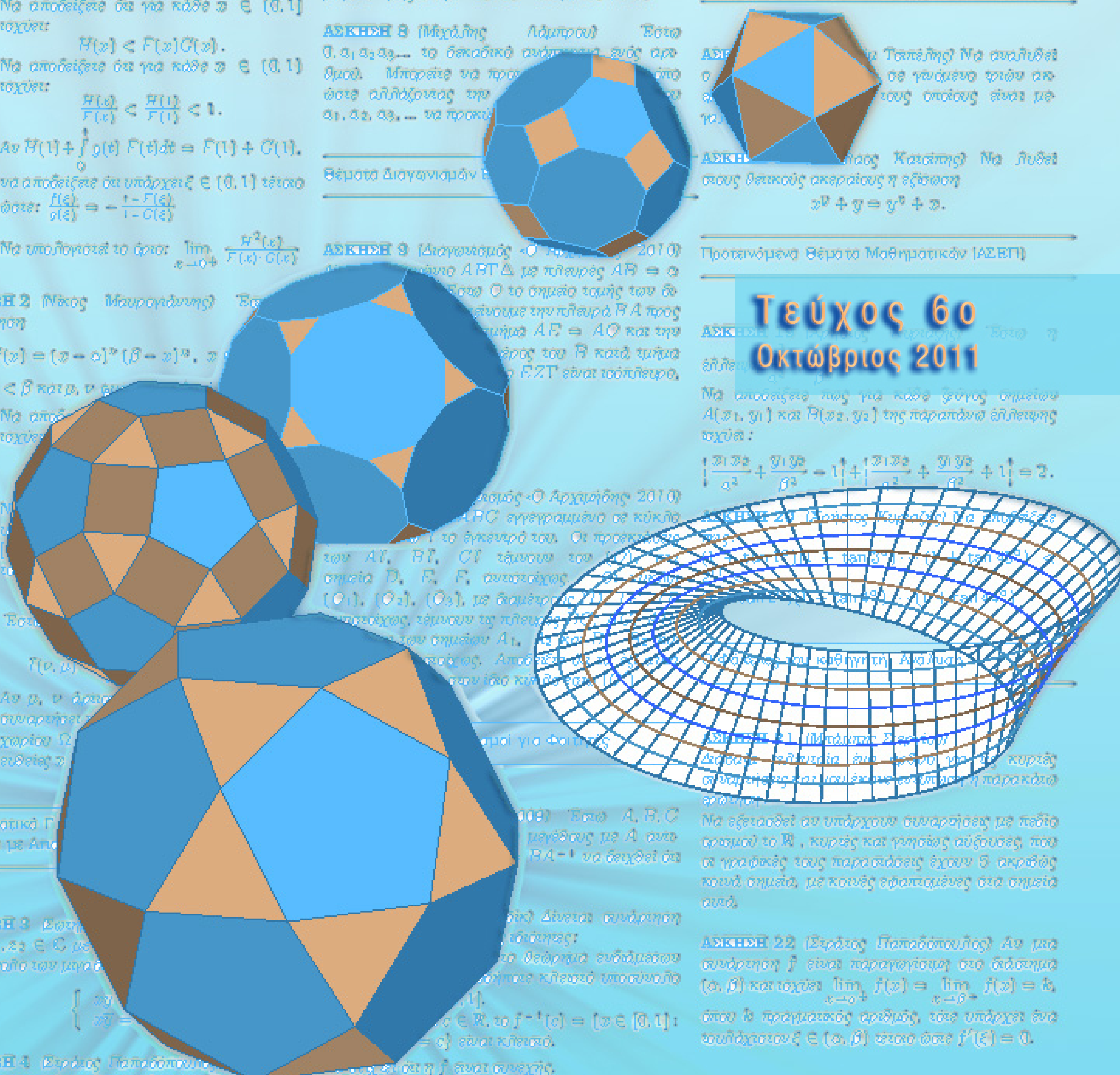
Εικοσιδωδεκάεδρον

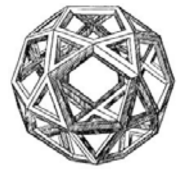
Μαθηματικό Δελτίο



Τεύχος 6ο
Οκτώβριος 2011

www.mathematica.gr

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr.
Η επιλογή και η φροντίδα του περιεχομένου γίνεται από τους Επιμελητές του http://www.mathematica.gr.
Μετατροπές σε LaTeX: *Αλέξανδρος Συγκελάκης*, Σελιδοποίηση-σχήματα: *Νίκος Μαυρογιάννης*, Εξώφυλλο: *Γρηγόρης Κωστάκος*. Στοιχειοθετείται με το LaTeX.
Μπορεί να αναπαραχθεί και να διανεμηθεί ελεύθερα.



