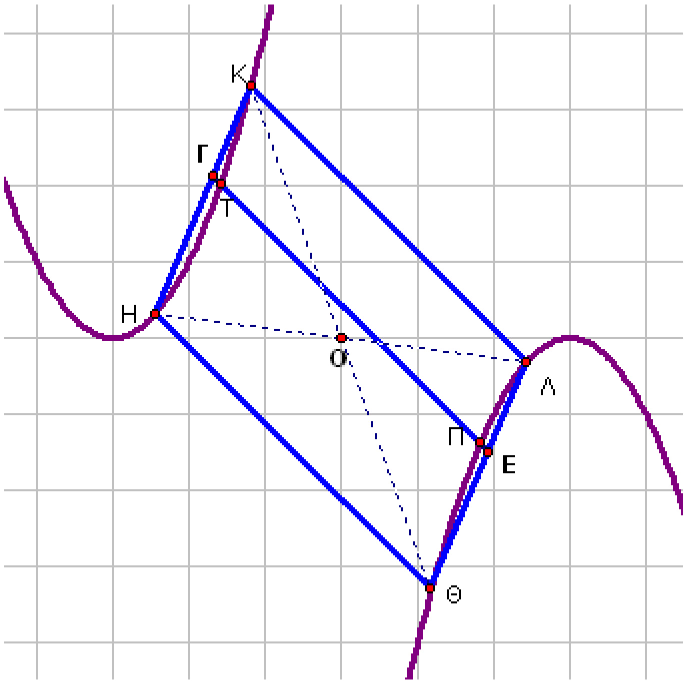
Βοηθητική Πρόταση.

Αν δύο παραβολές είναι συμμετρικές με κέντρο συμμετρίας το Ο τότε το τμήμα που συνδέει δύο σημεία τους με την ελαχίστη μεταξύ τους απόσταση διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας Ο.

Απόδειξη

Αν Κ,Λ τα ζητούμενα σημεία και ΚΛ δεν διέρχεται από το Ο τότε και τα άκρα του συμμετρικού του ΚΛ (ΗΘ) δηλαδή τα σημεία Θ, Η απέχουν και αυτά μεταξύ τους ελαχίστη απόσταση . Είναι ΗΘΛΚ παραλληλόγραμμο. Αν από τυχαίο σημείο Γ της χορδής ΗΚ φέρω ΓΕ παράλληλη και ίση με την ΗΘ τότε το τμήμα ΤΠ (που ορίζεται ανάμεσα στις παραβολές) είναι μικρότερο (λόγω κυρτότητας) του ΗΘ=ελάχιστη απόσταση που είναι άτοπο.

Επομένως το τμήμα ΚΛ οφείλει να περνά από το κέντρο συμμετρίας Ο



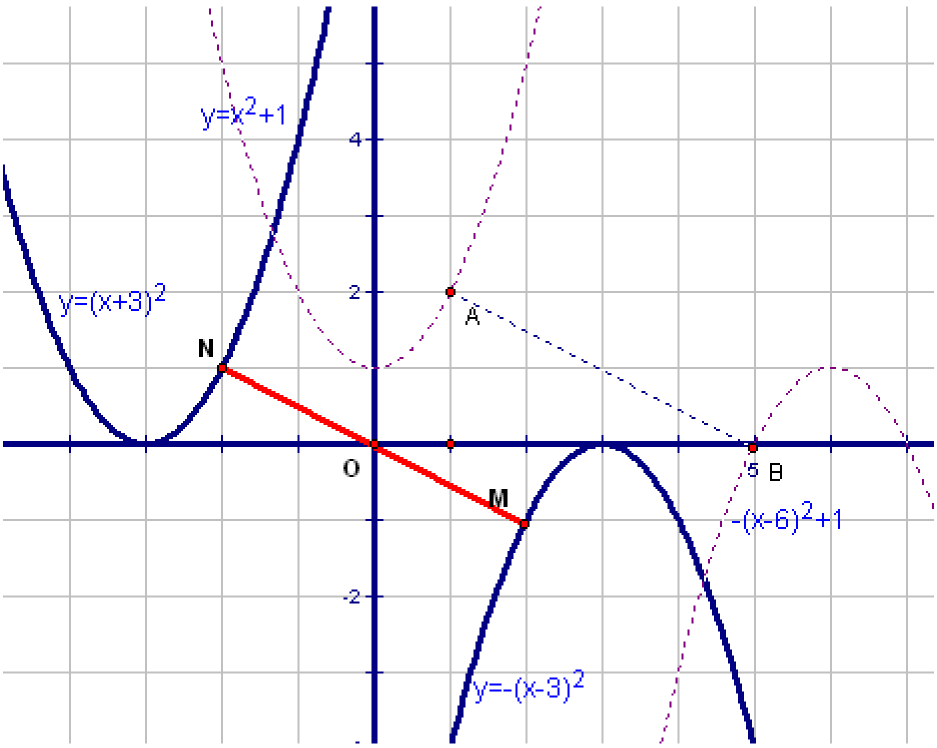
Δίνονται οι $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=-x^2+12x-35$. Να βρεθούν $A \in C_f$ και $B \in C_g$ ώστε η απόσταση ΑΒ να είναι ελάχιστη *Προταθείσα από Μαυρογιάννη Ν*

Είναι $g(x)=-x^2+12x-35 = -(x-3)^2+1$

Μεταφέρω τις παραβολές τρείς μονάδες (για ευκολία) αριστερα και μία μονάδα προς τα κάτω οπότε προκύπτουν οι παραβολές $y=(x+3)^2$, $y=-(x-3)^2$ των οποίων η σχετική θέση δεν είναι διαφορετική από αυτή των αρχικών παραβολών. Οι δύο παραβολές είναι συμμετρικές μεταξύ τους με κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0)** και βάσει της προηγούμενης πρότασης το ελάχιστο τμήμα ΜΝ θα διέρχεται από το κέντρο συμμετρίας. Επομένως αναζητούμε σημείο Ν επί της $y=(x+3)^2$ έτσι ώστε ΟΜ ελάχιστο. Εστω d η απόσταση του Ο απο τυχαίο σημείο $(\chi,(\chi+3)^2)$ της $y=(x+3)^2$. Τότε

$$d=\sqrt{x^2+(x+3)^4}$$

Άρα έχω max d όταν $\chi^2+(\chi+3)^4$=max



Είναι $\varepsilon(\chi)= \chi^2+(\chi+3)^4$ και $\varepsilon'(\chi)=2\chi+4(\chi+3)^3 = 4\chi^3+36\chi^2+110\chi+108=2(\chi+2)(2\chi^2+14\chi+27)$

$\varepsilon'(\chi)=0 \Leftrightarrow \chi=-2$ και $\varepsilon'(\chi)>0 \Leftrightarrow \chi>-2$ άρα στο -2 έχουμε ελάχιστο το $(-2+3)^2=1$. Επομένως οι συντεταγμένες του Ν είναι (-2,1) και του συμμετρικού του Μ(2,-1). Επομένως οι συντεταγμένες των ζητούμενων σημείων Α και Β είναι [(-2+3,1+1) ,(2+3,-1+1)] ή [(1,2) ,(5,0)]

** αφού αν $\varphi(\chi)= (\chi+3)^2$ και $\tau(\chi)=- (\chi-3)^2$ ισχύει $\varphi(-\chi)=- \tau(\chi)$

Παν. Γιαννόπουλος