ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ακολουθία → συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο N*, των θετικών ακέραιων
(πάντα $\boxed{\nu \in N^*}$)

Έστω ακολουθία (α_ν) :

ΟΡΟΙ

α_1 → πρώτος όρος της ακολουθίας α_2 → δεύτερος όρος της ακολουθίας α_3 → τρίτος όρος της ακολουθίας α_4 → τέταρτος όρος της ακολουθίας α_{20} → εικοστός όρος της ακολουθίας α_{57} → 57ος όρος της ακολουθίας … α_ν → ν-οστος / γενικός όρος της ακολουθίας … α_κ → κ-οστος όρος της ακολουθίας $\alpha_{3\lambda+5}$ → (3λ+5) ος όρος της ακολουθίας … *** Μια ακολουθία δεν έχει τελευταίο όρο ! *** Ένας αριθμός δεν έχει ποτέ δείκτη ! (το 3_ν δεν σημαίνει τίποτα) *** Αντικαθιστώ την τιμή του δείκτη κάθε φορά	π.χ. αν $\alpha_\nu = 3\nu + 4^\nu - 5$ $\alpha_1 = 3\cdot1 + 4^1 - 5$ $\alpha_2 = 3\cdot2 + 4^2 - 5$ $\alpha_3 = 3\cdot3 + 4^3 - 5$ $\alpha_{20} = 3\cdot20 + 4^{20} - 5$ $\alpha_{\nu+1} = 3\cdot(\nu+1) + 4^{\nu+1} - 5$ $\alpha_{2\nu} = 3\cdot(2\nu) + 4^{2\nu} - 5$ $\alpha_{3\nu+2} = 3\cdot(3\nu+2) + 4^{3\nu+2} - 5$ *** Γενικά : $\alpha_{\nu+1} \neq \alpha_\nu + 1$ $\alpha_{3\nu+2} \neq \alpha_{3\nu} + 2$ $\alpha_{\alpha\nu+\beta} \neq \alpha_{\alpha\nu} + \beta$ με $\alpha, \beta \in R$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ

$S_1 = \alpha_1$

$S_2 = \alpha_1 + \alpha_2$

$S_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$$S_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{\nu-3} + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$$

$S_{35} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{32} + \alpha_{33} + \alpha_{34} + \alpha_{35}$

$S_{57} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{54} + \alpha_{55} + \alpha_{56} + \alpha_{57}$

$S_{2\nu} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} + \dots + \alpha_{2\nu-2} + \alpha_{2\nu-1} + \alpha_{2\nu}$

$S_{3\nu+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1} + \dots + \alpha_{2\nu-1} + \alpha_{2\nu} + \alpha_{2\nu+1} + \dots + \alpha_{3\nu-1} + \alpha_{3\nu} + \alpha_{3\nu+1}$

ΕΥΡΕΣΗ α_ν ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ S_ν

$$\begin{cases} \alpha_1 = S_1 \\ \alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1}, \ \nu > 1 \end{cases}$$

(άθροισμα ενός πρώτου όρου = πρώτος όρος)
(δεν ορίζεται το S_o)

$$\left.\begin{aligned} S_\nu &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{\nu-3} + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \\ S_{\nu-1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{\nu-3} + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} \end{aligned}\right\} \quad S_\nu = S_{\nu-1} + \alpha_\nu \quad \alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1}$$

(***)

π.χ.
$\alpha_{23} = S_{23} - S_{22}$, $\alpha_{59} = S_{59} - S_{58}$, $\alpha_{\nu+1} = S_{\nu+1} - S_\nu$, $\alpha_{2\nu} = S_{2\nu} - S_{2\nu-1}$

ΕΥΡΕΣΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

$\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + \alpha_{\kappa+2} + \alpha_{\kappa+3} + \ \dots\ + \alpha_{\lambda-3} + \alpha_{\lambda-2} + \alpha_{\lambda-1} + \alpha_\lambda \ = ; \quad , \quad \lambda > \kappa$

$\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + \alpha_{\kappa+2} + \alpha_{\kappa+3} + \ \dots\ + \alpha_{\lambda-3} + \alpha_{\lambda-2} + \alpha_{\lambda-1} + \alpha_\lambda \ = S_\lambda - S_{\kappa-1}$

$(= \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ \dots\ + \alpha_{\kappa-2} + \alpha_{\kappa-1} + \alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + \ \dots\ + \alpha_{\lambda-1} + \alpha_\lambda$
$\quad - \ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{\kappa-2} - \alpha_{\kappa-1} \ )$

π.χ. $\alpha_{50} + \alpha_{51} + \ \dots\ + \alpha_{72} + \alpha_{73} = S_{73} - S_{49}$
$\alpha_{29} + \alpha_{30} + \ \dots\ + \alpha_{108} + \alpha_{109} = S_{109} - S_{28}$
$\alpha_{15} + \alpha_{16} + \ \dots\ + \alpha_{33} + \alpha_{34} = S_{34} - S_{14}$
$\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + \ \dots\ + \alpha_{2\nu-1} + \alpha_{2\nu} = S_{2\nu} - S_{\kappa-1}$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΟΔΩΝ

Α.Π	Γ.Π.