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή :http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση: *Παναγιώτης Γιαννόπουλος*

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης) ΟΙ ΑΝΕΞΕΤΑΣΤΕΟΙ. Από τους 120 μαθητές του σχολείου, ποιανού άλλου... του Θωμά, τον Ιούνιο οι 70 προήχθησαν και οι υπόλοιποι έμειναν ανεξεταστέοι για το Σεπτέμβριο. Η ανακοίνωση για τους ανεξεταστέους είχε:*
36 στα Αρχαία Ελληνικά,
35 στην Πληροφορική,
40 στα Μαθηματικά και
42 στην Ιστορία.
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που έχει μείνει και στα τέσσερα μαθήματα;

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Θεωρούμε έναν τριψήφιο αριθμό με τον περιορισμό το μικρότερο και το μεγαλύτερο ψηφίο να διαφέρουν τουλάχιστον κατά 2.*
Με τα ψηφία αυτά δημιουργούμε το μικρότερο και το μεγαλύτερο τριψήφιο και τους αφαιρούμε.
Αν x η διαφορά, αναστρέφουμε τα ψηφία του x και προσθέτουμε στον x. Να αποδείξουμε ότι το τελευταίο άθροισμα είναι πάντα 1089.
Π.χ.
Θεωρώ τον 572. Δημιουργώ τους 752 και 257 και έχω $x = 752-257 = 297$
Τέλος, έχω $792 + 297 = 1089$
ή θεωρώ τον 361. Δημιουργώ τους 631 και 136 και έχω $x = 631 - 136 = 495$
Τέλος, έχω $594 + 495 = 1089$

Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Ένας δήμος έχει μια τετράγωνη πλατεία.*

Αγόρασε όμως και το διπλανό τετραγωνικό οικόπεδο για να μεγαλώσει την πλατεία με συνέπεια το εμβαδόν της νέας πλατείας να διπλασιαστεί και να γίνει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν 72 τετραγωνικά μέτρα.

Αν ο Δήμος θέλει να περιφράξει την πλατεία με κάγκελο, πόσο θα του κοστίσει η περίφραξη, αν γνωρίζουμε ότι για κάθε μέτρο κάγκελο χρειάζεται 50 ευρώ;

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο KARKAR) Ο προπονητής, θα μοιράσει στους τρεις δρομείς του, πριμ 300 €, ανάλογα όμως με την ταχύτητα του καθενός.*

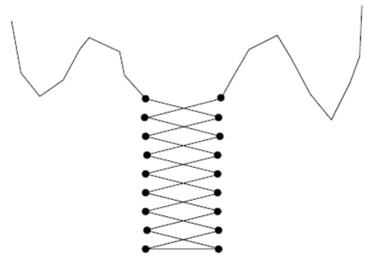
- *Ο πρώτος τερμάτισε σε 20 λεπτά,*
- *ο δεύτερος σε 24 και*
- *ο τρίτος σε 30.*

Πόσα θα πάρει ο καθένας ;

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Ο Αλέξης κι ο Βασίλης συντόνισαν τα ρολόγια τους, ώστε την ώρα που έμπαινε ο καινούργιος χρόνος (δηλαδή το 2011) να δείχνουν και τα δύο ακριβώς 12. Όμως το ρολόι του Αλέξη πάει μπροστά 3 λεπτά το 24ωρο, ενώ του Βασίλη 2 λεπτά πίσω.*
1) Σε ποιά ημερομηνία τα δύο ρολόγια θα δείχνουν πάλι την ίδια ώρα;
2) Σε ποιά ημερομηνία τα δύο ρολόγια θα δείχνουν πάλι την ίδια, αλλά σωστή ώρα;

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Τα παπούτσια του Παναγιώτη έχουν 9 τρύπες σε κάθε πλευρά οι οποίες απέχουν κατακόρυφα $\frac{1}{2}cm$ ενώ οριζόντια $1cm$.*



Τα παπούτσια δένονται όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν τελικά περισσεύει σε κάθε μεριά $12cm$ κορδόνι, τότε βρείτε το μήκος του κορδονιού.

