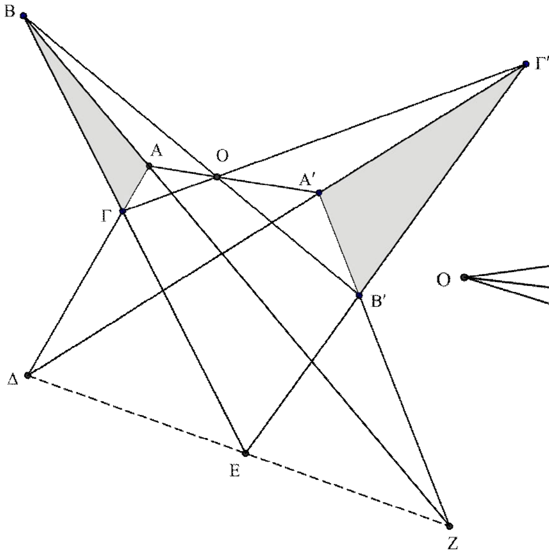
Αφιερωμένο (επειδή το λατρεύει) στον Αγαπητό μου φίλο και ταλαντούχο

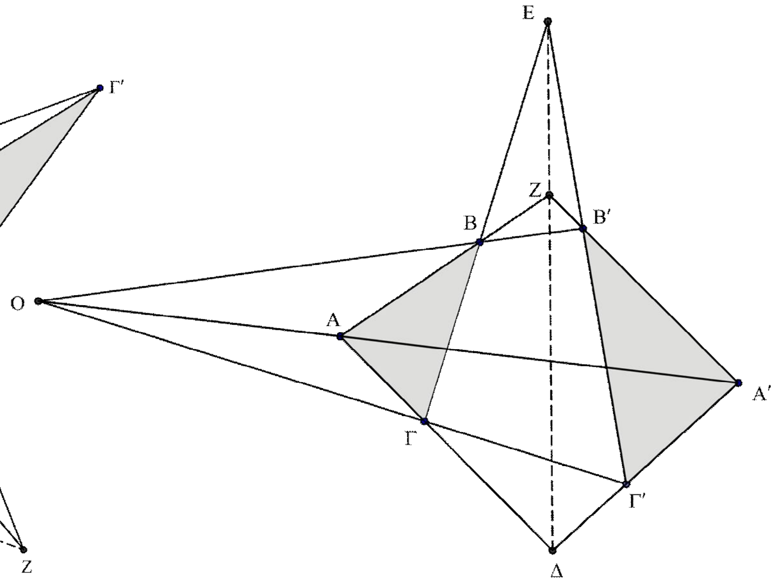
ΓΕΩΜΕΤΡΗ της εποχής μας Κώστα Βήττα

Το θεώρημα Desarques . Στο επίπεδο θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ και την αντιστοιχία: $A \to A', B \to B', \Gamma \to \Gamma'$.

- **i)** **Αν οι ευθείες που συνδέουν τις αντίστοιχες κορυφές διέρχονται από το ίδιο σημείο, οι ευθείες των αντιστοίχων πλευρών των δύο τριγώνων θα τέμνονται σε σημεία συνευθειακά**
- **ii)** **Αντιστρόφως: Αν οι πλευρές δύο τριγώνων ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ τέμνονται σε συνευθειακά σημεία οι ευθείες των αντιστοίχων κορυφών των δύο τριγώνων διέρχονται από το ίδιο σημείο.**

Απόδειξη





- i) Στα τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΓΒ και ΟΒΓ εφαρμόζοντας το θεώρημα του Μενελάου με διατέμνουσες $\Delta A'\Gamma', E\Gamma'B', ZB'A'$ αντίστοιχα : $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}\cdot\frac{A'A}{A'O}\cdot\frac{\Gamma'O}{\Gamma'\Gamma}=1:(1)$, $\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{\Gamma'\Gamma}{\Gamma'O}\cdot\frac{B'O}{B'B}=1:(2)$ και $\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{B'B}{B'O}\cdot\frac{A'O}{A'A}=1:(3)$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε: $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta A}\cdot\frac{EB}{E\Gamma}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1$ οπότε από το αντίστροφο του Μενελάου τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.
- ii) Υποθέτουμε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά και έστω $O = BB' \cap \Gamma\Gamma'$. Θα δείξω ότι τα σημεία Α, Ο, Α′ είναι συνευθειακά. Στα τρίγωνα ΖΒΒ′, ΔΓΓ′ οι ευθείες που ενώνουν τις κορυφές Β, Γ – Β′, Γ′ – Ζ, Δ διέρχονται από το ίδιο σημείο άρα οι αντίστοιχες πλευρές τους, σύμφωνα με το ευθύ του θεωρήματος θα τέμνονται σε συνευθειακά σημεία, δηλαδή τα Α, Ο, Α′ είναι συνευθειακά.

Αιδηψός 19 – Οκτωβρίου 2011

Με εκτίμηση

Στάθης Κούτρας