ΟΡΙΣΜΟΣ

$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega \qquad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$

$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda \qquad \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$

ΜΟΡΦΗ ν-ΟΣΤΟΥ ΟΡΟΥ

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega$

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

$$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ

$$S_\nu = \big(2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\big)\frac{\nu}{2}$$

$$S_\nu = \begin{cases} a_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} & , \lambda \neq 1 \\ \nu \cdot \alpha_1 & , \ \lambda = 1 \end{cases}$$

$$S_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu)\frac{\nu}{2}$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ (Α.Π)

$\nu \in N^*$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Με λόγια : Μια ακολουθία (α_ν) λέγεται Α.Π. αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντα αριθμού.

Τον αριθμό αυτόν τον λέμε διαφορά (ω) της προόδου. $\omega \in \mathcal{R}$

Με σχέσεις :

ακολουθία (α_ν) είναι Α.Π. αν και μόνο αν $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$

$(\alpha_{50} - \alpha_{49} = \alpha_{49} - \alpha_{48} = \alpha_{48} - \alpha_{47} = \dots = \alpha_{18} - \alpha_{17} = \alpha_{17} - \alpha_{16} = \dots = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_1\ (= \omega)\ )$

Πως αναγνωρίζω μια Α.Π.

ΑΡΚΕΙ ΟΙ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΙ ΟΡΟΙ ΝΑ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟ ΑΡΙΘΜΟ $[\omega = \alpha_2 - \alpha_1]$

π.χ.

15, 18, 21, … , 363 (διαφέρουν κατά 3) $[\omega = 18 - 15 = 3]$

30 , 15, 0, … , -135 (διαφέρουν κατά -15) $[\omega = 15 - 30 = -15]$

Πως αποδεικνύω ότι μια ακολουθία είναι μια Α.Π.

ΑΡΚΕΙ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ = ΣΤΑΘΕΡΟ

(ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΤΟΥ ν, ΑΡΙΘΜΟΣ) (ω =ΣΤΑΘΕΡΟ)

π.χ. $\alpha_\nu = 3\nu + 5$

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 3(\nu + 1) + 5 - (3\nu + 5) = 3\nu + 3 + 5 - 3\nu - 5 =$

$= 3\nu - 3\nu + 5 - 5 + 3 = 3$

η ακολουθία α_ν είναι Α.Π. με διαφορά ω = 3

ΕΙΔΗ Α.Π.

Γνησίως αύξουσα $\omega > 0$ (π.χ. 3, 6, 9, 12, 15, ….)

Σταθερή $\omega = 0$ (π.χ. 3, 3, 3, 3, 3, ….)

Γνησίως φθίνουσα $\omega < 0$ (π.χ. 3, 0, -3, -6, -9, ….)

ΜΟΡΦΗ ν-ΟΣΤΟΥ ΟΡΟΥ Α.Π.

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega$

π.χ.

$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega$

$\alpha_4 = \alpha_1 + 3\omega$

$\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega$

…

$\alpha_{50} = \alpha_1 + 49\omega$

$\alpha_{237} = \alpha_1 + 236\omega$

…

$\alpha_{2\mu+1} = \alpha_1 + 2\mu\,\omega$

$\alpha_{3\nu+4} = \alpha_1 + (3\nu + 3)\omega$

Διότι

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1 \\
\cancel{\alpha_2} &= \alpha_1 + \omega \\
\cancel{\alpha_3} &= \cancel{\alpha_2} + \omega \\
\cancel{\alpha_4} &= \cancel{\alpha_3} + \omega \\
&\dots \\
\cancel{\alpha_{\nu-1}} &= \cancel{\alpha_{\nu-2}} + \omega \\
\alpha_\nu &= \cancel{\alpha_{\nu-1}} + \omega
\end{aligned}\right\}\ (\nu\text{-1) σχέσεις}$$

(προσθέτω κατά μέλη)

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega \ , \ \nu \in N^*$

*** *Όταν προσθέτω κατά μέλη ισότητες που έχουν εκατέρωθεν τους ίδιους όρους αυτοί διαγράφονται*

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ Α.Π.

ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ :

… , x-4ω, x-3ω , x-2ω , x-ω , x , x+ω , x+2ω , x+3ω , x+4ω , …

ο μεσαίος όρος

διαφορά = ω

π.χ. 3 διαδοχικοί όροι είναι οι : x-ω , x , x+ω
5 διαδοχικοί όροι είναι οι : x-2ω , x-ω , x , x+ω , x+2ω

ΑΡΤΙΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ :

… , x-7κ, x-7κ, x-5κ , x-3κ , x-κ , x+κ , x+3κ , x+5κ , x+7κ , …

διαφορά : ω=2κ

2 μεσαίοι όροι

π.χ. 4 διαδοχικοί όροι είναι οι : x-3κ , x-κ , x+κ , x+3κ
6 διαδοχικοί όροι είναι οι : x-5κ , x-3κ , x-κ , x+κ , x+3κ, x+5κ

Χρησιμεύουν όταν δίνονται σχέσεις που ικανοποιούν όροι συμμετρικοί ως προς τους μεσαίους όρους

π.χ. Άθροισμα 3 διαδοχικών όρων Α.Π. είναι 30 . Ποιός είναι ο μεσαίος όρος ;

Έστω x-ω , x , x+ω οι ζητούμενοι αριθμοί

(x-ω)+ x + (x+ω) = 30 3x = 30 x = 10 , ο μεσαίος όρος

Σχόλιο : η τριάδα όρων Α.Π. με άθροισμα 30 δεν είναι μοναδική ,
αλλά υπάρχουν άπειρες , όλες όμως περιέχουν το 10 σαν μεσαίο όρο

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ Α.Π.

