Μαθηματικά Γ Θετικής

Note Title 20/5/2009

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ 1

A. Σχολικό Βιβλίο σελ: 251

B. -//- -//- σελ: 213

Γ. α - Σωστό β - Σωστό

γ - Λάθος δ - Λάθος

ε - Λάθος

ΘΕΜΑ 2

A. α

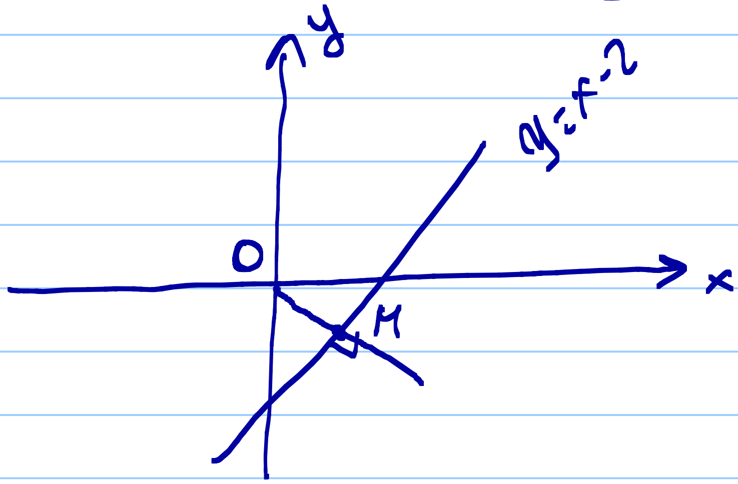
$$z = (2\lambda+1) + (2\lambda-1)\cdot i$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\lambda+1 \\ y &= 2\lambda-1 \end{aligned}\right\} (-) \quad x - y = 2 \Rightarrow$$

$$x - y - 2 = 0$$

ή $y = x - 2$

B.



Η ευθεία ΟΜ έχει εξίσωση $y=-x$

Ο z_0 είναι η λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} y&=-x \\ y&=x-2 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{} \quad 2y=-2 \Rightarrow y=-1$$

και $x=1$

άρα $M(1,-1)$ και $z_0=1-i$

είναι ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο

το οποίο είναι $|z_0|=\sqrt{2}$

B. $|w|^2+\bar{w}-12=z_0 \overset{w=x+yi}{\underset{z_0=1-i}{\Longrightarrow}}$

$$x^2+y^2+x-yi-12=1-i \Rightarrow$$

$$(x^2+y^2+x-12-1)+(1-y)i=0 \Rightarrow$$

$$y=1 \quad \text{και} \quad x^2+x-12=0$$

άρα $\Delta=1+48=49$

άρα $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm7}{2} \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$

Άρα $w=3+i$ ή $w=-4+i$

ΘΕΜΑ 3

$$f(x) = a^x - \ln(x+1) \ , \ x > -1$$

όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

A. Παρατηρώ ότι $f(0) = 1$

Η f είναι παραγωγίσιμη

και $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$

άρα η f παρουσιάζει ακρότατο

για $x = 0$ και άρα από Θεώρημα

Fermat: $f'(0) = 0$

$$f'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln a = 1$$

$$\Rightarrow a = e$$

B. **α** Για $a = e$ $\quad f(x) = e^x - \ln(x+1)$

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \text{για κάθε } x > -1$$

άρα η f είναι κυρτή

$\boxed{B}$

x		1	
$f''(x)$	$+$		$+$
f'	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$f' \uparrow$ άρα Για $x>0 \Rightarrow f'(x)>f'(0)$
$\Rightarrow f'(x)>0$

Για $x<0 \Rightarrow f'(x)<f'(0)$
$\Rightarrow f'(x)<0$

Ενώ για $x=0$ έχω $f'(0)=0$
από προηγούμενα

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

ολικό ελάχιστο $(0, f(0)=1)$

γ. $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \overset{x\neq 1}{\underset{x\neq 2}{\Leftrightarrow}}$

$(x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$

Έστω $H(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1)$

η H είναι συνεχής στο κλειστό $[1,2]$

$H(2) = f(\gamma)-1$

$H(1) = -(f(\beta)-1)$

Έχουμε $f(x)>1$ για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$

άρα $f(\gamma)>1 \Rightarrow f(\gamma)-1>0$

$f(\beta)>1 \Rightarrow f(\beta)-1>0 \Rightarrow -(f(\beta)-1)<0$

Επομένως $H(2)\cdot H(1)<0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ ώστε $H(x_0)=0$.

ΘΕΜΑ 4

α) $H(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\ x\in[0,2]$

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + 3, & x \in (0,2] \\ 6 \cdot \displaystyle\lim \dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} G(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{x} - \int_0^x f(t)\,dt + 3 \right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{x} \right) - \lim_{x \to 0^+} \int_0^x f(t)\,dt + 3$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x t f(t)\,dt \right)'}{(x)'} - 0 + 3 =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x f(x)}{1} + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$G(0) = 6 \lim_{t \to 0} \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} =$$

$$= 6 \lim_{t \to 0} \frac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} = 6 \lim_{t \to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} = 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 3$$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} G(x) = G(0)$ και επομένως

η G είναι συνεχής στο $x_0=0$

Επίσης για $x\in(0,2]$ η G είναι συνεχής

ως πηλίκο και διαφορά συνεχών

Άρα η G: συνεχής στο $[0,2]$

$\boxed{\beta.}$ $$G'(x)=\left(\frac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)\,dt+3\right)'=$$

$$=\frac{H'(x)\cdot x-H(x)}{x^2}-f(x)=$$

$$=\frac{x^2 f(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=$$

$$=\frac{x^2 f(x)}{x^2}-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=$$

$$=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=-\frac{H(x)}{x^2}$$

$\boxed{\gamma.}$ $G(0)=3$

$$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)\,dt+3$$

$$= \frac{\int_0^2 t f(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3$$

όμως $\int_0^2 (t-2) f(t) dt = 0 \Rightarrow$

$$\int_0^2 t f(t) dt = 2\int_0^2 f(t) dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 t f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt$$

Άρα $G(2) = 3$

Η G είναι συνεχής στο $[0,2]$

παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και

$G(0) = G(2)$ άρα από Θ. Rolle

υπάρχει $a \in (0,2)$ ώστε $G'(a) = 0$

άρα $-\frac{H(a)}{a^2} = 0 \Rightarrow H(a) = 0$

$\boxed{δ.}$ $G(a) = -\int_0^a f(t) dt + 3$

Από Θεώρημα μέσης τιμής για την G

στο $[0, a]$ έχουμε ότι υπάρχει

$\xi \in (0, a)$ ώστε να ισχύει:

$$G'(\xi) = \frac{G(a) - G(0)}{a - 0}$$

$$\Rightarrow G'(\xi) = \frac{-\int_0^a f(t)\,dt}{a}$$

όμως $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$

άρα $$-\frac{H(\xi)}{\xi^2} = -\frac{\int_0^a f(t)\,dt}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^\xi t f(t)\,dt}{\xi^2} = \frac{\int_0^a f(t)\,dt}{a}$$

$$\Rightarrow a\int_0^\xi t f(t)\,dt = \xi^2 \int_0^a f(t)\,dt$$

Πολλάτος
Γεράσιμος