

Ορισμός Συνάρτησης

Συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B .

Πράξεις με Συναρτήσεις

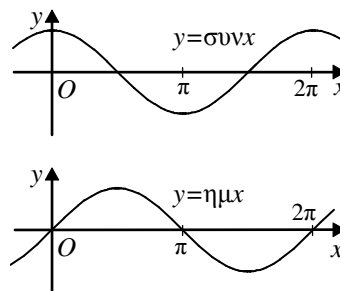
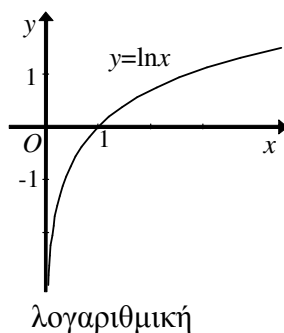
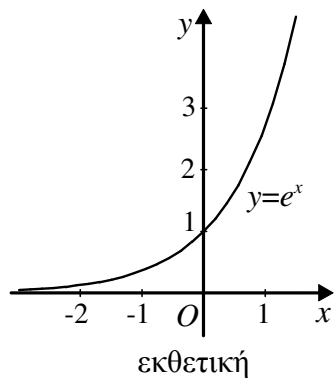
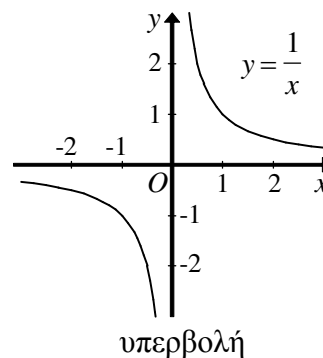
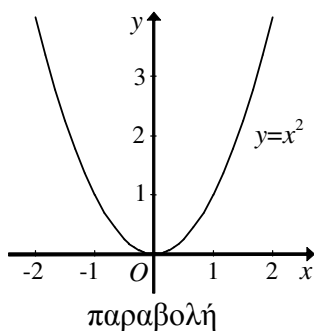
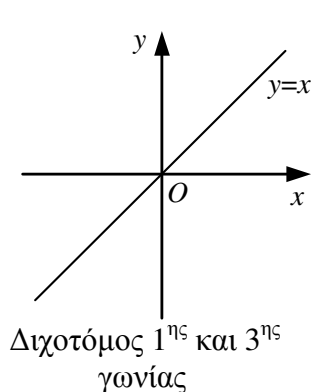
Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \frac{f}{g}$, με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . **Γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της f** σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x, (f(x)))$ για όλα τα $x \in A$.

Γραφικές Παραστάσεις Βασικών Συναρτήσεων



Ορισμοί μονotonίας - ακρότατων

- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
- Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:

- **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .
- **Τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .
- Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Ιδιότητες ορίων

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k\ell_1$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ αν $\ell_2 \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \ell_1^n$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell_1}$ αν $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0

Συνεχής Συνάρτηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, **πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές**, αλλά και όσες προκύπτουν από **πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς** συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \epsilon\phi x_0$ (όταν $\sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0$).

Ορισμός παραγώγου της f στο x_0

Αν το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** . Δηλαδή $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Ερμηνεία της παραγώγου στο x_0

- Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$.
- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 : $v(t_0) = f'(t_0)$,

Ορισμός (πρώτης) παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'** .

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος της f** και συμβολίζεται με f'' .

Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t , τότε η ταχύτητά του θα είναι $v(t) = x'(t)$. Η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $a(t) = v'(t)$ ή ισοδύναμα $a(t) = x''(t)$.

Παράγωγος βασικών συναρτήσεων – Κανόνες παραγωγίσις

$(c)' = 0$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$(cf(x))' = cf'(x)$
$(x)' = 1$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1}$	$(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(e^x)' = e^x$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Αποδείξεις

- Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$,

οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$. Άρα $(c)' = 0$.

- Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$.

Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$. Άρα $(x)' = 1$.

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$

Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h$.

Επομένως, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$. Άρα $(x^2)' = 2x$

- Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε $F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$,

και για $h \neq 0$ $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h} = c \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = cf'(x)$. Άρα $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

- Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Έχουμε $F(x+h) - F(x) = (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))$,

και για $h \neq 0$, $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$.

Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Θεώρημα

- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .
- Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Θεώρημα

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ μέγιστο.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

Στατιστική

Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για:

- το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων
- τη συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίασή τους
- την ανάλυση και εξαγωγή αντίστοιχων συμπερασμάτων.

Πληθυσμός είναι το σύνολο του οποίου θέλουμε να εξετάσουμε τα στοιχεία του ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά τους.

Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται **μεταβλητές**.

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή λέγονται **τιμές της μεταβλητής**.

Τις **μεταβλητές** τις διακρίνουμε:

1. Σε **ποιοτικές** ή **κατηγορικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές τους δεν είναι αριθμοί.
2. Σε **ποσοτικές** μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί και διακρίνονται:
 - i) Σε **διακριτές** μεταβλητές, που παίρνουν μόνο “μεμονωμένες” τιμές.
 - ii) Σε **συνεχείς** μεταβλητές, που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .

Ένας τρόπος για να πάρουμε τις απαραίτητες πληροφορίες που χρειαζόμαστε για κάποιο πληθυσμό είναι να εξετάσουμε όλα τα άτομα (στοιχεία) του πληθυσμού ως προς το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει. Η μέθοδος αυτή συλλογής των δεδομένων καλείται **απογραφή**.

Ένα δείγμα θεωρείται **αντιπροσωπευτικό** ενός πληθυσμού, εάν έχει επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε μονάδα του πληθυσμού να έχει την ίδια δυνατότητα να επιλεγεί.

Οι **Στατιστικοί πίνακες** διακρίνονται στους:

- a) **γενικούς πίνακες**, οι οποίοι περιέχουν όλες τις πληροφορίες που προκύπτουν από μία στατιστική έρευνα
- β) **ειδικούς πίνακες**, οι οποίοι είναι συνοπτικοί και σαφείς.

Κάθε πίνακας που έχει κατασκευαστεί σωστά πρέπει να περιέχει:

- a) τον **τίτλο**, που γράφεται στο επάνω μέρος του πίνακα
- β) τις **επικεφαλίδες** των γραμμών και στηλών
- γ) το **κύριο σώμα**
- δ) την **πηγή**, που γράφεται στο κάτω μέρος του

Αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$. Στην τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) **συχνότητα** v_i , δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων. Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος, δηλαδή: $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$.

Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα v_i με το μέγεθος n του δείγματος, προκύπτει η **σχετική συχνότητα** f_i της τιμής x_i , δηλαδή $f_i = \frac{v_i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Απόδειξη

Για τη σχετική συχνότητα ισχύουν οι ιδιότητες:

- (i) $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$ αφού $0 \leq v_i \leq n$.
- (ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$, αφού $f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \dots + \frac{v_k}{n} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Οι ποσότητες x_i, v_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται **πίνακας κατανομής συχνοτήτων** ή απλά **πίνακας συχνοτήτων**.

Για μια μεταβλητή, το σύνολο των ζευγών (x_i, v_i) λέμε ότι αποτελεί την **κατανομή συχνοτήτων** και το σύνολο των ζευγών (x_i, f_i) , ή των ζευγών $(x_i, f_i \%)$, την **κατανομή των σχετικών συχνοτήτων**.

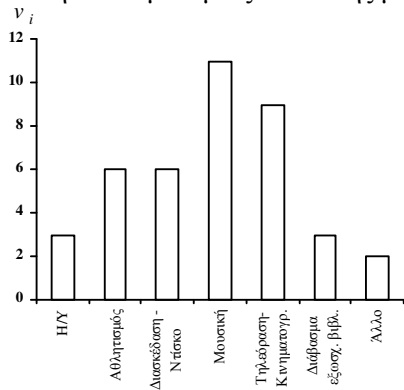
Στην περίπτωση των **ποσοτικών μεταβλητών** εκτός από τις συχνοότητες v_i και f_i χρησιμοποιούνται συνήθως και οι λεγόμενες **αθροιστικές συχνοότητες** N_i και οι **αθροιστικές σχετικές συχνοότητες** F_i , οι οποίες εκφράζουν το πλήθος και το ποσοστό αντίστοιχα των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i, \quad F_i = f_1 + f_2 + \dots + f_i, \text{ για } i = 1, 2, \dots, k$$

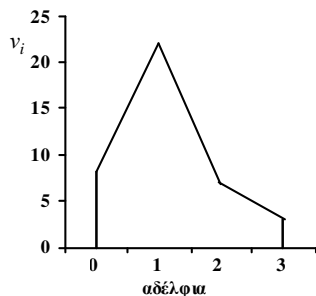
$$v_i = N_i - N_{i-1}, \quad f_i = F_i - F_{i-1}, \quad N_k = n, \quad F_k = 1$$

Γραφική Παράσταση Κατανομής Συχνοτήτων

Το **ραβδόγραμμα** χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.