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

α , β , γ διαδοχικοί όροι Α.Π.

(β-α = γ-α (= ω))

Ο αριθμός που προκύπτει προσθέτοντας ν αριθμούς και διαιρώντας με το πλήθος τους (ν) λέγεται αριθμητικός μέσος τους

Ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ λέγεται αριθμητικός μέσος των α , β

Ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ λέγεται αριθμητικός μέσος των α , β , γ

Ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4}$ λέγεται αριθμητικός μέσος των α , β , γ , δ (κ.ο.κ.)

π.χ. ο αριθμητικός μέσος των 10 και -15 είναι ο -12,5
ο αριθμητικός μέσος των 30 και 32 είναι ο 31
ο αριθμητικός μέσος των -4 και -16 είναι ο -10
ο αριθμητικός μέσος των 30 , -20 και 50 είναι ο 30

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ Α.Π.

$$S_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu)\frac{\nu}{2}$$

$$S_\nu = \left(2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right)\frac{\nu}{2}$$

π.χ.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{50} = (\alpha_1 + \alpha_{50})\frac{50}{2} = \left(2\alpha_1 + 49\omega\right)\frac{50}{2}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{78} = (\alpha_1 + \alpha_{78})\frac{78}{2} = \left(2\alpha_1 + 77\omega\right)\frac{78}{2}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{109} = (\alpha_1 + \alpha_{109})\frac{109}{2} = \left(2\alpha_1 + 108\omega\right)\frac{109}{2}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΟΡΩΝ Α.Π.

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Δίνονται οι αριθμοί α, β ($\alpha \neq \beta$) . Παρεμβάλλουμε (βάζουμε) κ αριθμούς ανάμεσα τους (οι οποίοι λέγονται και αριθμητικοί ενδιάμεσοι των α, β) έτσι ώστε να αποτελούν όλοι οι αριθμοί μαζί διαδοχικούς όρους Α.Π. Να υπολογιστούν οι παραπάνω κ αριθμοί .

ΕΠΙΛΥΣΗ

'Εστω $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa$ οι αριθμοί που παρεμβάλλουμε ,
τότε θα έχουμε την Α.Π. : $\alpha, x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa, \beta$
(α_ν) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{\kappa+1}, \alpha_{\kappa+2}$ αντίστοιχα

$\alpha_{\kappa+2} = \alpha_1 + (\kappa + 1)\,\omega$ $\quad$ $\beta = \alpha + (\kappa + 1)\,\omega$ $\quad$ $\omega = \dfrac{\beta - \alpha}{\kappa + 1}$ (η διαφορά της Α.Π.)

ο τελευταίος παρεμβαλλόμενος όρος $x_\kappa = \alpha_{\kappa+1} = \beta - \omega$
ο πρώτος παρεμβαλλόμενος όρος $x_1 = \alpha_2 = \alpha + \omega$

π.χ. Να βρεθούν οι αριθμητικοί ενδιάμεσοι των αριθμών 5 και 50 , έτσι ώστε ο τελευταίος από τους αριθμούς να είναι τριπλάσιος από τον δεύτερο τους .

'Εστω $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa$ οι αριθμοί που παρεμβάλλουμε , έτσι ώστε οι αριθμοί $5, x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa, 50$ να είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. με διαφορά ω .

α΄ τρόπος) $x_\kappa = 3\,x_2$ $\quad$ $50 - \omega = 3\,(5 + 2\omega)$ $\quad$ $\omega = 5$

$50 = 5 + (\kappa + 1)\,\omega$ $\quad$ $50 = 5 + (\kappa + 1)\,5$ $\quad$ $\kappa = 8$

β΄ τρόπος) $x_\kappa = 3\,x_2$ $\quad$ $\alpha_{\kappa+1} = 3 \cdot \alpha_3$ $\quad$ $\begin{cases} 5 + \kappa \cdot \omega = 3\,(5 + 2\,\omega) \\ 50 = 5 + (\kappa + 1)\,\omega \end{cases}$

$(\kappa, \omega) = (8, 5)$

οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45

Σχόλιο : δεν γνωρίζουμε αν η πρόοδος είναι αύξουσα ή φθίνουσα , ποιός όρος προηγείται , το 5 ή το 50 αντίστοιχα , αλλά σίγουρα περιέχει αυτούς τους 8 αριθμούς

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ (Γ.Π) $\nu \in N^*$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Με λόγια : Μια ακολουθία (α_ν) λέγεται Α.Π. αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πολλαπλασιασμό του ίδιου πάντα μη μηδενικού αριθμού. Τον αριθμό τον λέμε λόγο (λ) της προόδου. $\lambda \in \mathcal{R}$

Με σχέσεις :

ακολουθία (α_ν) είναι Γ.Π. αν και μόνο αν $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda$ $\quad \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda$

$$\left(\frac{\alpha_{50}}{\alpha_{49}} = \frac{\alpha_{49}}{\alpha_{48}} = \frac{\alpha_{48}}{\alpha_{47}} = \ldots = \frac{\alpha_{18}}{\alpha_{17}} = \frac{\alpha_{17}}{\alpha_{16}} = \ldots = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \ (= \lambda) \right)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ :

Δεχόμαστε ότι $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda \neq 0$ $\quad \alpha_\nu \neq 0$, για κάθε $\nu \in N^*$

Πως αναγνωρίζω μια Γ.Π.

