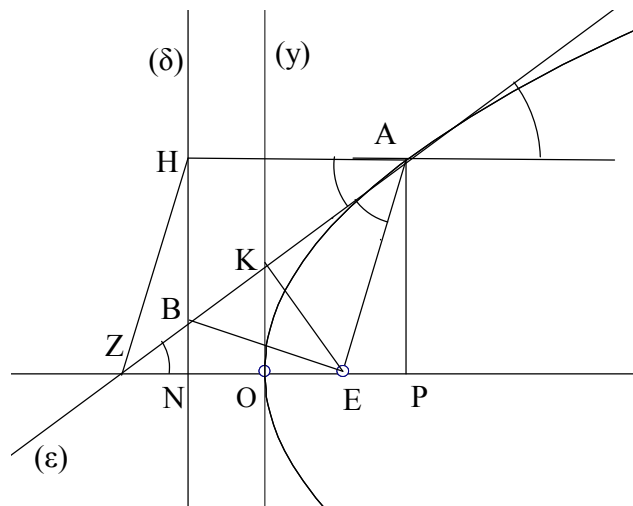
5. Άσκηση 6, σελίδα 100.

«Αν η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της Α τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Β και τον άξονα γ'γ στο σημείο Κ, να αποδειχθεί ότι

(i) $\hat{AEB} = 90^\circ$, (ii) ΕΚ κάθετη στην ΑΒ, (iii) $EK^2 = (KA)(KB)$ ».

Απόδειξη

(i) Αν και είναι η εφαρμογή 2, σελίδα 98, του σχ. βιβλίου θα δώσουμε ανεξάρτητη απόδειξη (βλ. και άσκηση 2 παραπάνω). Έστω ΑΗ κάθετη στη διευθετούσα (δ). Από την ανακλαστική ιδιότητα της εφαπτομένης της παραβολής στο Α, προκύπτει ότι η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{HAE} . Έτσι τα τρίγωνα ΑΗΒ και ΑΕΒ είναι ίσα ($AH = AE$), οπότε και $\hat{AEB} = 90^\circ$.



(ii) Από την ανακλαστική ιδιότητα της εφαπτομένης της παραβολής στο Α, προκύπτει ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι Κ μέσο της ΑΖ. Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι το Ο είναι μέσο του ΖΡ (ΑΡ κάθετη στον άξονα της παραβολής) αφού η ΟΚ είναι παράλληλη στην ΑΡ. Πράγματι τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΖΝ και ΑΕΡ είναι ίσα, αφού λόγω $HA = AE = EZ$ και $HA // EZ$ το τετράπλευρο ΗΑΕΖ είναι παραλληλόγραμμο (ρόμβος) οπότε $HZ = AE$ κλπ. Άρα $ZN = EP$, οπότε λόγω και $ON = OE$ το Ο είναι μέσο της ΖΡ.

(iii) Επειδή το ΕΚ είναι ύψος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΒ από γνωστό θεώρημα στις μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο, έχουμε το ζητούμενο.

Σχετική άσκηση

Η εφαπτομένη σε ένα σημείο Α παραβολής τέμνει τον άξονα της σε ένα σημείο το οποίο είναι συμμετρικό της προβολής του Α πάνω στον άξονα της ως προς την κορυφή της.

(Από αυτήν την ιδιότητα προκύπτει ένα απλός τρόπος χάραξης της εφαπτομένης παραβολής σε ένα σημείο της).

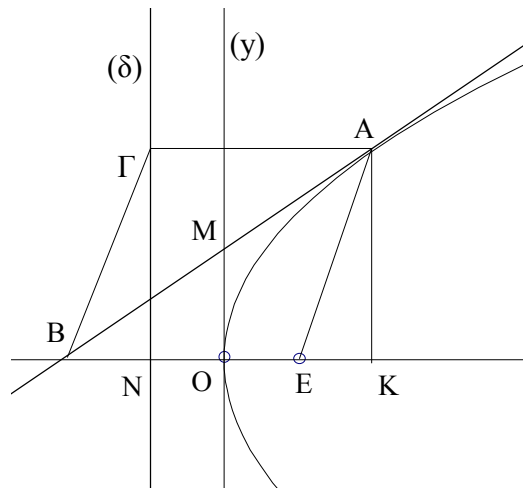
6. Άσκηση 7, σελίδα 100.

«Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και ένα σημείο της Α. Φέρνουμε την εφαπτομένη της παραβολής στο Α που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο Β και την παράλληλη από το Α στον άξονα $x'x$ που τέμνει τη διευθετούσα στο Γ. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ρόμβος με κέντρο στον άξονα $y'y$ ».

Απόδειξη

Έστω παραβολή με διευθετούσα (δ), εστία Ε και παράμετρο $EN = p$.

Επειδή Α σημείο της παραβολής έχουμε $AG = AE$. Από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής προκύπτει ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ισοσκελές, οπότε $AG = AE = BE$ και λόγω $AG \parallel BE$ το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ρόμβος. Έστω Μ το σημείο τομής της ΑΒ με την ευθεία (γ) (άξονα $y'y$ στην Α.Γ.). Αρκεί τώρα να δειχθεί ότι το Μ είναι μέσο της διαγωνίου ΑΒ του ρόμβου.



Έστω ΑΚ κάθετη στον άξονα της παραβολής. Επειδή $BG = EA$ και $GN = AK$ τα ορθογώνια τρίγωνα BGN , EAK είναι ίσα, οπότε $BN = EK$ και λόγω Ο μέσο του NE , το Ο είναι και μέσο του BK . Έτσι η OM ως παράλληλη στην πλευρά AK του τριγώνου ABK , από το μέσο Ο του BK , διέρχεται από το μέσο Μ του AB κλπ.

Σχετική άσκηση

Η εφαπτομένη παραβολής με εστία Ε, σε ένα σημείο της Α είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΕΓ, όπου Γ η προβολή του σημείου Α στη διευθετούσα.

Σημείωση

Είναι καλύτερα να προηγηθεί η άσκηση 7 της 6, αφού τότε το ερώτημα 6(ii) προκύπτει άμεσα από την άσκηση 7.

B. ΕΛΛΕΙΨΗ

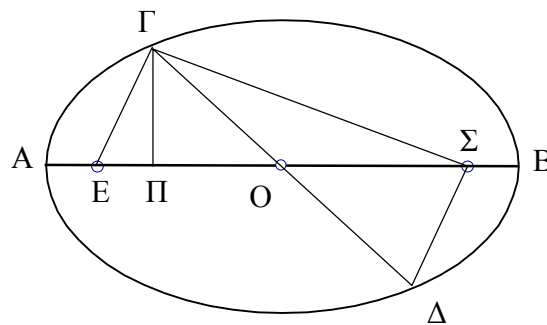
7. Πρόταση σελίδας 104 (Θεωρία)

Η μικρότερη διάμετρος μιας έλλειψης είναι ο μικρός της άξονας και η μεγαλύτερη ο μεγάλος της άξονας.

Απόδειξη

Εστω μια έλλειψη με ημιάξονες α, β , $\alpha > \beta$, και εστίες E, Σ . Αρκεί ναδειχθεί ότι για κάθε διάμετρο της έλλειψης $\Gamma\Delta$ ισχύει $2\beta \leq \Gamma\Delta \leq 2\alpha$, εφόσον και οι άξονες της έλλειψης είναι προφανώς και διάμετροι αυτής.

Αρκεί ασφαλώς να δειχθεί ότι $\beta \leq O\Gamma \leq \alpha$.



Από το τρίγωνο $\Delta\Gamma\Sigma$ και το παραλληλόγραμμο $\text{ΕΓ}\Sigma\Delta$ έχουμε

$$\Gamma\Delta = 2O\Gamma \leq \Gamma\Sigma + \Sigma\Delta = \Gamma\Sigma + \Gamma E = 2\alpha, \text{ οπότε } O\Gamma \leq \alpha.$$

Είναι $OG^2 = GP^2 + OP^2$ και επειδή το G είναι σημείο της έλλειψης (βλ. σημείωση)

$$\text{έχουμε } \frac{\text{O}\Pi^2}{\alpha^2} + \frac{\Gamma\Pi^2}{\beta^2} = 1 \quad \eta \quad \Gamma\Pi^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{O}\Pi^2.$$

Έτσι έχουμε

$$O\Gamma^2 = \beta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} O\Pi^2 + O\Pi^2 = \beta^2 + O\Pi^2 (1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}) \geq \beta^2, \text{ επομένως } O\Gamma \geq \beta.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $OP=0$, δηλαδή όταν η ΟΓ ταυτίζεται με τον μικρό ημιάξονα.

Σημείωση

Η ισότητα $\frac{\text{ΟΠ}^2}{\alpha^2} + \frac{\text{ΓΠ}^2}{\beta^2} = 1$ είναι μια ιδιότητα - χαρακτηριστική- της έλλειψης και

είναι αντίστοιχη της γνωστής μας εξίσωσης έλλειψης στην Α. Γ.

Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται (όπως και η εξίσωση της έλλειψης) με βάση τον ορισμό της έλλειψης, το Πυθ. Θεώρημα, θεώρημα διαμέσων κλπ. Δεν έχει σχέση επομένως με τις μεθόδους της Α.Γ., άρα μπορούμε να την χρησιμοποιούμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία των κωνικών τομών.

Συνήθως στα αρχαία κείμενα εμφανίζεται με την ισοδύναμη γεωμετρική μορφή

$$(\text{λόγος εμβαδών}) \frac{\Gamma\Pi^2}{\Pi\text{Α} \cdot \Pi\text{Β}} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{ («σύμπτωση» κατά τους αρχαίους Έλληνες)}$$

γεωμέτρεις- $PA \cdot PB = \alpha^2 - OP^2$ κλπ).

8. Εφαρμογή σελίδας 109.

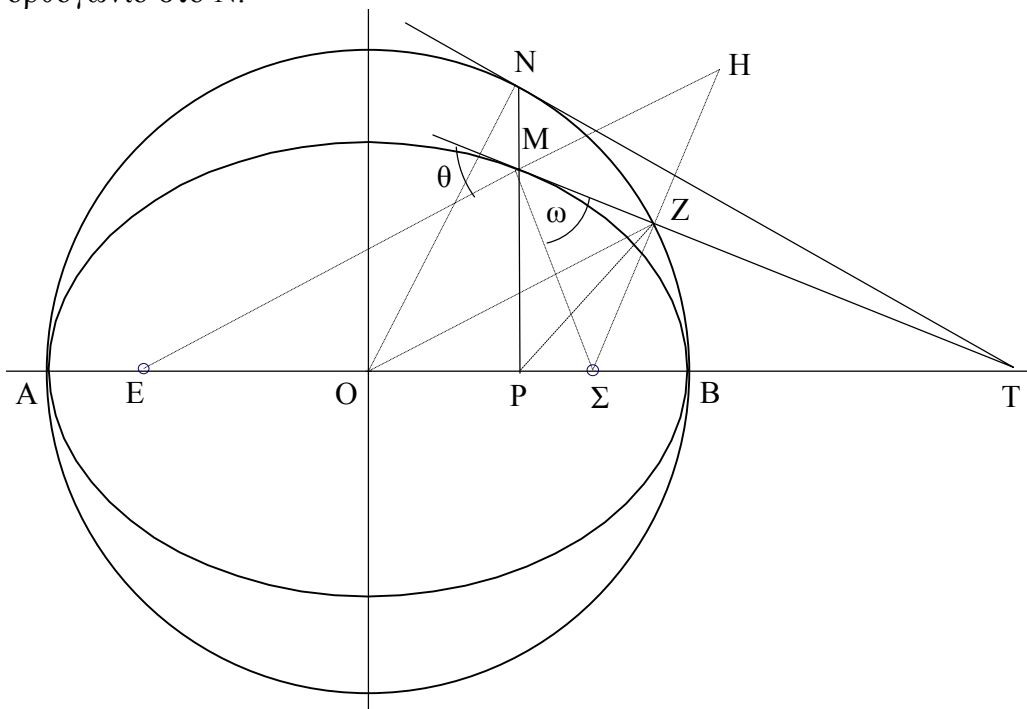
«Δίνονται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$. Έστω $M_1(x_1, y_1)$

σημείο της έλλειψης και $M_2(x_1, y_2)$ σημείο του κύκλου αυτού. Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο M_1 και η εφαπτομένη του κύκλου στο M_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$ »

Απόδειξη

Επαναδιατύπωση στη γλώσσα της Ε.Γ: Έστω έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα a , μικρό b , εστίες E, Σ και ο κύκλος με κέντρο το σημείο τομής των αξόνων της έλλειψης και ακτίνα a . Από ένα σημείο M της έλλειψης θεωρούμε κάθετη στον μεγάλο άξονά της που τέμνει τον κύκλο στο σημείο N . Τότε η εφαπτομένη του κύκλου στο N και της έλλειψης στο M τέμνονται πάνω στον μεγάλο άξονα (συμμετρίας) της έλλειψης.

Έστω ότι η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο M τέμνει τον μεγάλο άξονα στο T . Αρκεί να δειχθεί ότι η TN είναι εφαπτόμενη του κύκλου ή ότι το τρίγωνο ONT είναι ορθογώνιο στο N .



Ισοδύναμα αρκεί να δειχθεί ότι $ON^2 = OP \cdot OT$ ή $a^2 = OP \cdot OT$ (τότε τα τρίγωνα ONP, ONT είναι όμοια κλπ).

Προεκτείνουμε την EM κατά τμήμα $MH = M\Sigma$, οπότε $HE = 2a$ (συνηθισμένη κίνηση στην έλλειψη). Λόγω και της ανακλαστικής ιδιότητας της εφαπτομένης στο M , η MT είναι μεσοκάθετη στο τμήμα ΣH , Z μέσο του ΣH , οπότε $2OZ = HE$ ή $OZ = a$, και $OZ \parallel HE$.

Ισοδύναμα τώρα αρκεί να δειχθεί ότι $\frac{OZ}{OT} = \frac{OP}{OZ}$, δηλαδή αρκεί να δειχθεί ότι τα τρίγωνα OZP, OZT είναι όμοια.

Ήδη έχουν κοινή την γωνία O . Θα δείξουμε ότι και $\hat{OZP} = \hat{ZTO}$.

Λόγω του εγγραψίμου τετραπλεύρου $PMZ\Sigma$ έχουμε $\hat{MZP} = \hat{M\Sigma P}$ και λόγω $OZ \parallel ME$ $\hat{MZO} = \hat{\theta} = \hat{\omega}$. Έτσι έχουμε

$\hat{\angle} OZP = \hat{\angle} MZP - \hat{\angle} MZO = \hat{\angle} MΣP - \theta = \hat{\angle} ZTO$ ($\hat{\angle} MΣP$ εξωτερική του τριγώνου ΣΜΤ)
Έτσι τα τρίγωνα OZP, OZT είναι όμοια κλπ..

Πόρισμα

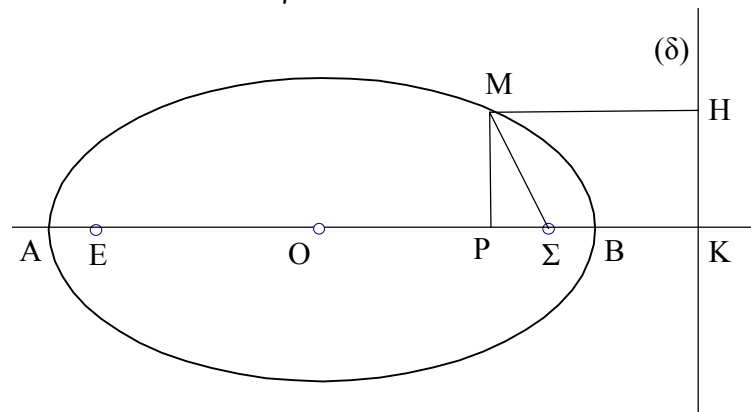
Αν η εφαπτομένη στο σημείο Μ της έλλειψης τέμνει τον μεγάλο άξονα $AB=2a$ στο σημείο Τ και Ρ η προβολή του Μ σε αυτόν, τότε ισχύει $OP \cdot OT = a^2$.

9. Εφαρμογή 2, σελίδα 110.

«Έστω έλλειψη κέντρου Ο με μεγάλο άξονα $AB = 2a$ και εστιακή απόσταση $EΣ = 2\gamma$ και σημείο Κ πάνω στην ευθεία του μεγάλου άξονα ώστε $OK = a^2/\gamma$. Στο σημείο Κ θεωρούμε μια ευθεία (δ) κάθετη στον μεγάλο άξονα της έλλειψης. Να αποδειχθεί ότι ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου της έλλειψης από την εστία της που βρίσκεται πάνω στο τμήμα ΟΚ και την ευθεία (δ), είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της έλλειψης». (Η ευθεία (δ) λέγεται διευθετούσα της έλλειψης)

Λύση

Έστω Κ δεξιά του Ο. Είναι $OK = \frac{a^2}{\gamma} > a = OB$. Θα δείξουμε ότι $\frac{MΣ}{MH} = \epsilon$.



Έχουμε, $MΣ^2 = MP^2 + PΣ^2$

$$= \frac{\beta^2}{a^2} (a^2 - OP^2) + (\gamma - OP)^2 = a^2 + \frac{\gamma^2 OP^2}{a^2} - 2\gamma OP = (a - \epsilon OP)^2$$

οπότε ($OP < a < a/\epsilon$) $MΣ = a - \epsilon OP$ και $MH = OK - OP = \frac{a^2}{\gamma} - OP = \frac{a}{\epsilon} - OP$.

