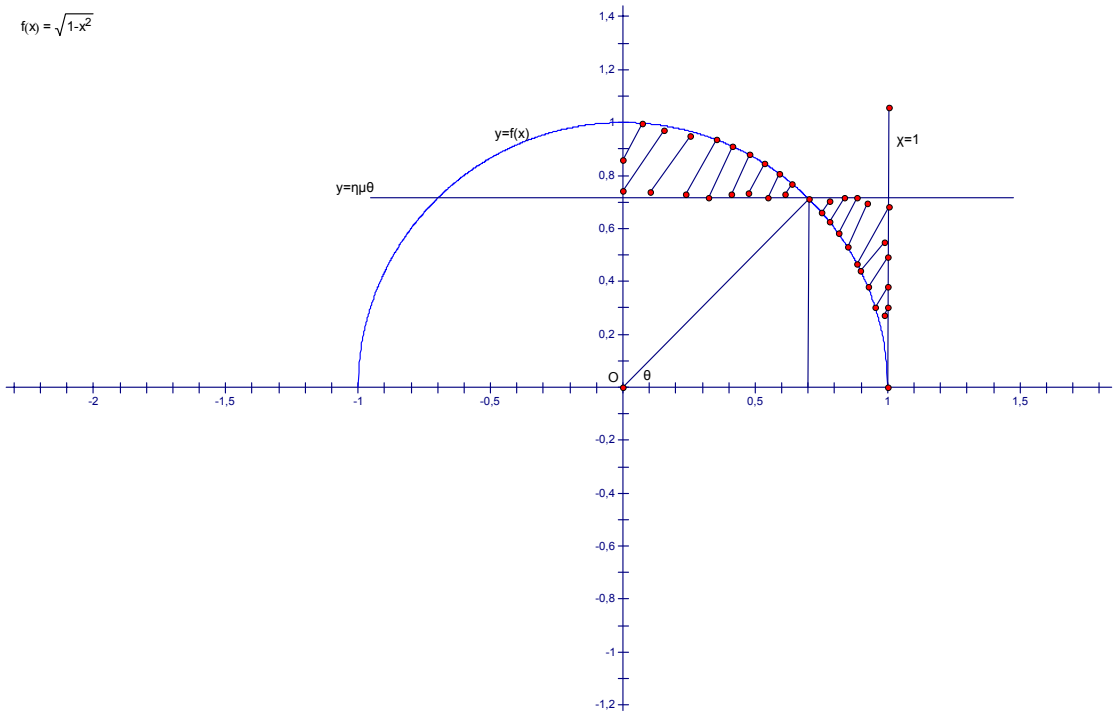
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ - ΕΜΒΑΔΟΝ

Έστω η συνάρτηση $f(\theta)=\int_0^1\left|\sqrt{1-x^2}-\eta\mu\theta\right|dx$ με $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

1) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

2) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta$.

ΛΥΣΗ



(α) Η συνάρτηση f παριστάνει το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του σχήματος . Άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο μικτόγραμμων τριγώνων είναι

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot 1^2-\frac{1}{2}\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$$
$$-\left[\frac{1}{2}\theta\cdot 1^2-\frac{1}{2}\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta\right]=$$

$=\frac{\pi}{4}-\theta+(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta$ με $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ με $f'(\theta)=\sigma\upsilon\nu\theta-2(\sigma\upsilon\nu\theta)^2$

Η εξίσωση f'(θ)=0 δίνει $\theta=\frac{\pi}{2}$ ή $\theta=\frac{\pi}{3}$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{\pi}{3}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$. Επειδή $f(0)=\frac{\pi}{4}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{4}$ και $f(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$, η f παρουσιάζει μέγιστο στο x=0 και ελάχιστο στο $x=\frac{\pi}{3}$.

(β) Για την παραπάνω συνάρτηση βρίσκουμε $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta=\cdots=\frac{1}{2}$.

Αθ. Μπεληγιάννης -- Απρίλης 2009