ΑΡΚΕΙ ΟΙ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΙ ΟΡΟΙ ΝΑ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟ $\left[\lambda = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]$

π.χ.

$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ (διαφέρουν κατά $\frac{1}{2}$) $\quad \left[\lambda = \dfrac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{1}} = \dfrac{1}{2}\right]$

$7, -\frac{7}{3}, \frac{7}{9}, -\frac{7}{27}, \frac{7}{81}, \ldots$ (διαφέρουν κατά $-\frac{1}{3}$) $\quad \left[\lambda = \dfrac{-\frac{7}{3}}{\frac{7}{1}} = \dfrac{-1}{3}\right]$

Πως αποδεικνύω ότι μια ακολουθία είναι μια Γ.Π.

ΑΡΚΕΙ $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} =$ ΣΤΑΘΕΡΟ

(ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΤΟΥ ν, ΑΡΙΘΜΟΣ) (λ =ΣΤΑΘΕΡΟ)

π.χ. $\alpha_\nu = 3^\nu$

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{3^{\nu+1}}{3^\nu} = 3^{(\nu+1)-\nu} = 3^{\nu-\nu+1} = 3$$

η ακολουθία α_ν είναι Γ.Π. με λόγο λ = 3

και πρώτο όρο $\alpha_1 = 3^1 = 3$

ΕΙΔΗ Γ.Π.

Διατηρεί σταθερό πρόσημο $\quad \lambda > 0$

Γνησίως αύξουσα $\quad \lambda > 1 \quad$ (π.χ. 5, 10, 20, 40, 80, ...)

Σταθερή $\quad \lambda = 1 \quad$ (π.χ. 5, 5, 5, 5, 5, ...)

Γνησίως φθίνουσα $0 < \lambda < 1$ (π.χ. $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, ...$)

λ<0

Έχει εναλλάξ πρόσημα

Είδος (π.χ. 5, -10, -20, 40, -80, ...)

Εναλάσσουσας (π.χ. $5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{5}{81}, ...$)

ΜΟΡΦΗ ν-ΟΣΤΟΥ ΟΡΟΥ Γ.Π.

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ *Διότι*

π.χ.
$\alpha_2 = \alpha_1 \lambda$
$\alpha_3 = \alpha_1 \lambda^2$
$\alpha_4 = \alpha_1 \lambda^3$
$\alpha_5 = \alpha_1 \lambda^4$
…
$\alpha_{50} = \alpha_1 \lambda^{49}$
$\alpha_{237} = \alpha_1 \lambda^{233}$
…
$\alpha_{2\mu+1} = \alpha_1 \lambda^{2\mu}$
$\alpha_{3\nu+4} = \alpha_1 \lambda^{3\nu+3}$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{\alpha_1} &= \alpha_1 \\ \cancel{\alpha_2} &= \cancel{\alpha_1}\, \lambda \\ \cancel{\alpha_3} &= \cancel{\alpha_2}\, \lambda \\ \cancel{\alpha_4} &= \cancel{\alpha_3}\, \lambda \\ &\;\;... \\ \cancel{\alpha_{\nu-1}} &= \cancel{\alpha_{\nu-2}}\, \lambda \\ \otimes \quad \alpha_\nu &= \cancel{\alpha_{\nu-1}}\, \lambda \end{aligned}\right\} (\nu\text{-1) σχέσεις}$$

(πολλαπλασιάζω κατά μέλη)

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$

$\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}, \ \nu \in N^*$

*** *Όταν πολλαπλασιάζω κατά μέλη ισότητες που έχουν εκατέρωθεν τους ίδιους όρους αυτοί διαγράφονται*

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ Γ.Π.

ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ :

$$..., \frac{x}{\lambda^5}, \frac{x}{\lambda^4}, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}, x, x\lambda, x\lambda^2, x\lambda^3, x\lambda^4, x\lambda^5, ...$$

ο μεσαίος όρος

λόγος = λ

π.χ. 3 διαδοχικοί όροι είναι οι : $\frac{x}{\lambda}, x, x\lambda$

5 διαδοχικοί όροι είναι οι : $\frac{x}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}, x, x\lambda, x\lambda^2$

ΑΡΤΙΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ :

λ > 0

$$..., \frac{x}{\kappa^7}, \frac{x}{\kappa^5}, \frac{x}{\kappa^3}, \frac{x}{\kappa}, x\kappa, x\kappa^3, x\kappa^5, x\kappa^7, ...$$

2 μεσαίοι όροι

λόγος : $\lambda = \kappa^2$

π.χ. 4 διαδοχικοί όροι είναι οι : $\frac{x}{\kappa^3}, \frac{x}{\kappa}, x\kappa, x\kappa^3$

6 διαδοχικοί όροι είναι οι : $\frac{x}{\kappa^5}, \frac{x}{\kappa^3}, \frac{x}{\kappa}, x\kappa, x\kappa^3, x\kappa^5$