Έτσι έχουμε $\epsilon MH = a - \epsilon OP = MΣ$

Όμοια εργαζόμαστε αν Κ αριστερά του Ο και βρίσκουμε ότι ισχύει (για την εστία Ε). (Παρατηρούμε ότι οι αποστάσεις του Μ από Σ και (δ) εκφράζονται συναρτήσει του OP).

Σημείωση

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Έτσι η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα ισοδύναμο ορισμό της έλλειψης. Μάλιστα κάτι παρόμοιο ισχύει και για την υπερβολή. Έτσι και οι 3 κωνικές μπορούν να δοθούν με ένα ενιαίο ορισμό

Ορισμός Κωνικών με τον Λόγο*

Σ' ένα επίπεδο θεωρούμε ένα (σταθερό) σημείο E και μια (σταθερή) ευθεία (δ) , στην οποία δεν ανήκει το σημείο E . Καλούμε *κωνική τομή* το σύνολο των σημείων ενός επιπέδου τα οποία έχουν την ιδιότητα, ο λόγος των αποστάσεων τους από το σημείο E και την ευθεία (δ) , είναι σταθερός.

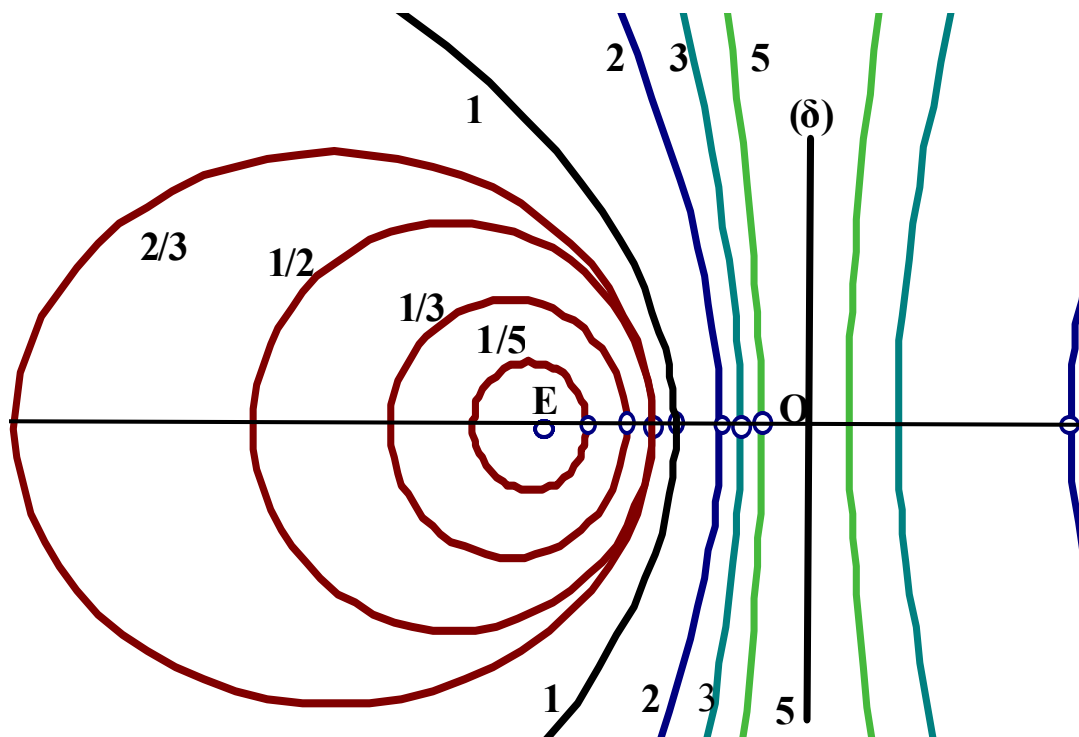
Ο σταθερός αυτός λόγος που συμβολίζεται με ε , λέγεται *εκκεντρότητα* της κωνικής. Το σημείο E λέγεται *εστία* και η ευθεία (δ) *διευθετούσα* της κωνικής.

- ❖ Αν $\varepsilon = 1$ η κωνική λέγεται *παραβολή*, όπως την ορίζει και το σχ. βιβλίο,
- ❖ αν $0 < \varepsilon < 1$ η κωνική τομή λέγεται *έλλειψη* και
- ❖ αν $\varepsilon > 1$ η κωνική λέγεται *υπερβολή*.

Στον ορισμό αυτό δεν περιλαμβάνεται η περίπτωση κύκλου που είναι ασφαλώς κωνική τομή (μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση έλλειψης ($\varepsilon = 0$)).

Ο παραπάνω ενιαίος ορισμός οφείλεται στον Πάππο (300 μ.Χ., ο τελευταίος των μεγάλων Αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών) και έχει αφετηρία την ιδιότητα του λόγου των κωνικών, η οποία φαίνεται ότι ήταν γνωστή στον Ευκλείδη. Ο Πάππος τον αναφέρει στην *Συναγωγή* του, σε ένα Λήμμα του στο (χαμένο) έργο του Ευκλείδη *Τόποι προς επιφανείαις*. Στην περίπτωση βέβαια που δοθεί ο παραπάνω ορισμός οι γνωστοί ορισμοί της έλλειψης και της υπερβολής (εστιακοί ορισμοί) αποδεικνύονται ως προτάσεις και αντίστροφα.

Οι καμπύλες αυτές φαίνονται στο παρακάτω σχέδιο, όπου η εκκεντρότητα αυξανόμενη από το μηδέν (κύκλος) μέχρι το άπειρο, δίνει τις 4 αυτές τις καμπύλες στις διάφορες μορφές τους. Για $\varepsilon = 1$ έχουμε την παραβολή (μαύρη καμπύλη)

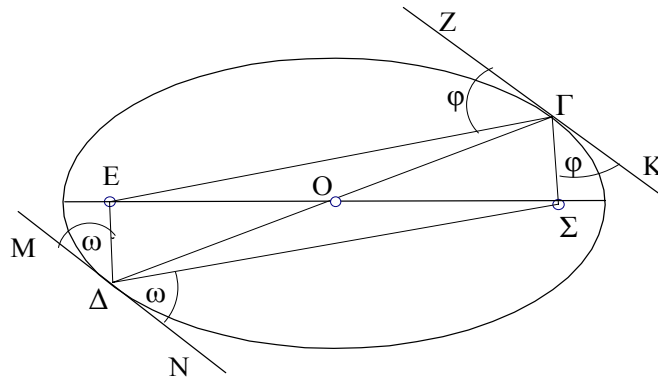


10. Άσκηση 5, σελίδα 112.

«Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου της είναι παράλληλες (διάμετρος έλλειψης λέγεται το τμήμα που συνδέει δυο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από την αρχή των αξόνων)».

Απόδειξη

Άξονες εδώ εννοούμε τους άξονες συμμετρίας της έλλειψης. Έστω μια διάμετρος ΓΔ και οι εφαπτόμενες ΖΚ, ΜΝ στα Γ, Δ αντίστοιχα. Αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες $\hat{Z}\Gamma\Delta$, $\hat{\Gamma}\Delta\text{N}$ είναι ίσες. Έστω Ε, Σ οι εστίες της έλλειψης, οπότε επειδή τα σημεία Γ, Δ είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο (συμμετρίας) Ο της έλλειψης, το τετράπλευρο ΕΓΣΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $\hat{E}\Gamma\Sigma = \hat{E}\Delta\Sigma$.



Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης οι εφαπτόμενες στα Α, Β σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις εστιακές ακτίνες. Έτσι έχουμε

$$2\hat{\varphi} + \hat{E}\Gamma\Sigma = 180^\circ = 2\hat{\omega} + \hat{E}\Delta\Sigma$$

και λόγω $\hat{E}\Gamma\Sigma = \hat{E}\Delta\Sigma$, έχουμε $\hat{Z}\Gamma\text{E} = \hat{\Sigma}\Delta\text{N}$ και λόγω $\text{E}\Gamma \parallel \Delta\Sigma$, $\hat{Z}\Gamma\Delta = \hat{\Gamma}\Delta\text{N}$ κλπ.