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο δύο απέναντι κορυφές δεν μπορούν να ισαπέχουν από την διαγώνιο των άλλων κορυφών.*

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο KARKAR) Αν $a > b > 0$ και*

$$x = \frac{a-b}{a+b}, y = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

α) Συγκρίνατε τους αριθμούς x, y
β) Δείξτε ότι η (θετική) διαφορά τους είναι μικρότερη του x.

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να λύσετε το σύστημα*

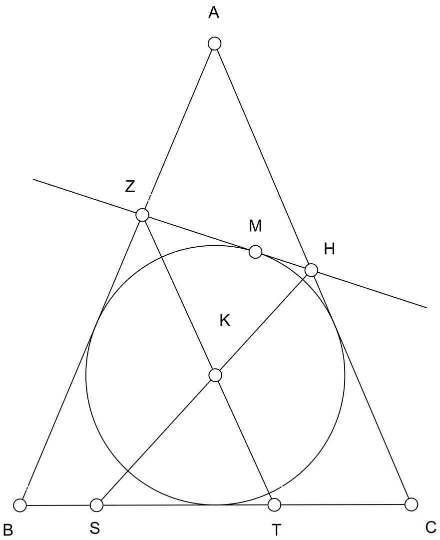
$$\begin{cases} |x-y| - \dfrac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 = 0 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να αποδείξετε ότι*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$$

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο σημείο M του εγγεγραμμένου, στο ισοσκελές τρίγωνο ABC, κύκλου (K, R) φέρω την εφαπτομένη, η οποία τέμνει τις πλευρές AB, AC στα σημεία Z, H αντίστοιχα.*



Οι ευθείες ZK, HK τέμνουν τη βάση BC στα σημεία T, S. Να δειχθεί ότι: $ZH = ST$.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Σε ένα τρίγωνο η $\widehat{\mathrm{B}}$ είναι 30 και η $\widehat{\Gamma}$ είναι 45 μοίρες. Αν M είναι το μέσο του $\mathrm{B\Gamma}$, να βρεθεί η $\mathrm{M\widehat{A}\Gamma}$.*

Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Άλγεβρα

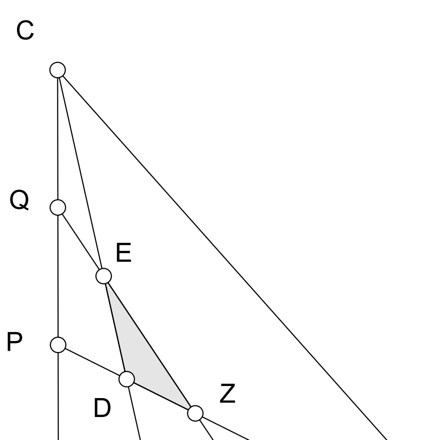
ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Αν για μία αριθμητική (a_n) και μία γεωμετρική (b_n) πρόοδο (οι οποίες δεν είναι σταθερές) ισχύουν $a_1 = b_1, a_2 = b_2$, να δείξετε ότι $b_n > a_n$ για $n \geq 3$.*

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο KARKAR) Να λυθεί η ανίσωση :*

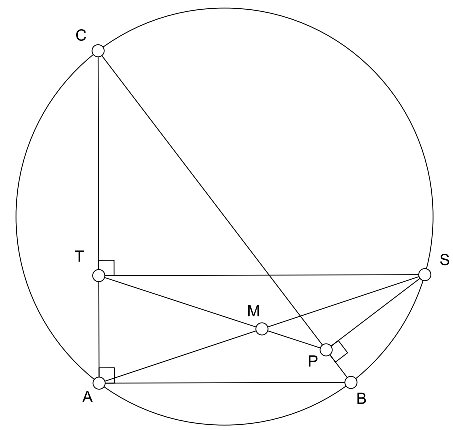
$$(x^4 - x + 1)^x < 1$$

Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $AB = AC = 1$. Στην πλευρά AB θεωρούμε τα σημεία K, L, M με $AK = KL = LM = MB$ και στην AC τα P, Q με $AP = PQ = QC$. Αν D το σημείο τομής των CK, PM, E το σημείο τομής των CK, QL και Z το σημείο τομής των PM, QL να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου DEZ.*



ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο KARKAR) Από τυχαίο σημείο S του περικύκλου, του ορθογωνίου τριγώνου ABC, φέρω τμήματα ST, SP, κάθετα προς την πλευρά CA και την υποτείνουσα CB αντίστοιχα. Δείξτε ότι το PT διχοτομεί το AS.*



Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο ΚΕΦΑΛΟΝΙΤΗΣ) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ έτσι ώστε $|\vec{a}| = 1, \left|\vec{b}\right| = 2, |\vec{c}| = 3$.Να αποδείξτε ότι $2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} \neq \vec{0}$.*

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η έλλειψη $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εστία της $E(\gamma, 0)$. Αν $\mathrm{K\Lambda}$ είναι τυχαία χορδή της έλλειψης C, με $(\mathrm{EK}) + (\mathrm{E\Lambda}) = \mathrm{a}$, τότε να δείξετε ότι το μέσο της $\mathrm{K\Lambda}$ ανήκει σε μία σταθερή ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.*

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης) Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με$f(x) = (a^2 + b^2)x^2 - 2ax$ και $g(x) = 4bx + 5$.*

i) *Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} f(x) + \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$ να δείξετε ότι $a = 1$ και $b = -2$.*

ii) *Για τις παραπάνω τιμές των a, b να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to \frac{3}{5}} \dfrac{f(x) - \frac{3}{5}}{g(x) + 13x - 8}$.*

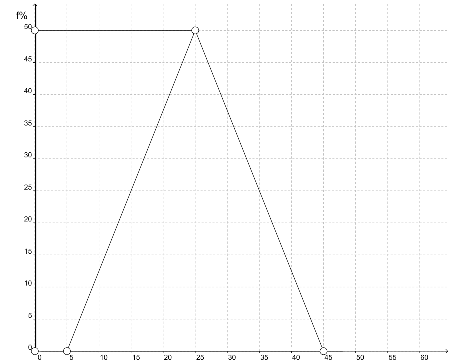
iii) *Για τις παραπάνω τιμές των a, b να βρεθεί ο θετικός αριθμός λ για τον οποίο ισχύει η σχέση $f'(-\frac{3}{5})ln^2\lambda = g'(2012)$.*

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Ένα δείγμα ομαδοποιήθηκε σε k κλάσεις, ίσου πλάτους c. Παρακάτω δίνεται το πολύγωνο f_i το οποίο έχει σχήμα τριγώνου.*

α. *Να εκφράσετε το c ως συνάρτηση του k.*

β. *Να βρείτε τα c, k.*

γ. *Αν $f_1 = 25$, να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα f_i*



Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Δημήτριος Κατσίποδας) Δίνεται η εξίσωση* $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ *με* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,$z \in C$ *και* z_1, z_2 *είναι οι ρίζες της με* $z_1 = 2 + i$

i. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2008} + z_2^{2008} \in \mathbb{R}$. Αν $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ οι εικόνες των z_1, z_2 και z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5}(17 + i)$$

τότε:

iii. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

iv. Αν $|w - z_1| = |\bar{w} - z_1|$ να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$.

v. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w που επαληθεύουν την $|w - z_2| + |\bar{w} - z_2| = 10$, βρίσκονται σε έλλειψη.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης) Για το μιγαδικό αριθμό* $z = x + yi$ *με* $x, y \in \mathbb{R}$ *ισχύει η σχέση:* $(1 - \lambda i)z = 4 - 2i$, $\lambda \in \mathbb{R}$
α) Να αποδείξετε ότι: $(x + \lambda y) + (-\lambda x + y)i = 4 - 2i$
β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του $M(x, y)$ του z ανήκει σε κύκλο.
γ) Μπορεί το σημείο $M(x, y)$ να πάρει την θέση $O(0, 0)$;

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση,Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Γιωργος Τσικαλουδακης) Έστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *αντιστρέψιμη τέτοια ώστε για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *να ισχύει:*

$$e^{1-f^{-1}(x)} - f^{-1}(x) = x + 1$$

1. Να βρεθεί η f.
2. Να αποδείξετε ότι:
   α. η f είναι γνήσίως φθίνουσα.
   β. οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
3. Να υπολογιστούν τα όρια:
   i. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f^{-1}(x) + x\right)$
   ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Στράτος Παπαδόπουλος) Έστω οι συναρτήσεις* f, g *με κοινο πεδιο ορισμού Α, τέτοιες ώστε* $f^2(x) + g^2(x) = 1$ *για κάθε* x *στο Α.*

Α) Αν ισχυει $\dfrac{f^4(x)}{\alpha} + \dfrac{g^4(x)}{\beta} = \dfrac{1}{\alpha + \beta}$ με α, β πραγματικοι διαφοροι του 0, $\alpha + \beta \neq 0$ να δειξετε ότι

$$\frac{f^8(x)}{\alpha^3} + \frac{g^8(x)}{\beta^3} = \frac{1}{(\alpha + \beta)^3}.$$