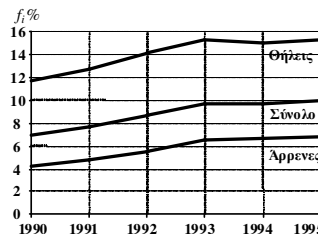
Ενώνοντας τα σημεία (x_i, v_i) ή (x_i, f_i) έχουμε το λεγόμενο **πολύγωνο συχνοτήτων** ή **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων**



Όταν έχουμε λίγες παρατηρήσεις, η κατανομή τους μπορεί να περιγραφεί με το **σημειόγραμμα**



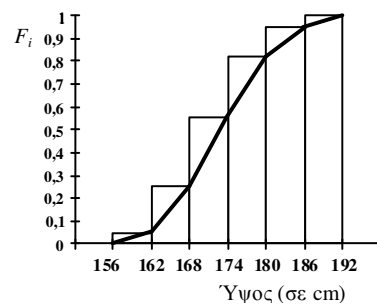
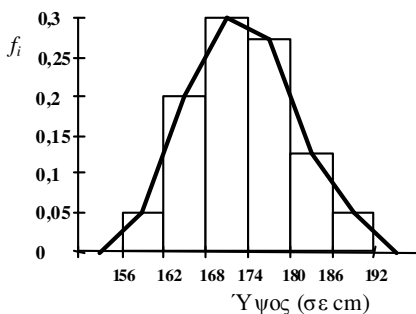
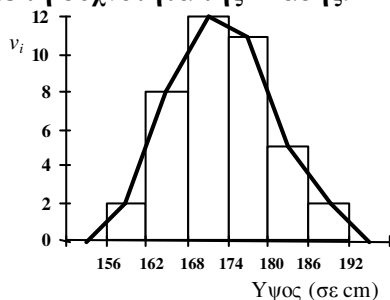
Το **χρονόγραμμα** ή χρονολογικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική απεικόνιση της διαχρονικής εξέλιξης ενός οικονομικού, δημογραφικού ή άλλου μεγέθους. Ο οριζόντιος άξονας χρησιμοποιείται συνήθως ως άξονας μέτρησης του χρόνου και ο κάθετος ως άξονας μέτρησης της εξεταζόμενης μεταβλητής.



Ομαδοποίηση των Παρατηρήσεων

Για να κατασκευάσουμε **ισοπλατείς κλάσεις** υπολογίζουμε το πλάτος c των κλάσεων διαιρώντας το εύρος R διά του αριθμού των κλάσεων k , στρογγυλεύοντας, αν χρειαστεί για λόγους διευκόλυνσης, πάντα προς τα πάνω.

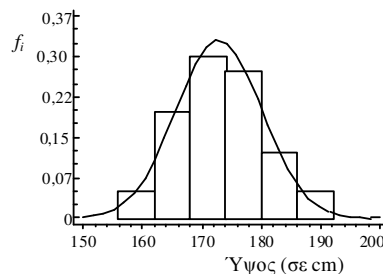
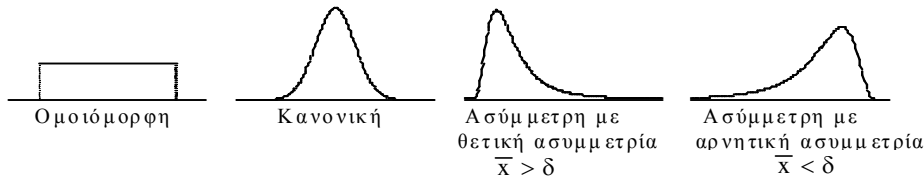
Η αντίστοιχη γραφική παράσταση ενός πίνακα συχνοτήτων με ομαδοποιημένα δεδομένα γίνεται με το λεγόμενο **ιστόγραμμα** συχνοτήτων, όπου θεωρώντας το πλάτος c ως μονάδα μέτρησης, το **εμβαδόν του ορθογωνίου να ισούται με τη συχνότητα της κλάσης**.



Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος n . Το **πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων** έχει εμβαδόν ίσο με 1

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζονται και τα **ιστογράμματα αθροιστικών συχνοτήτων** και **αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων**. Αν ενώσουμε σε ένα ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων τα **δεξιά άκρα** (όχι μέσα) των άνω βάσεων των ορθογωνίων με ευθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε το **πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων** της κατανομής.

Εάν υποθέσουμε ότι ο αριθμός των κλάσεων για μια συνεχή μεταβλητή είναι αρκετά μεγάλος (τείνει στο άπειρο) και ότι το πλάτος των κλάσεων είναι αρκετά μικρό (τείνει στο μηδέν), τότε η πολυγωνική γραμμή συχνοτήτων τείνει να πάρει τη μορφή μιας ομαλής καμπύλης, η οποία ονομάζεται **καμπύλη συχνοτήτων**



Μέτρα θέσης και διασποράς

Τα **μέτρα θέσης** της κατανομής είναι αυτά που δίνουν τη θέση του “κέντρου” των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα.

Τα **μέτρα διασποράς** ή **μέτρα μεταβλητότητας** είναι αυτά που δίνουν τη διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το “κέντρο” τους.

Τα μέτρα που εκφράζονται σε συνάρτηση με τα μέτρα θέσης και διασποράς, καλούνται **μέτρα ασυμμετρίας**.

Η **μέση τιμή** ενός συνόλου n παρατηρήσεων ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων.

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \frac{v_i}{n} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$$

Εάν σε κάθε τιμή x_1, x_2, \dots, x_n δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) w_1, w_2, \dots, w_n , τότε ο **σταθμικός μέσος** βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

Η **διάμεσος** είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Όταν η **διάμεσος δεν** είναι τιμή του δείγματος τότε το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Όταν έχουμε **περιττό** πλήθος παρατηρήσεων, η **διάμεσος** είναι μία από τις παρατηρήσεις.

Το **εύρος** ή **κύμανση** (R), που ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

$$\text{Εύρος } R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{Μικρότερη παρατήρηση}$$

Το εύρος δε θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς, γιατί βασίζεται μόνο στις δυο ακραίες παρατηρήσεις.

Απόδειξη

Αν t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X τότε ο μέσος όρος των αποκλίσεων των t_i από τη μέση

$$\text{τιμή τους } \bar{x} \text{ ισούται με } 0. \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})}{n} = \frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

Αν t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X τότε **διακύμανση** ή **διασπορά** s^2 είναι ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των t_i από τη μέση τιμή τους \bar{x} .

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2$$

Όταν έχουμε πίνακα συχνοτήτων η **διακύμανση** ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

Η διακύμανση έχει ένα **μειονέκτημα**. Δεν εκφράζεται με τις μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. Αν όμως πάρουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, θα έχουμε την **τυπική απόκλιση s** που θα εκφράζεται με την ίδια μονάδα μέτρησης του χαρακτηριστικού. Δηλαδή $s = \sqrt{s^2}$

Ένα μέτρο το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας**

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}} \text{ αν } \bar{x} > 0, \quad CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \text{ αν } \bar{x} < 0 \quad \text{Αν } \bar{x} = 0 \text{ δεν ορίζεται CV.}$$

Ο **συντελεστής μεταβολής** εκφράζεται επί τοις εκατό, είναι συνεπώς ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης και παριστάνει ένα μέτρο **σχετικής διασποράς** των τιμών και όχι της **απόλυτης διασποράς**.