11. Άσκηση 3, Β' ομάδα σελίδα 112

«Αν M είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, να αποδείξετε ότι

$$ME' = a + \varepsilon x, \quad ME = a - \varepsilon x.$$

Λύση

Έστω έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα a , μικρό b (και εκκεντρότητα ε). Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι, αν M είναι ένα σημείο μιας έλλειψης και P η προβολή του στον μεγάλο άξονά της τότε ισχύουν

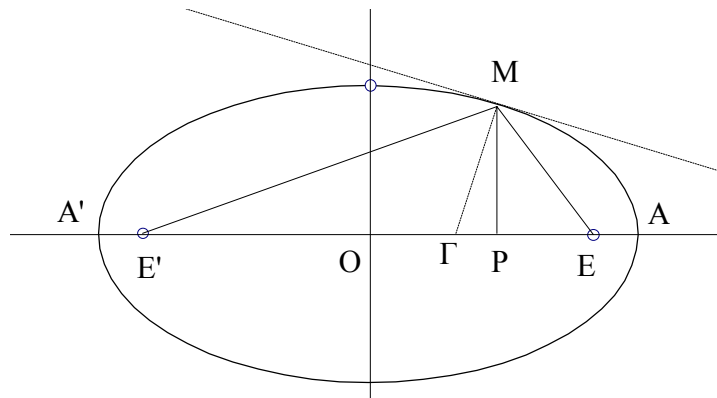
$$ME' = a + \varepsilon OP, \quad ME = a - \varepsilon OP \text{ αν } ME' > ME \text{ και}$$

$$ME = a + \varepsilon OP, \quad ME' = a - \varepsilon OP \text{ αν } ME' < ME$$

$$\text{Είναι } ME' + ME = 2a \quad (1)$$

Έστω M δεξιά του μικρού άξονα.

Θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε (με ότι προκύψει) και την διαφορά $ME' - ME$ συναρτήσει του a .



Από το 2^ο θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο MEE' , με διάμεσο MO , έχουμε

$$ME'^2 - ME^2 = 2EE' \cdot OP \quad \text{ή} \quad (ME' + ME)(ME' - ME) = 4\varepsilon OP$$

$$\text{ή} \quad ME' - ME = 2\varepsilon OP \quad (2)$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση των (1), (2) βρίσκουμε τις ζητούμενες σχέσεις.

Αν M αριστερά του μικρού άξονα τότε όμοια βρίσκουμε

$$ME = a + \varepsilon OP, \quad ME' = a - \varepsilon OP.$$

Άσκηση

Έστω ότι η κάθετη στην εφαπτομένη έλλειψης (με μεγάλο άξονα $2a$, μικρό $2b$ και εκκεντρότητα ε) στο σημείο της M τέμνει τον μεγάλο άξονα της έλλειψης στο σημείο Γ και P η προβολή του M στον άξονα αυτόν. Τότε ισχύουν

$$\alpha) \Gamma E = \varepsilon ME, \quad \Gamma E' = \varepsilon ME', \quad \beta) O\Gamma = \varepsilon^2 OP,$$

$$\gamma) \frac{M\Gamma^2}{ME \cdot ME'} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \delta) \frac{M\Gamma^2}{\Gamma E \cdot \Gamma E'} = \frac{b^2}{\varepsilon^2}.$$

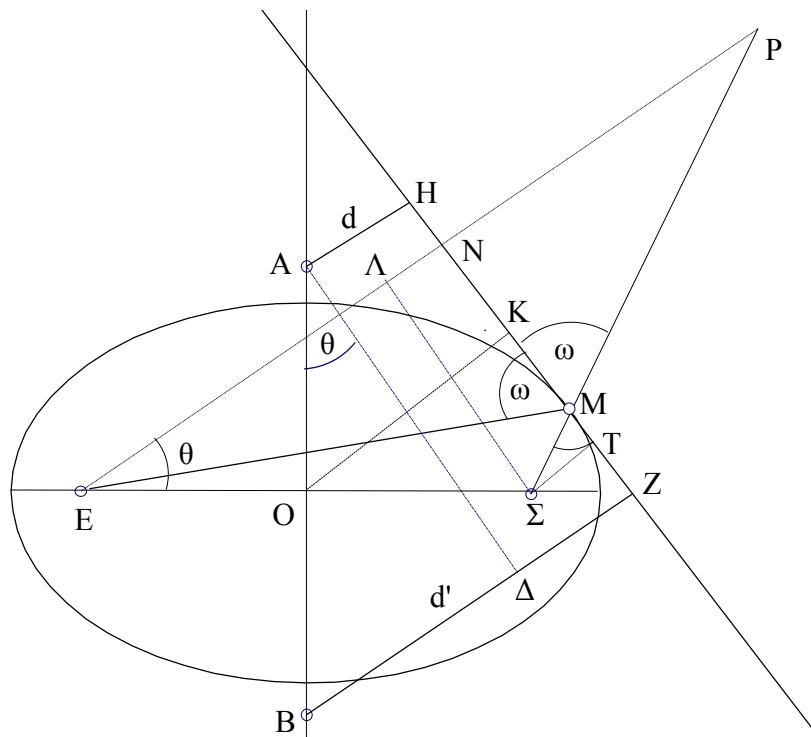
12. Άσκηση 4, Β' ομάδα, σελίδα 112

«Έστω d, d' οι αποστάσεις των σημείων $A(0, \gamma), B(0, -\gamma)$ από την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της M . Να αποδείξετε ότι $d^2 + d'^2 = 2\alpha^2$ ».

Λύση

Έστω έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα α , μικρό β και H, K, T, Z οι προβολές των A, O, Σ, B αντίστοιχα στην εφαπτομένη στο M . Προεκτείνουμε την ΣM κατά τμήμα $MP = ME$, (συχνή κίνηση στα προβλήματα της έλλειψης), οπότε $P\Sigma = ME + M\Sigma = 2\alpha$, και λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας η εφαπτομένη στο M είναι μεσοκάθετη στο EP , έστω N το μέσο του EP .

Επειδή O μέσο της πλευράς AB του τραπεζίου $AHKB$, αλλά και μέσο της πλευράς $E\Sigma$ του τραπεζίου ΣTNE , έχουμε $2OK = d + d' = \Sigma T + EN$ (1)



Από τα όμοια ορθ. τρίγωνα $\Sigma MT, ENM$ (λόγω ανακλαστικής ιδιότητας)

$$\text{έχουμε } \frac{\Sigma T}{\Sigma M} = \frac{EN}{EM} = \frac{\Sigma T + EN}{2\alpha}, \text{ οπότε, λόγω (1), } d + d' = 2\alpha \frac{EN}{EM} \quad (2)$$

Έστω $\Sigma\Lambda$ κάθετη στην EP και $A\Delta$ κάθετη στη BZ . Τα ορθ. τρίγωνα $A\Delta B, E\Lambda\Sigma$ είναι ίσα, ($AB = E\Sigma = 2\gamma$ κλπ) οπότε $\Sigma\Lambda = B\Delta = d' - d$.

$$\text{Από δε τα όμοια ορθ. τρίγωνα } PNM, P\Lambda\Sigma \text{ έχουμε } \frac{\Sigma\Lambda}{NM} = \frac{P\Sigma}{MP} \text{ ή } \frac{d' - d}{NM} = \frac{2\alpha}{EM} \quad (3)$$

Από (2) και (3) έχουμε

$$(d' + d)^2 + (d' - d)^2 = 4\alpha^2 \frac{EN^2 + NM^2}{EM^2} \text{ ή } 2(d'^2 + d^2) = 4\alpha^2 \text{ ή } d'^2 + d^2 = 2\alpha^2.$$

Σχετική Άσκηση

Ως συνέχεια της παραπάνω άσκησης δείξτε ότι: $EN - \Sigma T = 2\gamma \sin \theta$,

i) $d = AH = a(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)$, $d' = BZ = a(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)$,

ii) Η προβολή της εστίας E στην εφαπτομένη στο M ανήκει σε κύκλο ακτίνας a και κέντρου O (όμοια και η προβολή της εστίας Σ),

iii) Προεκτείνουμε την T Σ κατά τμήμα $\Sigma\Gamma = \Lambda E$. Ναδειχθεί ότι το Γ ανήκει στον προηγούμενο κύκλο. iv) Ισχύει $\Sigma T \cdot EN = \beta^2$.

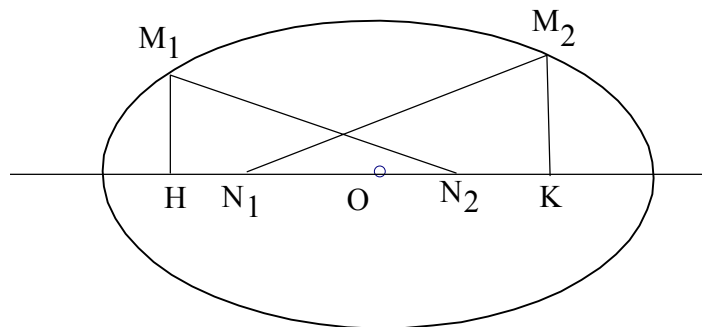
13. Άσκηση 5, Β' ομάδα σελίδα 113.

«Έστω $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$ δυο σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τα σημεία $N_1(\epsilon x_1, 0)$, $N_2(\epsilon x_2, 0)$. Να αποδείξετε ότι $M_1 N_2 = M_2 N_1$ ».