$\lambda < 0$

$$\ldots,\ -\frac{x}{\kappa^7},\frac{x}{\kappa^5},-\frac{x}{\kappa^3},\frac{x}{\kappa},-x\kappa\ ,x\kappa^3,-x\kappa^5,x\kappa^7,\ldots$$

λόγος : λ= -κ²

2 μεσαίοι όροι

π.χ. 4 διαδοχικοί όροι είναι οι : $-\frac{x}{\kappa^3},\frac{x}{\kappa},-x\kappa\ ,x\kappa^3$

6 διαδοχικοί όροι είναι οι : $\frac{x}{\kappa^5},-\frac{x}{\kappa^3},\frac{x}{\kappa},-x\kappa\ ,x\kappa^3,-x\kappa^5$

Χρησιμεύουν όταν δίνονται σχέσεις που ικανοποιούν όροι συμμετρικοί ως προς τους μεσαίους όρους

π.χ. Γινόμενο 6 διαδοχικών όρων Γ.Π. είναι 64 .
Ποια μορφή έχουν οι αριθμοί αυτοί ;

Για λ >0 , έστω $\frac{x}{\kappa^5},\frac{x}{\kappa^3},\frac{x}{\kappa},x\kappa\ ,x\kappa^3,x\kappa^5$ οι ζητούμενοι αριθμοί με $\lambda = \kappa^2$

$\frac{x}{\kappa^5}\cdot\frac{x}{\kappa^3}\cdot\frac{x}{\kappa}\cdot x\kappa\cdot x\kappa^3\cdot x\kappa^5 = 64$ $\quad x^6 = 2^6 \quad x = \pm 2$

Θα είναι οι : $\frac{2}{\kappa^5},\frac{2}{\kappa^3},\frac{2}{\kappa},2\kappa\ ,2\kappa^3,2\kappa^5$ ή $-\frac{2}{\kappa^5},-\frac{2}{\kappa^3},-\frac{2}{\kappa},-2\kappa\ ,-2\kappa^3,-2\kappa^5$

Η περίπτωση λ< 0 απορρίπτεται , διότι 3 θετικοί και 3 αρνητικοί αριθμοί έχουν αρνητικό γινόμενο , αφού για λ <0 οι όροι της Γ.Π. έχουν εναλλάξ πρόσημα

ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ Γ.Π.

α , β , γ διαδοχικοί όροι Α.Π.

$\left(\ \frac{\gamma}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha}\ (=\lambda)\ \right)$

$$\beta^2 = \alpha\cdot\gamma$$

Ο θετικός αριθμός που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας ν αριθμούς και παίρνοντας την ν-ιοστη ρίζα του γινομένου τους λέγεται γεωμετρικός μέσος των αριθμών αυτών
(με την προϋπόθεση ότι η υπόρριζη ποσότητα είναι θετική)

Ο αριθμός $\sqrt{\alpha\beta}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α , β

Ο αριθμός $\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α , β , γ

Ο αριθμός $\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α , β , γ , δ (κ.ο.κ.)

π.χ. ο γεωμετρικός μέσος των 7 και 7 είναι ο 7
ο γεωμετρικός μέσος των 90 και 10 είναι ο 30
ο γεωμετρικός μέσος των -6 και -12 είναι ο $6\sqrt{2}$
ο γεωμετρικός μέσος των -30 , -60 και 50 είναι ο 300

Σχόλια : 1. Δεν υπάρχει πάντα ο γεωμετρικός μέσος δυο ή περισσοτέρων αριθμών (αφού πρέπει η υπόρριζη ποσότητα να είναι θετική)

π.χ. οι αριθμοί 1, 9 έχουν γεωμετρικό μέσο το 3 ($=\sqrt{1\cdot 9}$),
οι αριθμοί -1, -9 έχουν γεωμετρικό μέσο το 3 ($=\sqrt{(-1)\cdot(-9)}$),
οι αριθμοί 1, -9 δεν έχουν γεωμετρικό μέσο διότι $1\cdot(-9)<0$
οι αριθμοί -1, 9 δεν έχουν γεωμετρικό μέσο διότι $(-1)\cdot 9<0$

2. Η έννοια του γεωμετρικού μέσου δυο αριθμών είναι ανεξάρτητη από του γεωμετρικού ενδιαμέσου τους , του αριθμού που βρίσκεται ανάμεσα τους ώστε να αποτελούν οι 3 μαζί διαδοχικούς όρους Γ.Π.

π.χ. έστω η Γ.Π. 1, 2, 4, 8 , 16 , … (λ = 2)
ο γεωμετρικός μέσος των 2 και 8 είναι ο 4 που ανήκει στην Γ.Π.

έστω η Γ.Π. 1, -2, 4,- 8 , 16 , … (λ = -2)
ο γεωμετρικός μέσος των -2 και -8 είναι ο 4 που ανήκει στην Γ.Π.
ο γεωμετρικός μέσος των 4 και 16 είναι ο 8 που δεν ανήκει στην Γ.Π.