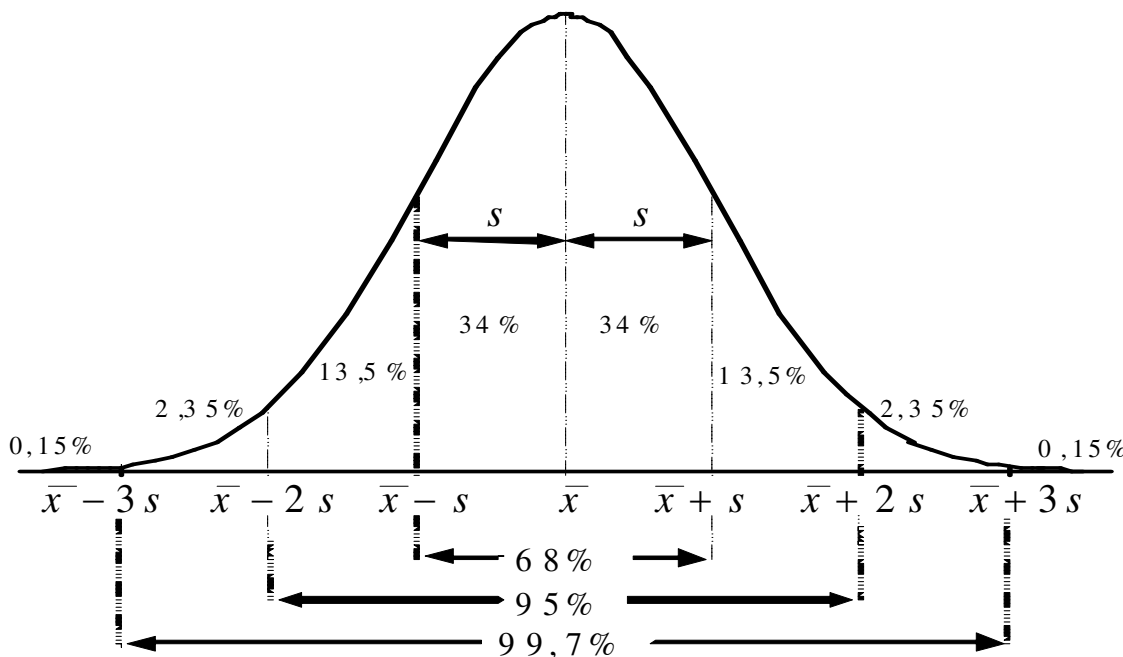
Ο **συντελεστής μεταβολής** εκφράζει τη μεταβλητότητα των δεδομένων **απαλλαγμένη** από την επίδραση της μέσης τιμής.

Αν για δύο δείγματα A και B ισχύει $CV_A < CV_B$ τότε το δείγμα A έχει **μεγαλύτερη ομοιογένεια** από το B.

Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι **ομοιογένης**, εάν ο συντελεστής μεταβολής **δεν ξεπερνά** το 10%.

Αν η **καμπύλη συχνότητας** για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι **κανονική ή περίπου κανονική**, τότε η τυπική απόκλιση s έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- i) το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$
- ii) το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$
- iii) το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$
- iv) το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.



Εφαρμογή

Έστω x_1, x_2, \dots, x_n n παρατηρήσεις με μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση s_x .

α) Αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν προσθέσουμε σε καθεμιά από τις x_1, x_2, \dots, x_n μια σταθερά c , τότε:

- i) $\bar{y} = \bar{x} + c$,
- ii) $s_y = s_x$

β) Αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις x_1, x_2, \dots, x_n επί μια σταθερά c , τότε:

- i) $\bar{y} = c \bar{x}$,
- ii) $s_y = |c| s_x$

Πιθανότητες

Κάθε πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό** πείραμα.

Ένα πείραμα του οποίου δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα ονομάζεται **πείραμα τύχης**.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω . Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$.

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο** ή γεγονός.

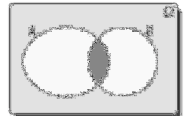
Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** αν έχει περισσότερα στοιχεία.

Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Γι' αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε. Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**.

Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.

Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται “ A τομή B ” ή “ A και B ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B .



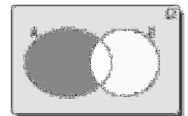
Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται “ A ένωση B ” ή “ A ή B ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B .



Το ενδεχόμενο A' , που διαβάζεται “όχι A ” ή “συμπληρωματικό του A ” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A . Το A' λέγεται και “αντίθετο του A ”.



Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται “διαφορά του B από το A ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B . Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.