Λύση

Έστω H, K οι προβολές των M_1, M_2 στον μεγάλο άξονα της έλλειψης και

(ισοδύναμα, $x_1 = OH$, $x_2 = OK$) $ON_1 = \frac{\gamma OH}{\alpha} < OH$ και $ON_2 = \frac{\gamma OK}{\alpha} < OK$.



Αρκεί να δείξουμε ότι $N_1 M_2^2 = M_1 N_2^2$

$$\Leftrightarrow N_1 K^2 + K M_2^2 = H M_1^2 + H N_2^2$$

$$\Leftrightarrow (ON_1 + OK)^2 + K M_2^2 = H M_1^2 + (OH + ON_2)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma OH}{\alpha} + OK\right)^2 + K M_2^2 = H M_1^2 + \left(OH + \frac{\gamma OK}{\alpha}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow K M_2^2 - H M_1^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (OH^2 - OK^2) \quad (*)$$

Επειδή M_2, M_1 σημεία της έλλειψης ισχύουν (βλ. σημείωση άσκησης 7)

$$\frac{OK^2}{\alpha^2} + \frac{K M_2^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{OH^2}{\alpha^2} + \frac{H M_1^2}{\beta^2} = 1,$$

και με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει η (*).

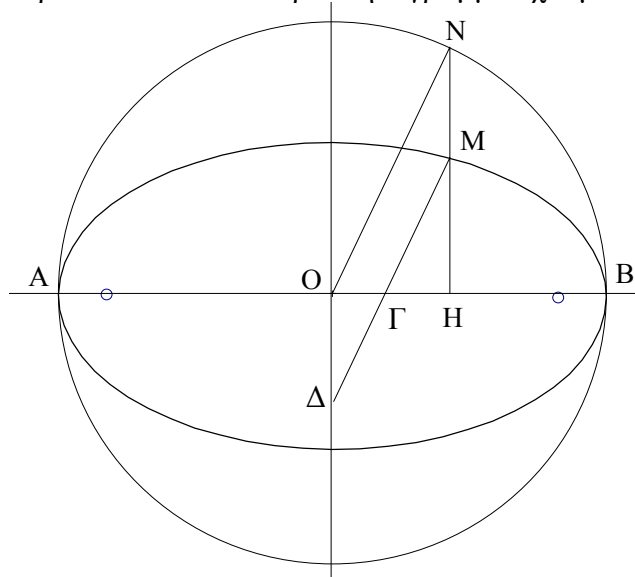
14. Άσκηση 6, Β΄ ομάδα, σελίδα 113.

«Έστω μια έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα a , μικρό β και ένα σημείο της M . Έστω επιπλέον ο κύκλος με κέντρο το κέντρο της έλλειψης και ακτίνα a και το σημείο του N που έχει με το M την ίδια τετμημένη. Από το M φέρνουμε παράλληλη στην ON που τέμνει το μεγάλο και τον μικρό άξονα της έλλειψης στα σημεία Γ , Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $M\Gamma = \beta$, $M\Delta = a$ ».

Απόδειξη

Προφανώς αντί της έκφρασης «το N έχει με το M την ίδια τετμημένη» ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι από το σημείο M της έλλειψης φέρνουμε κάθετη στον μεγάλο άξονα της έλλειψης που τέμνει τον κύκλο (O , a) στο σημείο N .

Επειδή το τετράπλευρο $NM\Delta O$ είναι παραλληλόγραμμο έχουμε $M\Delta = ON = a$.



Από τα όμοια τρίγωνα ONH , ΓMH έχουμε $\frac{M\Gamma}{a} = \frac{MH}{NH}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$\frac{MH}{NH} = \frac{\beta}{a}$. Από την σχέση $\frac{OH^2}{a^2} + \frac{MH^2}{\beta^2} = 1$ (βλ. σημείωση στην παραπάνω άσκηση

7), έχουμε $\frac{\beta^2}{a^2} = \frac{MH^2}{a^2 - OH^2} = \frac{MH^2}{NH^2}$, οπότε $\frac{MH}{NH} = \frac{\beta}{a}$ κλπ.

Σημείωση

Αν $\varphi = \angle A\hat{O}N$ τότε $OH = a \sin \varphi$, $MH = \beta \sin \varphi$, που εκφράζουν τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης στην A . Γ .

Σχετική άσκηση (εφαρμογή σχ. βιβλίου σελ. 107)

Έστω κύκλος κέντρου O και ακτίνας a , β θετικός αριθμός με $a > \beta$ και μια διάμετρος του κύκλου AB . Από ένα σημείο N του κύκλου φέρουμε το κάθετο τμήμα

NH στην διάμετρο AB . Αν M σημείο του τμήματος NH τέτοιο ώστε $\frac{MH}{NH} = \frac{\beta}{a}$ τότε

να δειχθεί ότι α) Αν E , Σ σημεία της AB με $OE = O\Sigma = \gamma$ όπου $\gamma^2 = a^2 - \beta^2$ και

$ME \geq M\Sigma$, τότε $M\Sigma = a - \frac{\gamma}{a}OH$, $ME = a + \frac{\gamma}{a}OH$ (ανάλογα αν $ME < M\Sigma$),

β) Το M ανήκει σε έλλειψη με εστίες E , Σ και ημιάξονες a , β .

15. Άσκηση 7, Β' Ομάδα, σελίδα 113.

«Έστω $(\varepsilon), (\varepsilon')$ οι εφαπτόμενες στις κορυφές A, A' αντίστοιχα, της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < \beta < a$, και (ζ) η εφαπτομένη της σε ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$.

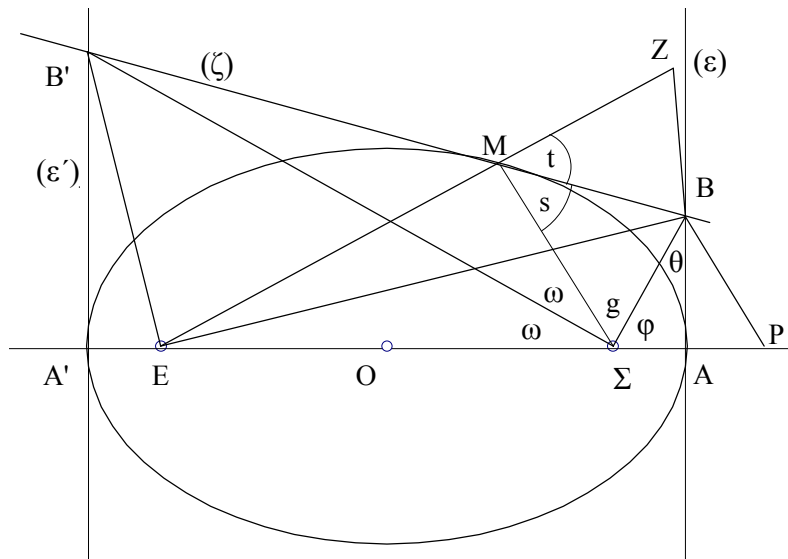
Αν η (ζ) τέμνει τις $(\varepsilon), (\varepsilon')$ στα σημεία B, B' αντίστοιχα να αποδείξετε ότι

(i) $(AB)(A'B') = \beta^2$,

(ii) ο κύκλος με διάμετρο BB' διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης».

Λύση

Θα δείξουμε πρώτα το (ii). Αρκεί να δείξουμε ότι οι γωνίες $B'SB, B'EB$ είναι ορθές. Για την γωνία $B'SB$: θα δειχθεί ότι η SB είναι διχοτόμος της γωνίας MSA (και ανάλογα αποδεικνύεται ότι και η SB' είναι διχοτόμος της παραπληρωματικής της γωνίας MSA'), οπότε SB, SB' κάθετες.



Προεκτείνουμε την EM κατά τμήμα $MZ = MS$, οπότε $ZE = ME + MZ = 2a$ και λόγω της ισότητας των γωνιών t, s (ανακλαστική ιδιότητα) τα τρίγωνα MZB και

$MBΣ$ είναι ίσα οπότε $BZ = BΣ$ (και $\hat{Z} = \hat{g}$).

Όμοια προεκτείνουμε την $ΣA$ κατά τμήμα $AP = ΣA$, οπότε $PE = AE + AS = 2a$ και

$BΣ = BP$ (και $\hat{P} = \hat{\varphi}$)

Τώρα τα τρίγωνα ZEB, BEP έχουν τις πλευρές τους ίσες, άρα είναι ίσα. Έτσι οι

γωνίες $\hat{Z} = \hat{P}$, όμως $\hat{Z} = \hat{g}$ και $\hat{P} = \hat{\varphi}$, οπότε $\hat{g} = \hat{\varphi}$, άρα SB διχοτόμος.