<u>ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ Γ.Π.</u>

$$S_\nu=\begin{cases} a_1\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1} & ,\lambda\neq 1\\ \nu\cdot\alpha_1 & ,\ \lambda=1\end{cases}$$

π.χ. ($\lambda\neq 1$)

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{50}=a_1\frac{\lambda^{50}-1}{\lambda-1},$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{78}=a_1\frac{\lambda^{78}-1}{\lambda-1}$$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΟΡΩΝ Γ.Π.</u>

<u>ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ</u>

Δίνονται οι αριθμοί α, β ($\alpha\neq\beta$) . Παρεμβάλλουμε (βάζουμε) κ αριθμούς ανάμεσα τους (οι οποίοι λέγονται και γεωμετρικοί ενδιάμεσοι των α, β) έτσι ώστε να αποτελούν όλοι οι αριθμοί μαζί διαδοχικούς όρους Γ.Π. Να υπολογιστούν οι παραπάνω κ αριθμοί .

<u>ΕΠΙΛΥΣΗ</u>

‘Εστω $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa$ οι αριθμοί που παρεμβάλλουμε ,
τότε θα έχουμε την Γ.Π. : α , $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\kappa$, β
(α_ν) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{\kappa+1}, \alpha_{\kappa+2}$ αντίστοιχα

$a_{k+2}=a_1\lambda^{\kappa+1}$ $\qquad \beta=a\,\lambda^{\kappa+1}$ $\qquad \lambda^{\kappa+1}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ (υπολογίζω τον λόγο της Γ.Π.)

ο τελευταίος παρεμβαλλόμενος όρος $x_\kappa=a_{k+1}=a_1\lambda^\kappa$

ο πρώτος παρεμβαλλόμενος όρος $x_1=a_2=a_1\lambda$

ΕΥΡΕΣΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ ΜΟΝΟΥ Ή ΖΥΓΟΥ ΔΕΙΚΤΗ

	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ	Α.Π. διαφοράς ω	Γ.Π. λόγου $\lambda \neq 1$
Μονού δείκτη	$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{2\nu-1} + \alpha_{2\nu+1}$	$\left[2\alpha_1 + \left(\frac{2\nu+2}{2} - 1\right)2\omega\right]\frac{2\nu+2}{4}$	$a_1\frac{\lambda^{2\nu+2}-1}{\lambda^2-1}$
	$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{59} + \alpha_{61}$	$\left[2\alpha_1 + (31-1)2\omega\right]\frac{31}{2}$	$a_1\frac{\lambda^{62}-1}{\lambda^2-1}$
	$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{71} + \alpha_{73}$	$\left[2\alpha_1 + (37-1)2\omega\right]\frac{37}{2}$	$a_1\frac{\lambda^{74}-1}{\lambda^2-1}$
	$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{87} + \alpha_{89}$	$\left[2\alpha_1 + (45-1)2\omega\right]\frac{45}{2}$	$a_1\frac{\lambda^{90}-1}{\lambda^2-1}$
Ζυγού δείκτη	$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{2\nu-2} + \alpha_{2\nu}$	$\left[2\alpha_2 + \left(\frac{2\nu}{2} - 1\right)2\omega\right]\frac{2\nu}{4}$	$a_2\frac{\lambda^{2\nu}-1}{\lambda^2-1}$
	$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{60} + \alpha_{62}$	$\left[2\alpha_2 + (31-1)2\omega\right]\frac{31}{2}$	$a_2\frac{\lambda^{62}-1}{\lambda^2-1}$
	$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{70} + \alpha_{74}$	$\left[2\alpha_2 + (37-1)2\omega\right]\frac{37}{2}$	$a_2\frac{\lambda^{74}-1}{\lambda^2-1}$
	$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{88} + \alpha_{90}$	$\left[2\alpha_2 + (45-1)2\omega\right]\frac{45}{2}$	$a_2\frac{\lambda^{90}-1}{\lambda^2-1}$

Αιτιολόγηση : $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{59} + \alpha_{61} = \left[2\alpha_1 + (31-1)2\omega\right]\frac{31}{2} = a_1\frac{\lambda^{62}-1}{\lambda^2-1}$

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{60} + \alpha_{62} = \left[2\alpha_2 + (31-1)2\omega\right]\frac{31}{2} = a_1\frac{\lambda^{62}-1}{\lambda^2-1}$$

Από το 1 μέχρι το 62 περιέχονται 62 συνολικά αριθμοί .
Οι μισοί (31) είναι άρτιοι (ζυγοί) , οι μισοί (31) είναι περιττοί (μονοί) .
Σε Α.Π. οι αριθμοί α_1 , α_3 , α_5 , … , α_{59} , α_{61} είναι 31 διαδοχικοί όροι Α.Π. (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = \alpha_1$, διάφορα $\omega' = 2\omega$.

Άρα $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{59} + \alpha_{61} = S'_{31} = \left(2\beta_1 + (31-1)\omega'\right)\frac{31}{2} = \left[2\alpha_1 + (31-1)2\omega\right]\frac{31}{2}$

Σε Γ.Π. οι αριθμοί α_1 , α_3 , α_5 , … , α_{59} , α_{61} είναι 31 διαδοχικοί όροι Γ.Π. (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = \alpha_1$, λόγο $\lambda' = \lambda^2$.

Άρα $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{59} + \alpha_{61} = S'_{31} = \beta_1\frac{(\lambda')^{31}-1}{\lambda'-1} = a_1\frac{(\lambda^2)^{31}-1}{\lambda^2-1} = a_1\frac{\lambda^{62}-1}{\lambda^2-1}$

Ομοίως οι αριθμούς α_1 , α_3 , α_5 , … , α_{60} , α_{62} . είναι 31 διαδοχικοί όροι Α.Π. [Γ.Π.] (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = \alpha_2$, διάφορα $\omega' = 2\omega$ [λόγο $\lambda' = \lambda^2$] .