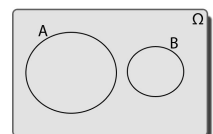


Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται	$\omega \in A$
Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται	$\omega \in A'$ (ή $\omega \notin A$)
Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται	$\omega \in A \cup B$
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B	$\omega \in A \cap B$
Πραγματοποιείται μόνο το A	$\omega \in A - B$ (ή $\omega \in A \cap B'$)
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	$\omega \in (A \cup B)'$
Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B .	$(A - B) \cup (B - A)$ ή $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$
Πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα A και B .	$\omega \in (A \cap B)'$
Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B	$A \subseteq B$

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ασυμβίβαστα**, όταν $A \cap B = \emptyset$.

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.



Αν σε v εκτελέσεις ενός πειράματος ένα ενδεχόμενο A πραγματοποιείται κ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{v}$ ονομάζεται **σχετική συχνότητα του A** και συμβολίζεται με f_A . Ιδιαίτερα αν ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\lambda\}$ και σε v εκτελέσεις του πειράματος αυτού τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_\lambda\}$ πραγματοποιούνται $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_\lambda$ φορές αντιστοίχως, τότε για τις σχετικές συχνότητες $f_1 = \frac{\kappa_1}{v}, f_2 = \frac{\kappa_2}{v}, \dots, f_\lambda = \frac{\kappa_\lambda}{v}$ των απλών ενδεχομένων θα έχουμε:

- $0 \leq f_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, \lambda$ (αφού $0 \leq \kappa_i \leq v$)
- $f_1 + f_2 + \dots + f_\lambda = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_\lambda}{v} = \frac{v}{v} = 1.$

Οι σχετικές συχνότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων ενός πειράματος σταθεροποιούνται γύρω από κάποιους αριθμούς (όχι πάντοτε ίδιους), καθώς ο αριθμός των δοκιμών του πειράματος επαναλαμβάνεται απεριόριστα. Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο επιβεβαιώνεται και θεωρητικά, ονομάζεται **στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών**.

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Σε ένα πείραμα με **ισοπίθανα** αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου A τον αριθμό:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}.$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

- $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$
- $P(\emptyset) = \frac{0}{N(\Omega)} = 0$
- Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Αξιοματικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε απλό ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό, που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_v) = 1.$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα $P(A)$ ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\kappa\} \neq \emptyset$ ορίζουμε το άθροισμα $P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_\kappa)$, ενώ ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου \emptyset ορίζουμε τον αριθμό $P(\emptyset) = 0$.

Αν $P(\omega_i) = \frac{1}{v}, i = 1, 2, \dots, v$, τότε έχουμε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου. Στην πράξη, ιδιαίτερα στην περίπτωση που δεν ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας, ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου A λαμβάνεται το όριο της σχετικής του συχνότητας.

Όταν έχουμε ένα δειγματικό χώρο $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v\}$ και χρησιμοποιούμε τη φράση “παίρνουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω ”, εννοούμε ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $P(\omega_i) = \frac{1}{v}, i = 1, 2, \dots, v$.

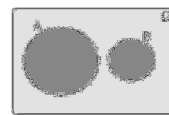
ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

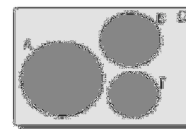
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $N(A) = \kappa$ και $N(B) = \lambda$, τότε το $A \cup B$ έχει $\kappa + \lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα A και B δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A \cup B) = \kappa + \lambda = N(A) + N(B)$.

$$\text{Επομένως: } P(A \cup B) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$



Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma)$.



2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

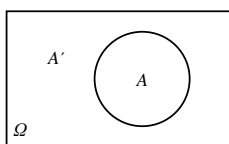
Επειδή $A \cap A' = \emptyset$, δηλαδή τα A και A' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

$$P(\Omega) = P(A) + P(A')$$

$$1 = P(A) + P(A').$$

Οπότε $P(A') = 1 - P(A)$.



3. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, (1)

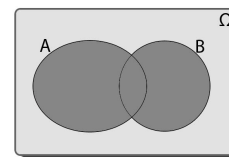
αφού στο άθροισμα $N(A) + N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A \cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος**.



4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

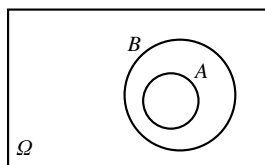
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B)$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$$

$$P(A) \leq P(B).$$



5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A - B) \cup (A \cap B) = A$, έχουμε:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B).$$

Άρα $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