• Για την γωνία $B'EB$: Η EB είναι διχοτόμος της γωνίας ZEP (τα τρίγωνα ZEB, BEP είναι ίσα) και το τετράπλευρο $B'ESB$ είναι εγγράψιμο

(στο τρ. $MEΣ$: $2\hat{t} = 2\hat{\omega} + \hat{\Sigma EM} = 2\hat{\omega} + 2\hat{BES}$ και στο τρ. $MB'Σ$: $\hat{t} = \hat{s} = \hat{MB'Σ} + \hat{\omega}$,

οπότε $\hat{BES} = \hat{BB'Σ}$). Έτσι και η γωνία $B'EB$ είναι ορθή.

Άρα ο κύκλος με διάμετρο την BB' διέρχεται από τις εστίες.

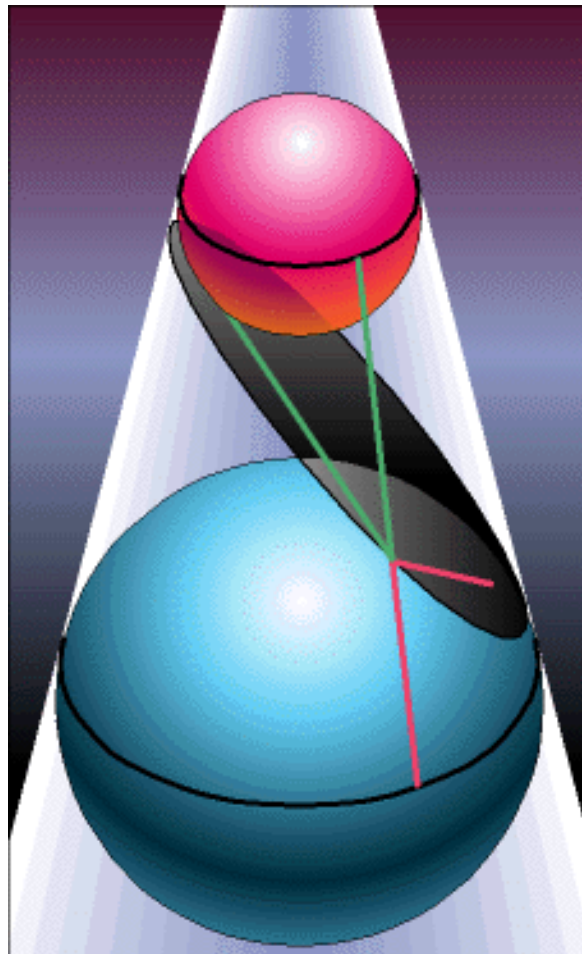
(i) Αναζητούμε ομοιότητα τριγώνων με πλευρές $AB, A'B'$. Είναι $\hat{\omega} = \hat{\theta}$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $ABΣ, ΣA'B'$ είναι όμοια και έχουμε

$$\frac{AB}{A\Sigma} = \frac{\Sigma A}{A'B'} \quad \text{ή} \quad AB \cdot A'B' = \Sigma A \cdot A'\Sigma = (\alpha - O\Sigma)(\alpha + O\Sigma) = \alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2.$$

Σχετικές Ασκήσεις

1. Δείξτε ακόμη ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών από την εφαπτομένη στο Μ είναι σταθερό και ίσο με β^2 . (Υπ. το τετράπλευρο ΕΣΒΒ' είναι εγγράψιμο, και με τα κάθετα τμήματα δημιουργούνται ορθ. τρίγωνα όμοια με τα ΑΒΣ, Α'Β'Ε κλπ).
2. Έστω μια διάμετρος έλλειψης με ημιάξονες α, β , $\alpha > \beta$ και οι εφαπτόμενες στα άκρα της. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων μιας εστίας από τις εφαπτόμενες αυτές είναι σταθερό και ίσο με β^2 .
3. Η εφαπτομένη σε μια κορυφή Α έλλειψης και η εφαπτομένη σε ένα σημείο Μ της έλλειψης τέμνονται στο σημείο Β. Τότε τα εφαπτόμενα τμήματα ΒΑ, ΒΜ φαίνονται από κάθε εστία με ίσες γωνίες.

Σφαίρες Dandelin (1794 -1847 μ.Χ.)



Τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων σφαιρών με το επίπεδο τομής, είναι οι εστίες της τομής-έλλειψης του κώνου (άμεση εποπτική απόδειξη).

Γ. ΥΠΕΡΒΟΛΗ

16. Άσκηση 1, Β' ομάδα, σελίδα 124.

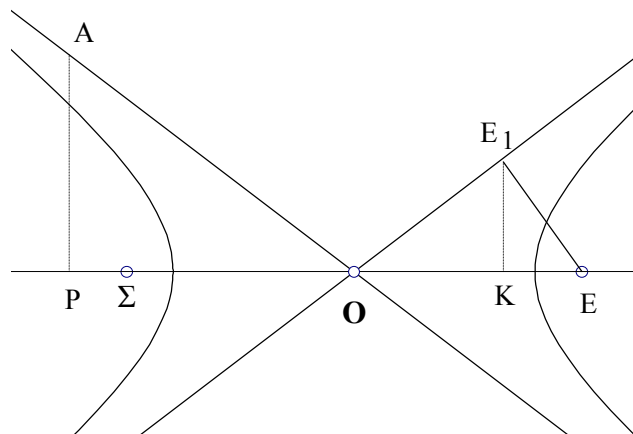
«Αν E_1 είναι η προβολή της εστίας E της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ πάνω στην

ασύμπτωτη $y = \frac{b}{a}x$ να αποδείξετε ότι (i) $OE_1 = a$, (ii) $EE_1 = b$ ».

Λύση

Έστω υπερβολή με σταθερή διαφορά $2a$ (μεγάλο ημιάξονα a) και εστιακή απόσταση 2γ , $\gamma^2 - a^2 = b^2$, b μικρός ημιάξονας.

Στην Ε.Γ. ως μια ασύμπτωτη ευθεία ορίζεται η ευθεία που διέρχεται από το μέσο O του εστιακού τμήματος ΣE (αρχή αξόνων -συμμετρίας- της υπερβολής) και ένα σημείο A του επιπέδου, με προβολή P στον άξονα της υπερβολής, ώστε $\frac{AP}{OP} = \frac{b}{a}$ ή η ευθεία που διέρχεται από το O και σχηματίζει με τον κύριο άξονα της υπερβολής οξεία γωνία ω με $\epsilon\omega = \frac{b}{a}$ (η άλλη ασύμπτωτη είναι η συμμετρική της προηγούμενης ως προς τον κύριο άξονα της υπερβολής. Προφανώς ισοδύναμος με τον γνωστό ορισμό της Αναλυτικής γεωμετρίας).



Επειδή E_1K ύψος του ορθ. τριγώνου OEE_1 ισχύει $OK \cdot KE = KE_1^2$, και λόγω του ότι

το E_1 είναι σημείο της ασύμπτωτης έχουμε $KE_1 = \frac{bOK}{a}$, οπότε αντικαθιστώντας

παίρνουμε $KE = \frac{b^2 OK}{a^2} = \gamma - OK$ και τελικά $OK = \frac{a^2}{\gamma}$. Έτσι έχουμε

$$OE_1^2 = OE \cdot OK = \gamma \frac{a^2}{\gamma}, \text{ επομένως } OE_1 = a.$$

Επίσης $EE_1^2 = OE \cdot KE = \gamma \left(\gamma - \frac{a^2}{\gamma} \right) = \gamma^2 - a^2 = b^2$, οπότε $EE_1 = b$.

Σχετική Άσκηση (Άσκηση 4 σελ.124)

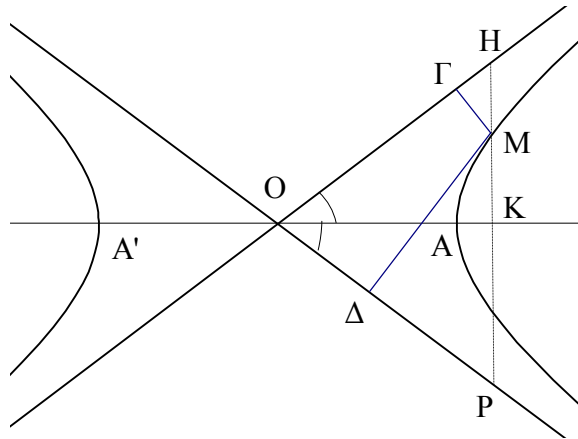
Να αποδειχθεί ότι το συνημίτονο μιας από τις γωνίες των ασύμπτωτων της παραπάνω υπερβολής είναι ίσο με $(2-\epsilon^2)/\epsilon^2$ (ϵ η εκκεντρότητα).

17. Εφαρμογή σελίδας 121

«Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων ενός σημείου υπερβολής από τις ασύμπτotes της είναι σταθερό».

Λύση

Έστω σημείο Μ υπερβολής (με σταθερή διαφορά 2α, εστιακή απόσταση 2γ, $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$), ΜΓ, ΜΔ τα κάθετα τμήματα προς τις ασύμπτotes και η κάθετη από το Μ στον κύριο άξονα (των εστιών) της υπερβολής που τον τέμνει στο σημείο Κ και την υπερβολή στα σημεία Η, Ρ.



Θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε το γινόμενο ΜΓ·ΜΔ (από πού αλλού;) μέσα από όμοια τρίγωνα. Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΗΓΜ, ΟΗΚ έχουμε

$$\frac{ΜΓ}{ΟΚ} = \frac{ΗΜ}{ΟΗ} \quad (1)$$

Επίσης από τα όμοια τρίγωνα ΟΚΡ, ΔΜΡ έχουμε $\frac{ΜΔ}{ΟΚ} = \frac{ΜΡ}{ΟΡ}$ (2)

Από τις δυο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει (ΟΗ = ΟΡ)

$$\frac{ΜΓ \cdot ΜΔ}{ΟΚ^2} = \frac{ΗΜ \cdot ΜΡ}{ΟΗ^2} \quad (3)$$

Επίσης έχουμε $ΗΜ \cdot ΜΡ = (ΗΚ - ΜΚ)(ΗΚ + ΜΚ) = ΗΚ^2 - ΜΚ^2$ (4)

αλλά $ΗΚ = \frac{\beta}{\alpha} ΟΚ$ και (επειδή το Μ είναι σημείο της υπερβολής, βλ. σημείωση στο τέλος), $\frac{ΟΚ^2}{\alpha^2} - \frac{ΜΚ^2}{\beta^2} = 1$ ή $ΜΚ^2 + \beta^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} ΟΚ^2 = ΗΚ^2$.

Έτσι από την (4) προκύπτει $ΗΜ \cdot ΜΡ = \beta^2$ (5)

Επίσης είναι $ΟΗ^2 = ΟΚ^2 + ΗΚ^2 = ΟΚ^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} ΟΚ\right)^2 = ΟΚ^2 \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}\right)$ (6)

Έτσι από την (3), λόγω των (5), (6), προκύπτει τελικά $ΜΓ \cdot ΜΔ = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ σταθερό.

Σημείωση

Η σχέση $\frac{OK^2}{\alpha^2} - \frac{MK^2}{\beta^2} = 1$ είναι μια ιδιότητα - χαρακτηριστική- της υπερβολής και

είναι αντίστοιχη της γνωστή μας εξίσωση υπερβολής στην Α.Γ. Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται (όπως και η γνωστή μας εξίσωση υπερβολής) με βάση τον ορισμό της υπερβολής, το Πυθ. Θεώρημα, θεώρημα διαμέσων κλπ. Δεν έχει σχέση λοιπόν με την θεώρηση καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, άρα μπορούμε να την χρησιμοποιούμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία των κωνικών τομών.

Συνήθως στα αρχαία κείμενα εμφανίζεται με την ισοδύναμη (αλλά εύχρηστη και ζωντανή γεωμετρικά - λόγος εμβαδών) μορφή

$$\frac{MK^2}{KA \cdot KA'} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \text{ή} \quad \frac{MK^2}{OK^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad (\text{όπου } A, A' \text{ οι κορυφές της υπερβολής})$$

«σύμπτωμα» κατά τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρους.

18. Άσκηση 2, σελίδα 124.

«Εστω (ε), (ε') οι εφαπτόμενες στις κορυφές της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στις

κορυφές A, A' αντίστοιχα. Αν Γ, Γ' είναι τα σημεία στα οποία μια τρίτη εφαπτομένη της υπερβολής τέμνει τις (ε), (ε') αντίστοιχα να αποδείξετε ότι

(i) $(A\Gamma)(A'\Gamma') = \beta^2$,

(ii) ο κύκλος με διάμετρο ΓΓ' διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής».

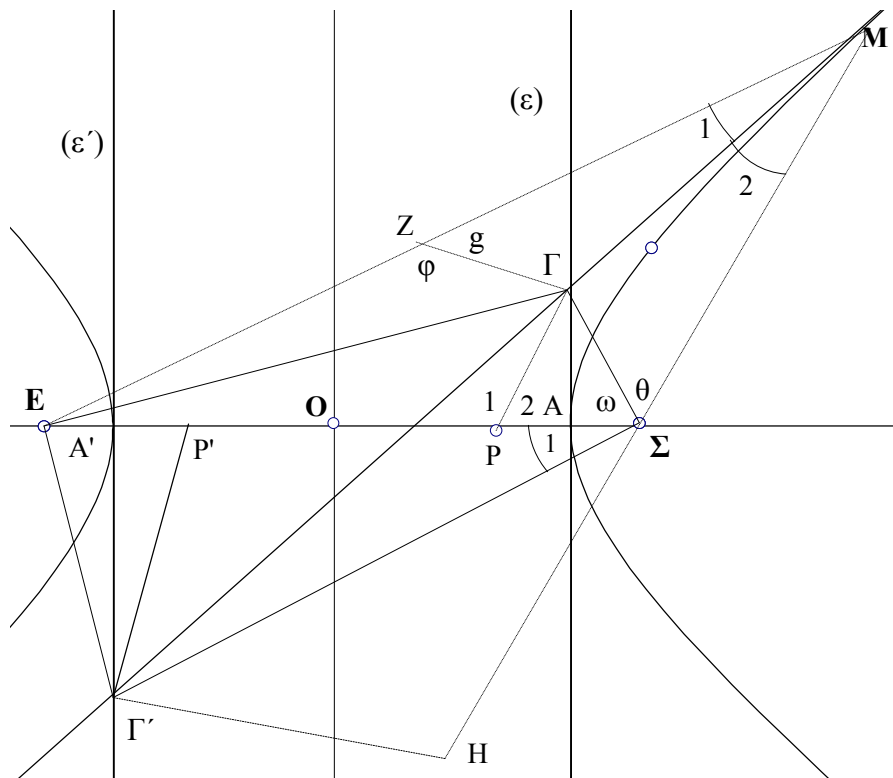
Λύση

Η άσκηση αυτή είναι εντελώς ανάλογη της άσκησης 15 (άσκηση 7, σελίδα 113) στην έλλειψη, αλλά θα την δούμε αναλυτικά. Οι κωνικές γενικά και ιδίως οι κεντρικές, έλλειψη και υπερβολή, έχουν πολλές κοινές ιδιότητες.

(ii) Θα δείξουμε πρώτα το (ii). Αρκεί να δείξουμε ότι η γωνία Γ'ΣΓ είναι ορθή (βλ. επόμενο σχήμα). Για το σκοπό αυτό θα δειχθεί ότι η ΣΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΣΑ καθώς και η ΣΓ' διχοτόμος της γωνίας ΗΣΑ', οπότε ΣΓ, ΣΓ' κάθετες.

Επί της ΜΕ παίρνουμε τμήμα ΜΖ = ΜΣ, οπότε ΖΕ = ΜΕ - ΜΖ = ΜΕ - ΜΣ = 2α και λόγω της ισότητας των γωνιών Μ₁, Μ₂ (ανακλαστική ιδιότητα της εφαπτομένης υπερβολής) τα τρίγωνα ΜΖΓ και ΜΓΣ είναι ίσα, οπότε ΓΖ = ΓΣ και γωνία $\hat{g} = \hat{\theta}$.

Όμοια παίρνουμε τμήμα $AP = AS$, οπότε $PE = AE - AS = 2a$ και $\Gamma\Sigma = \Gamma P$.



Τώρα τα τρίγωνα ΓZE , ΓPE έχουν τις πλευρές τους ίσες, άρα είναι ίσα. Έτσι οι γωνίες $\hat{\varphi} = \hat{P}_1$, οπότε $\hat{g} = \hat{P}_2$, αλλά $\hat{g} = \hat{\theta}$ και $\hat{P}_2 = \hat{\omega}$, οπότε $\hat{\omega} = \hat{\theta}$. Άρα $\Sigma\Gamma$ διχοτόμος.

Όμοια αποδεικνύεται ότι η $\Sigma\Gamma'$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{E}\Sigma H$: παίρνουμε $MH = ME$ και $A'E = A'P'$ και προκύπτουν τα ίσα τρίγωνα $\Gamma'P'\Sigma$, $\Sigma\Gamma'H$ κλπ) Όσο αφορά την γωνία $\Gamma'EG$ μπορούμε να ακολουθήσουμε παρόμοια πορεία, αλλά προκύπτει πιο απλά, αν παρατηρήσουμε ότι το τετράπλευρο $\Gamma'E\Gamma\Sigma$ είναι

εγγράψιμο: οι γωνίες $\Sigma_1 = \hat{E}\Sigma\Gamma'$, $\hat{E}\Gamma\Gamma'$ είναι ίσες (λόγω EG , $\Sigma\Gamma'$ διχοτόμοι, έχουμε $2\hat{\Sigma}_1 = \hat{E}\Sigma H = 2\hat{M}_1 + 2\hat{ZEG} = 2\hat{E}\Gamma\Gamma'$, κλπ) .