<u>ΕΥΡΕΣΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ ΠΡΟΟΔΟΥ ΜΕ ΕΝΑΛΛΑΞ ΠΡΟΣΗΜΑ</u>

δηλαδή της μορφής : $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \ldots + \alpha_{\nu-3} - \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} - \alpha_\nu$

π.χ. 1. $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \ldots + \alpha_{59} - \alpha_{60} + \alpha_{61} - \alpha_{62} =$

$= (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{59} + \alpha_{61}) - (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{60} + \alpha_{62}) =$

$$= \begin{cases} \left[2\alpha_1 + (31-1)2\omega\right]\dfrac{31}{2} - \left[2\alpha_2 + (31-1)2\omega\right]\dfrac{31}{2} & \sigma\varepsilon \text{ Α.Π.} \\ a_1\dfrac{\lambda^{62}-1}{\lambda^2-1} - a_2\dfrac{\lambda^{62}-1}{\lambda^2-1} & \sigma\varepsilon \text{ Γ.Π.} \mu\varepsilon\ \lambda \neq 1 \end{cases}$$

2. $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 + \ldots - \alpha_{70} + \alpha_{71} - \alpha_{72} + \alpha_{73} =$

$= (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{71} + \alpha_{73}) - (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{70} + \alpha_{72}) =$

$$= \begin{cases} \left[2\alpha_1 + (37-1)2\omega\right]\dfrac{37}{2} - \left[2\alpha_2 + (36-1)2\omega\right]\dfrac{36}{2} & \sigma\varepsilon \text{ Α.Π.} \\ a_1\dfrac{\lambda^{74}-1}{\lambda^2-1} - a_2\dfrac{\lambda^{72}-1}{\lambda^2-1} & \sigma\varepsilon \text{ Γ.Π.} \mu\varepsilon\ \lambda \neq 1 \end{cases}$$

<u>ΓΕΝΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΟΡΟΥΣ ΓΝΩΣΤΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ</u> (α_ν) <u>ΠΟΥ ΣΧΗΜΑΤΙΖΟΥΝ ΝΕΑ ΠΡΟΟΔΟ</u> (β_ν)

πχ.1. Σε Α.Π. με $\alpha_1 = 75$ και $\omega = -3$ να υπολογιστεί το άθροισμα
$A = \alpha_{23} + \alpha_{25} + \alpha_{27} + \ldots + \alpha_{77} + \alpha_{79}$

$\alpha_{23} = \alpha_1 + (23-1)\,\omega = 75 + 22(-3) = 9$
$\alpha_{79} = \alpha_1 + (79-1)\,\omega = 75 + 78(-3) = -159$
$\alpha_{25} - \alpha_{23} = 25\omega - 23\omega = 2\omega = 2(-3) = -6$

$A = 9 + 3 - 3 - 9 \ldots - 147 - 153$

Θεωρώ την Α.Π. (β_ν)
με πρώτο όρο $\beta_1 = \alpha_{23} = 9$ και
διαφορά $\omega' = \alpha_{25} - \alpha_{23} = -6$

$A = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots + \beta_{\kappa-1} + \beta_\kappa$

$= S'_K = (\beta_1 + \beta_\kappa)\dfrac{\kappa}{2}$

με $\beta_\kappa = -153$ [αρκεί να βρω το κ]

$\beta_1 + (\kappa-1)\,\omega = -153$

$9 + (\kappa-1)(-3) = -153$

$\kappa = 28$ Άρα

$A = (\beta_1 + \beta_\kappa)\dfrac{\kappa}{2} = (9 - 159)\dfrac{28}{2} = \ldots$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΕ Α.Π.

- Υπολογίζω τον πρώτο όρο , τον τελευταίο όρο και την διαφορά των 2 πρώτων όρων του αθροίσματος.
- Ξαναγράφω το άθροισμα
- Θεωρώ νέα αριθμητική πρόοδο (β_ν) με πρώτο όρο τον πρώτο όρο του αθροίσματος και διαφορά την διαφορά των 2 πρώτων όρων του αθροίσματος
- Το αρχικό άθροισμα ισούται με το άθροισμα των όρων της ακολουθίας (β_ν) από τον πρώτο όρο (β_1) μέχρι τον τελευταίο (β_κ) , δηλαδή των κ πρώτων όρων της προόδου (β_ν)
- Υπολογίζω το πλήθος των όρων κ από τον τύπο $\beta_\kappa = \beta_1 + (\kappa-1)\,\omega$ και το ζητούμενο άθροισμα από τον τύπο

$$S = S'_\kappa = (\beta_1 + \beta_\kappa)\frac{\kappa}{2}$$

πχ.2. Σε Α.Π. με $\alpha_1 = 75$ και $\omega = -3$ να υπολογιστεί το άθροισμα

$B = \alpha_7 + \alpha_{12} + \alpha_{17} + \dots + \alpha_{57} + \alpha_{62}$

$\alpha_7 = \alpha_1 + (7-1)\,\omega = 75 + 6(-3) = 57$

$\alpha_{62} = \alpha_{61} + (61-1)\,\omega = 75 + 61(-3) = -108$

$\alpha_{12} - \alpha_7 = 12\omega - 7\omega = 5\omega = 5(-3) = -15$

$B = 57 + 42 + 27 + \dots - 93 - 108$

Θεωρώ την Α.Π. (β_ν)

