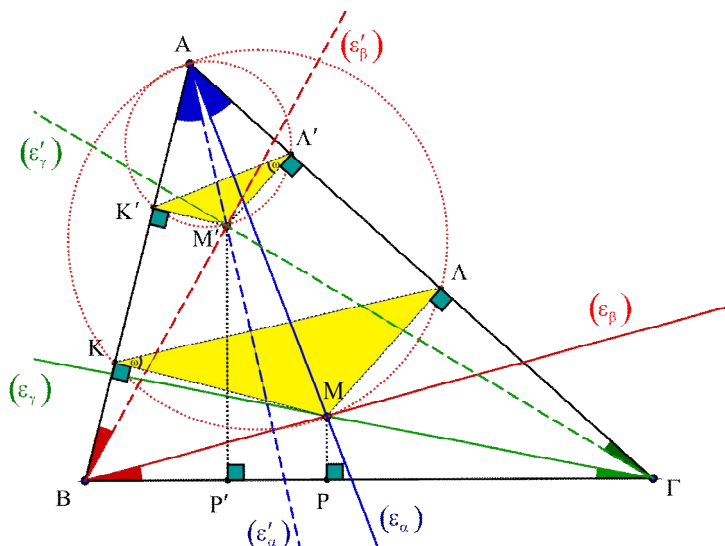


Αφιερωμένο στους Μπάμπη, Σωτήρη και Κώστα

Ορισμός: Θεωρούμε τη γωνία $\widehat{xO\psi}$. Δύο ημιευθείες Oz και Oz' θα λέγονται **ισογώνιες** προς την $\widehat{xO\psi}$ αν είναι συμμετρικές προς τη διχοτόμο της γωνίας αυτής.

Λήμμα: Έστω M είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου τριγώνου $AB\Gamma$. Οι **ισογώνιες** του σημείου M ως προς τις τρεις γωνίες A, B, Γ του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Απόδειξη

Έστω ότι οι **ισογώνιες** των MB και $M\Gamma$ ως προς τις γωνίες B και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο M' . Θα δείξω ότι η AM' είναι η **ισογώνια** της AM ως προς τη γωνία $\hat{A}$. Φέρνουμε τις κάθετες MP, ML και MK από το σημείο M προς τις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A$ και AB αντίστοιχα και από το M' τις κάθετες MP', ML' και MK' προς τις ίδιες αντίστοιχες πλευρές του

τριγώνου. Από το θέμα 3.13 ισχύει:

$$MK \cdot M'K' = ML \cdot M'L' \Rightarrow \frac{MK}{M'L'} = \frac{ML}{M'K'} : (1) \text{ Τα τρίγωνα } MK\Lambda \text{ και } M'K'\Lambda' \text{ έχουν τις}$$

γωνίες $\widehat{KML} = \widehat{K'M'\Lambda'}$ (παράλληλες πλευρές) και από τη σχέση (1) τις πλευρές που περιέχουν τις ίσες αυτές γωνίες ανάλογες οπότε τα τρίγωνα είναι όμοια και συνεπώς θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, δηλαδή θα ισχύει: $\widehat{AKM} = \widehat{K'\Lambda'M'} = \hat{\omega}$. Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $AKML$ και $\Lambda L'M'K'$ προκύπτει ότι $\widehat{AKM} = \widehat{MAL} = \hat{\omega}$ και $\widehat{K'\Lambda'M'} = \widehat{K\Lambda M} = \hat{\omega}$ οπότε και $\widehat{K\Lambda M} = \widehat{MAL} = \hat{\omega}$ οπότε η AM' είναι η **ισογώνια** της AM ως προς την γωνία $\hat{A}$.

Ορισμός. Συμμετροδιάμεσος ενός τριγώνου από την κορυφή A ονομάζεται η **ισογώνια** της διαμέσου του τριγώνου που άγεται από την κορυφή αυτή.

Πόρισμα: Προφανώς οι **συμμετροδιάμεσοι** με βάση το πιο πάνω διέρχονται από το ίδιο σημείο (το σημείο *Lemoine*) αφού οι **διάμεσοι** διέρχονται από το ίδιο σημείο (το βαρύκεντρο)

Αιδηψός 28 Μαρτίου 2011 (η ημέρα του μεγάλου **OXI** του λαού μας)

Στάθης Κούτρας