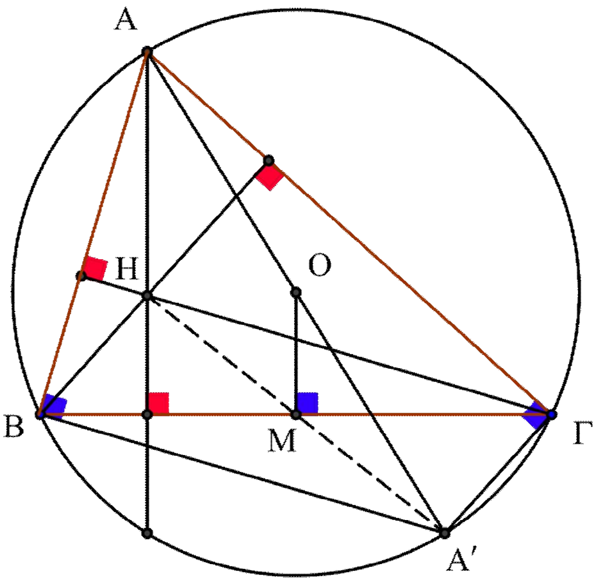
<u>Για το mathematica, τον καλό συνάδελφο ΚΕΦΑΛΟΝΙΤΗ και τους μικρούς μαθητές του mathematica που μαζί με πολλά άλλα στερούνται και αυτών των γνώσεων</u>

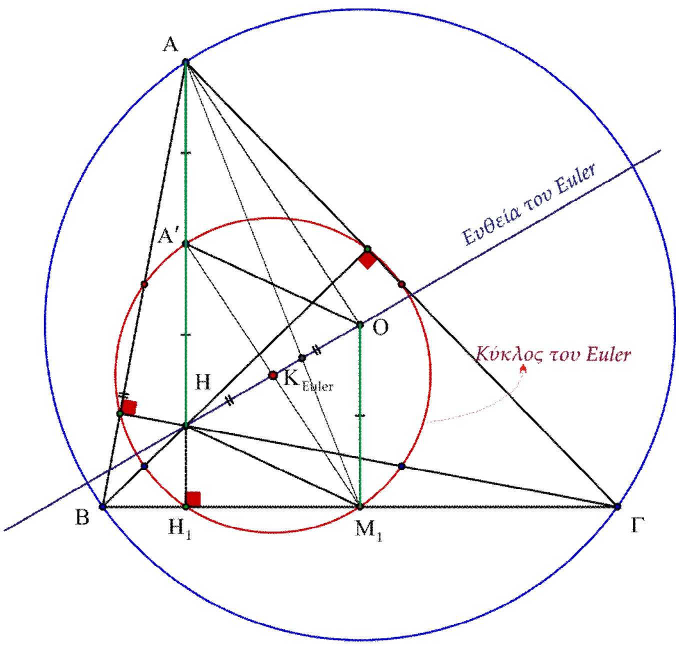
Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου σε τρίγωνο ΑΒΓ, Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου και Μ το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι: $AH = 2OM$

Απόδειξη



Έστω Α′ το αντιδιαμετρικό του Α. Το τετράπλευρο ΒΗΓΑ′ είναι παραλληλόγραμμο διότι $\Gamma H \perp AB$ (από το ύψος από το Γ) και $A'B \perp AB$ (εφόσον είναι $\widehat{A'BA} = 90^0$ (εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο)) άρα $\Gamma H // A'B$. Ομοίως είναι $\Gamma A' // HB$. Επομένως οι διαγώνιες του διχοτομούνται δηλαδή το Μ είναι το μέσο και του ΗΑ′. Από το τρίγωνο ΑΗΑ′ ισχύει: Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ συνδέει τα μέσα των πλευρών του Α′Α και Α′Η άρα θα είναι παράλληλη προς την τρίτη και ίση με το μισό της δηλαδή θα ισχύει $OM = \frac{AH}{2} \Rightarrow \boxed{AH = 2OM}$.

Το κέντρο του κύκλου του Euler είναι το μέσο του τμήματος που ενώνει το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και η ακτίνα του είναι ίση με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.



<u>Απόδειξη</u>

Επειδή η $\widehat{A'H_1M_1} = 90^0$ το κέντρο του κύκλου του Euler (K_{Euler}) είναι το μέσο της $A'M_1$, δηλαδή η $A'M_1$ είναι διάμετρος του κύκλου του Euler.

Επειδή (όπως δείξαμε στο προηγούμενο) ισχύει $OM_1 \overset{//}{=} \frac{AH}{2} \overset{AH=2HA'}{\Rightarrow} OM_1 \overset{//}{=} HA' :(1)$ οπότε το τετράπλευρο $A'HM_1O$ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς οι διαγώνιές του διχοτομούνται, δηλαδή το K_{Euler} είναι και το μέσο της ΟΗ, οπότε το κέντρο του κύκλου του Euler είναι σημείο της ευθείας του Euler και μάλιστα το μέσο του τμήματος που συνδέει το ορθόκεντρο και το περίκεντρο του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ. Ομοίως από την (1) ισχύει $OM_1 \overset{//}{=} \frac{AH}{2} \overset{AH=2AA'}{\Rightarrow} OM_1 \overset{//}{=} AA'$ οπότε το τετράπλευρο $A'AM_1O$ είναι και αυτό παραλληλόγραμμο με αποτέλεσμα οι απέναντι πλευρές να είναι ίσες, δηλαδή ισχύει:

$A'M_1 = AO \Rightarrow 2R_{Euler} = R \Rightarrow \boxed{R_{Euler} = \frac{R}{2}}$, όπου R_{Euler} είναι η ακτίνα του κύκλου το Euler και R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ.

13 Ιουνίου 2011

Στάθης Κούτρας