με πρώτο όρο $\beta_1 = \alpha_{61} = 57$ και διαφορά $\omega' = \alpha_{12} - \alpha_7 = -15$

$B = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{\kappa-1} + \beta_\kappa$

$= S'_\kappa = (\beta_1 + \beta_\kappa)\dfrac{\kappa}{2}$

με $\beta_\kappa = -108$ [αρκεί να βρω το κ]

$\beta_1 + (\kappa-1)\,\omega = -108$

$57 + (\kappa-1)(-15) = -108$

$\kappa = 12$ Άρα

$B = (\beta_1 + \beta_\kappa)\dfrac{\kappa}{2} = (57 - 108)\dfrac{19}{2} = \dots$

πχ. 3. Σε Γ.Π. με $\alpha_1 = 5$ και $\lambda = 2$ να υπολογιστεί το άθροισμα

$\Gamma = \alpha_9 + \alpha_{12} + \alpha_{15} + \dots + \alpha_{102} + \alpha_{105}$

$\alpha_9 = \alpha_1 \lambda^{9-1} = 5 \cdot \lambda^8 = 5 \cdot 2^8$

$\alpha_{96} = \alpha_1 \lambda^{105-1} = 5 \cdot 2^{104} = 5 \cdot 2^{104}$

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_9} = \frac{\alpha_1 \lambda^{12-1}}{\alpha_1 \lambda^{9-1}} = \frac{\lambda^{11}}{\lambda^8} = \lambda^3 = 2^3 = 8$$

$\Gamma = 5\cdot 2^8 + 8 \cdot 5 \cdot 2^8 + 8^2 \cdot 5 \cdot 2^8 + \dots + 5 \cdot 2^{104}$

Θεωρώ την Γ.Π. (β_ν) με πρώτο όρο $\beta_1 = \alpha_9 = 5\cdot 2^8$ και λόγο $\lambda' = \dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_9} = 8$

$B = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{\kappa-1} + \beta_\kappa$

$= S'_\kappa = \beta_1 \dfrac{(\lambda')^\kappa - 1}{\lambda' - 1}$

με $\beta_\kappa = 3 \cdot 2^{104}$ [αρκεί να βρω το κ]

$\beta_1 \lambda^{\kappa-1} = 5 \cdot 2^{104}$ $\quad 5 \cdot 2^8 \cdot 8^{\kappa-1} = 5 \cdot 2^{104}$

$2^8\, 2^{3\kappa-3} = 2^{104}$ $\quad 2^{3\kappa+5} = 8^{104}$

$3\kappa = 99$ $\quad \kappa = 33$ $\quad$ Άρα $B =$

$$S'_\kappa = \beta_1 \frac{(\lambda')^\kappa - 1}{\lambda' - 1} = 5 \cdot 2^8 \frac{8^{33} - 1}{8 - 1} = \dots$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΕ Α.Π.

- Υπολογίζω τον πρώτο όρο , τον τελευταίο όρο και την διαφορά των 2 πρώτων όρων του αθροίσματος.
- Ξαναγράφω το άθροισμα
- Θεωρώ νέα αριθμητική πρόοδο (β_ν) με πρώτο όρο τον πρώτο όρο του αθροίσματος και διαφορά την διαφορά των 2 πρώτων όρων του αθροίσματος
- Το αρχικό άθροισμα ισούται με το άθροισμα των όρων της ακολουθίας (β_ν) από τον πρώτο όρο (β_1) μέχρι τον τελευταίο (β_κ) , δηλαδή των κ πρώτων όρων της ακολουθίας (β_ν)
- Υπολογίζω το πλήθος των όρων κ από τον τύπο $\beta_\kappa = \beta_1 + (\kappa-1)\,\omega$ και το ζητούμενο άθροισμα από τον τύπο

$$S = S'_\kappa = (\beta_1 + \beta_\kappa)\frac{\kappa}{2}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΕ Γ.Π. με $\lambda \neq 1$

- Υπολογίζω τον πρώτο όρο , τον τελευταίο όρο και τον λόγο των 2 πρώτων όρων του αθροίσματος.
- Ξαναγράφω το άθροισμα
- Θεωρώ νέα γεωμετρική πρόοδο (β_ν) με πρώτο όρο τον πρώτο όρο του αθροίσματος και λόγο τον λόγο των 2 πρώτων όρων του αθροίσματος
- Το αρχικό άθροισμα ισούται με το άθροισμα των όρων της ακολουθίας (β_ν) από τον πρώτο όρο (β_1) μέχρι τον τελευταίο (β_κ) , δηλαδή των κ πρώτων όρων της προόδου (β_ν)
- Υπολογίζω το πλήθος των όρων κ από τον τύπο $\beta_\kappa = \beta_1 \lambda^{\kappa-1}$ και το ζητούμενο άθροισμα από τον τύπο

$$S = S'_\kappa = \beta_1 \frac{(\lambda')^\kappa - 1}{\lambda' - 1}$$