Άσκηση

Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους x,y,z η εξίσωση

$$3^x - 5^y = z^2.$$

Λύση

- Παίρνοντας mod3 και στα δύο μέλη έχουμε $z^2 \equiv -(-1)^y (\bmod 3)$. Εάν το y είναι άρτιος τότε η παραπάνω γίνεται $z^2 \equiv -1(\bmod 3)$, που είναι αδύνατη καθώς κανένας τετράγωνο δεν αφήνει υπόλοιπο 1 στη διαίρεσή του με το 3. Άρα $\boxed{y = 2y_1 + 1 \ \ (1)}$
- Παίρνοντας mod4 και στα δύο μέλη έχουμε $z^2 \equiv (-1)^x - 1^y (\bmod 4)$. Εάν το x είναι περιττός, τότε η παραπάνω γίνεται $z^2 \equiv 2(\bmod 4)$ που είναι αδύνατη καθώς κανένας τετράγωνο δεν αφήνει υπόλοιπο 2 στη διαίρεσή του με το 4. Άρα $\boxed{x = 2x_1 \ \ (2)}$.

Αντικαθιστώντας τις (2),(3) στην αρχική, παίρνουμε:

$$3^{2x_1} - 5^{2y_1+1} = z^2 \Rightarrow 5^{2y_1+1} = (3^{x_1} - z)(3^{x_1} + z) \quad (3)$$

Όμως $(3^{x_1}, z) = 1$, διότι διαφορετικά θα είχαμε 3|z που είναι άτοπο από την (3) (Το δεξί μέλος θα ήταν διαιρετό με 3 ενώ το αριστερό όχι). Άρα $(3^{x_1} - z, 3^{x_1} + z) = 1 \ ή \ 2$ και καθώς το 3^{x_1} είναι περιττός, θα έχουμε $(3^{x_1} - z, 3^{x_1} + z) = 1$. Επίσης από την (3), επειδή 5^{2y_1+1}, $3^{x_1} + z > 0$, άρα $3^{x_1} - z > 0$ και μάλιστα επειδή $3^{x_1} + z > 1$, άρα τελικά

$$3^{x_1} - z = 1 \quad και \quad 3^{x_1} + z = 5^{2y_1+1}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω παίρνουμε ότι $2 \bullet 3^{x_1} = 5^{2y_1+1} + 1 \quad (4)$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Εάν $\underline{x_1 = 2x_2}$ τότε η (4) γράφεται $2 \bullet 9^{x_2} = 5 \bullet 25^{y_1} + 1$ και παίρνοντας mod24 και στα δύο μέλη έχουμε

$$2 \bullet 9^{x_2} \equiv 5 \bullet 1^{y_1} + 1(\bmod 24) \Rightarrow 9^{x_2} \equiv 3(\bmod 12)$$

που είναι άτοπο καθώς το αριστερό μέλος αφήνει πάντα υπόλοιπο 9 στη διαίρεσή του με το 12.

- Εάν $\underline{x_1 = 2x_2 + 1}$ τότε η (4) γράφεται $2 \bullet 3 \bullet 9^{x_2} = 5 \bullet 25^{y_1} + 1 \ (5)$ οπότε εάν $x_2 = 0$ τότε παίρνουμε $y_1 = 0$ δηλαδή y=1, x=2 και τελικά z=2.

Εάν $x_2 \geq 1$ τότε παίρνοντας mod9 και στα δύο μέλη παίρνουμε

$5 \bullet 7^{y_1} \equiv -1 \pmod 9$ που ισχύει μόνο όταν $y_1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow y_1 = 3y_2 + 1$.

(διότι $7^3 \equiv 1 \pmod 9$).

Εάν $y_2 = 0$ τότε δεν παίρνουμε λύσεις της εξίσωσης (5) ενώ όταν $y_2 \geq 1$ τότε αντικαθιστώντας στην (5) το y_1 και παίρνοντας mod7 και στα δύο μέλη παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
6 \bullet 2^{x_2} \equiv 5 \bullet 4^{3y_2+1} + 1 \pmod 7 &\Leftrightarrow 6 \bullet 2^{x_2} \equiv 20 \bullet 64^{y_2} + 1 \pmod 7 \\
&\Leftrightarrow 6 \bullet 2^{x_2} \equiv (-1) \bullet 1^{y_2} + 1 \pmod 7 \\
&\Leftrightarrow 6 \bullet 2^{x_2} \equiv 0 \pmod 7, \textit{άτοπο}
\end{aligned}
$$

Άρα η αρχική εξίσωση έχει μοναδική λύση την (x,y,z)=(2,1,2)