(i) Επειδή οι γωνίες $\hat{\omega} = \hat{\Gamma}\Sigma A'$ και $\hat{A}\Gamma'\Sigma$ είναι ίσες (πλευρές κάθετες κλπ) τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma\Sigma$, $A'\Gamma'\Sigma$ είναι όμοια οπότε έχουμε

$$\frac{A\Gamma}{A\Sigma} = \frac{\Sigma A}{A\Gamma'} \quad \text{ή} \quad A\Gamma \cdot A'\Gamma' = \Sigma A \cdot A'\Sigma = (O\Sigma - a)(O\Sigma + a) = \gamma^2 - a^2 = \beta^2.$$

Σχετική Άσκηση

Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών υπερβολής από μια εφαπτομένη της είναι σταθερό και ίσο με β^2 .

(Υπ. το τετράπλευρο $\Sigma\Gamma E\Gamma'$ είναι εγγράψιμο και με τα κάθετα τμήματα δημιουργούνται ορθ. τρίγωνα όμοια με τα $A\Gamma\Sigma$, $A'\Gamma'E$ κλπ).

19. Άσκηση 3, σελίδα 124.

«Έστω A, B δυο σημεία του δεξιού κλάδου της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Αν η ευθεία AB τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία E, I να αποδείξετε ότι $AE = BI$ (ή $EB = AI$)».

Λύση

Έστω υπερβολή με μεγάλο ημιάξονα α (σταθερή διαφορά 2α και εστιακή απόσταση 2γ , $\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$: β μικρός ημιάξονας). Για τον ορισμό των ασύμπτωτων στην Ε.Γ. βλέπε στην αρχή της λύσης της άσκησης 16.

Έστω M το μέσο του AB . Αρκεί ναδειχθεί ότι M είναι μέσο και του IE . Το σχέδιο της λύσης είναι να προβάλλουμε όλα τα σημεία, των ασύμπτωτων και της υπερβολής, στον κύριο άξονα και να δουλέψουμε με τις σχέσεις με τις οποίες δεσμεύονται. Από το Θ . Θαλή έχουμε ότι $PH = HZ$ και αρκεί να δείξουμε ότι

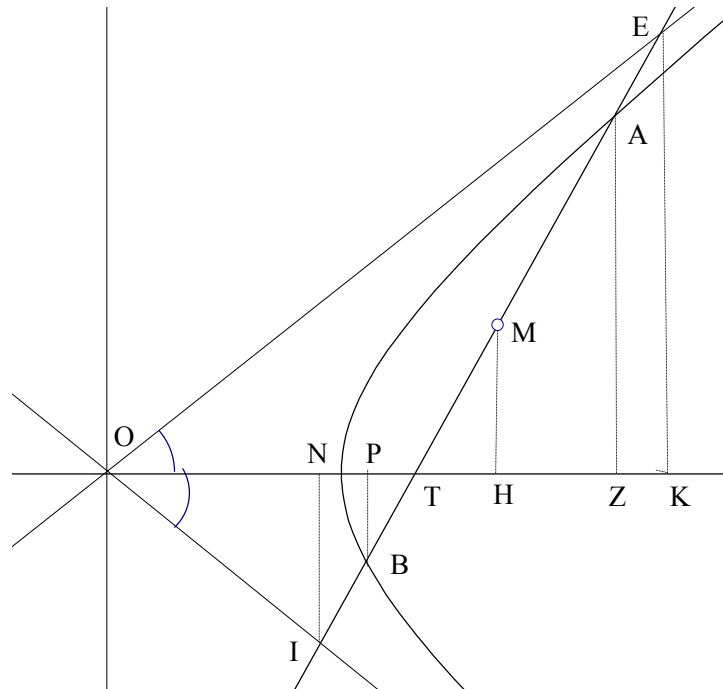
$$NH = HK \text{ ή } 2OH = ON + OK \text{ (χρήσιμη αυτή η ισοδυναμία).}$$

Επειδή τα σημεία A, B ανήκουν στην υπερβολή (βλ. σημείωση στη άσκηση 17)

$$\text{έχουμε } \frac{OZ^2}{\alpha^2} - \frac{AZ^2}{\beta^2} = 1 \text{ και } \frac{OP^2}{\alpha^2} - \frac{BP^2}{\beta^2} = 1$$

Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{OZ^2 - OP^2}{\alpha^2} = \frac{AZ^2 - BP^2}{\beta^2} \quad (1) \text{ και } \frac{AZ}{TZ} = \frac{BP}{TP} = \frac{EK}{TK} \text{ (από ομοιότητα)}$$



Αντικαθιστώντας στην (1) τα AZ, BP συναρτήσει του λόγου EK/TK και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{EK}{OK} = \frac{\beta}{\alpha}$, προκύπτει $\frac{OZ^2 - OP^2}{OK^2} = \frac{TZ^2 - TP^2}{TK^2}$ ή, λόγω

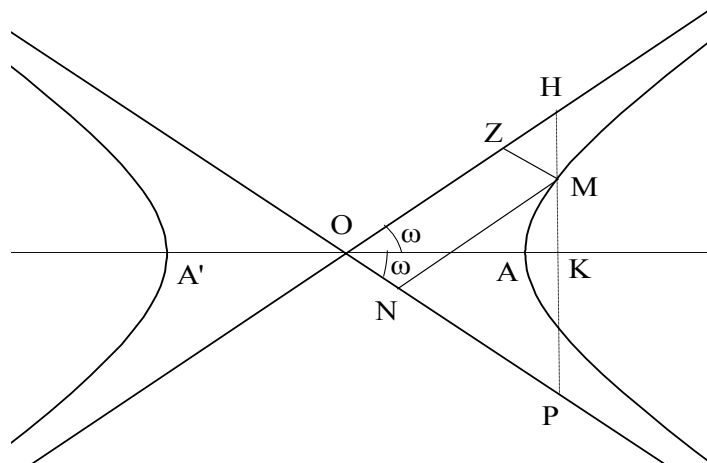
$$OZ + OP = 2OH, TZ - TP = 2TH, \text{ προκύπτει } \frac{OH}{TH} = \frac{OK^2}{TK^2} \quad (2)$$

20. Άσκηση 4, σελίδα 124.

«Από ένα σημείο M της υπερβολής φέρνουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτές της. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου παραλληλογράμμου είναι σταθερό».

Λύση

Για διευκόλυνση μπορούμε να βρούμε κατ' αρχήν την υπονήφια σταθερή τιμή του εμβαδού: παίρνουμε ως M την κορυφή A . Τότε το παραλληλόγραμμο $OZMN$ είναι ρόμβος και εύκολα βρίσκουμε ότι $(OZMN) = \alpha\beta/2$.
Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι $(OZMN) = \alpha\beta/2$.



Επειδή η γωνία του παραλληλογράμμου είναι 2ω , σταθερή, λογικό είναι να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό τύπο του εμβαδού τριγώνου με γωνία, οπότε $(OZMN) = OZ \cdot ON \eta\mu 2\omega$. Είναι $\epsilon\phi\omega = \beta/\alpha$ (εξ' ορισμού της ασύμπτωτης) οπότε

$$\eta\mu 2\omega = \frac{2\epsilon\phi\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad (1)$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε το γινόμενο $OZ \cdot ON$.

Έστω κάθετη από το M στον μεγάλο άξονα της υπερβολής που τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία H, P συμμετρικά ως προς τον άξονα. Είναι $HZ = ZM = ON$.

$$\text{Από τα όμοια τρίγωνα } ZHM, OHP \text{ έχουμε } \frac{OH}{HP} = \frac{HZ}{HM} = \frac{OH - HZ}{HP - HM} = \frac{OZ}{MP}$$

$$\text{Οπότε } \frac{HZ}{HM} \cdot \frac{OZ}{MP} = \frac{OH^2}{HP^2} \text{ ή λόγω } HZ = ZM = ON, \frac{ON \cdot OZ}{HM \cdot MP} = \frac{OH^2}{HP^2} \quad (2)$$

$$\text{Είναι } OH^2 = OK^2 + HK^2 = OK^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} OK\right)^2 = OK^2 \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}\right) = \epsilon^2 OK^2, \text{ οπότε} \\ OH^2 = \epsilon^2 OK^2 \quad (3)$$

$$\text{Επίσης έχουμε } HM \cdot MP = (HK - MK)(HK + MK) = HK^2 - MK^2 \quad (4), \text{ αλλά}$$

$$HK = \frac{\beta}{\alpha} OK \text{ και } MK^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} OK^2 - \beta^2 = HK^2 - \beta^2 \text{ (αφού } M \text{ σημείο της υπερβολής,} \\ \text{βλ. σημείωση στην άσκηση 17), οπότε αντικαθιστώντας στην (4) προκύπτει} \\ HM \cdot MP = \beta^2 \quad (5)$$