Β) Να δειξετε ότι $|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Αν οι συναρτήσεις:* $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν*

1) $f(1) = g(0) + 1$

2) $f(x) \geq g(x), \ \forall x \in [0, 1]$

3) $f'(sin^2 x) + g'(cos^2 x) = 2, \ \forall x \in \mathbb{R}$

τότε να δειχθεί ότι: $f = g$

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης* $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *που είναι τέτοια ώστε* $f'(x) = -3 \ln f(x)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *και* $f(1) = 1$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνεχής συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *η οποια είνα γνησίως αύξουσα*

Να δείξετε ότι

$$\frac{a + b}{2} \int_a^b f(x)dx < \int_a^b x f(x)dx$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Οι συναρτήσεις* f, g *είναι συνεχείς στο* $\mathbb{R}$ *και επιπλέον*
1) $f(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{Z}$,
2) $f(x) = \int_0^x f(t)e^{g(t)}dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Christiano) Αν για μια* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ισχύει* $2f^3(x) + 2f(x) = sinf(x) + x^2$ *να δείξετε ότι* $|f(x)| \leq |x|$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης) Δίνεται η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *δύο φορές παραγωγίσιμη με* $f''(x) \neq 0$ *με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Η γραφική παράσταση της* f' *διέρχεται από τα σημεία* $A(1, 0)$ *και* $B(2, -1)$.

Α Να δείξετε ότι η f' έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Β Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ Έστω ο μιγαδικός u. Αν ισχύει

$$f'\left(2 + f'\left(|i \cdot u + 1|\right)\right) < 0$$

να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u.

Δ Έστω οι μιγαδικοί z, z_1, z_2, w για τους οποίους ισχύει $|z - z_1| = f(1)$, $|w - z_2| = f(2)$ και $|z_1 - z_2| = 2f\left(\frac{3}{2}\right)$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να αποδείξετε ότι*

$$\left(\frac{x}{\ln(x + 1)}\right)^{e^x - x - 1} > \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{x - \ln(x+1)}$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Έστω η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *κυρτή και τέτοια ώστε να υπάρχουν* $\alpha < \beta$ *πραγματικοί με* $\alpha < \beta$ *και*

$$f\left(f(\alpha) + b\right) + f\left(f(b) + \alpha\right) =$$
$$f(\alpha) \cdot f'(b) + f'(\alpha) \cdot f(b) + f(\alpha) + f(b)$$

Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστη τιμή, η οποια είναι αρνητική.

Ασκήσεις μόνο για μαθητές

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Νίκος Ζανταρίδης) Δίνεται τρίγωνο* $AB\Gamma$ *και τα ύψη* $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$. *Αν* $BA_1 + \Gamma B_1 + A\Gamma_1 = A_1\Gamma + B_1 A + \Gamma_1 B$, *να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Σπύρος Καπελλίδης) Έστω* $a \in \mathbb{R}^*$ *και* $b, c \in \mathbb{R}$ *ώστε* $4ac < (b - 1)^2$ *και* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση με την ιδιότητα* $f(ax^2 + bx + c) = af^2(x) + bf(x) + c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(f(x)) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση.

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών τιμών, που μπορεί να λάβει η συνάρτηση*

$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3}\right] + [3x] + [4x],$$

όταν $x \in [0, 100]$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί* $0, 1, 2, ..., 100$ *με κενά μεταξύ τους. Ένας μαθητής, ο* A, *τοποθετεί στα κενά* 50 $+$ *και* 50 $*$ *και υπολογίζει την τιμή της παράστασης που προκύπτει (με τη συνήθη προτεραιότητα πράξεων.) Έστω ότι το αποτέλεσμα που βρίσκει είναι ο αριθμός* a. *Στη συνέχεια ο μαθητής* B *αλλάζει όλα τα* $+$ *σε* $*$ *και όλα τα* $*$ *σε* $+$ *στην παράσταση που σχημάτισε ο* A *και υπολογίζει την τιμή της νέας παράστασης, έστω* b. *Αν τα τέσσερα τελευταία ψηφία του αριθμού* $a + b$ *είναι* 2011, *να δείξετε ότι κάποιος από τους μαθητές έκανε λάθος στις πράξεις.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Δίνεται κυρτό τετράπλευρο* $ABCD$. *Οι διαγώνιοι του* AC, BD *τέμνονται στο σημείο* O. *Αν οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων* $\triangle\, OAB$, $\triangle\, OBC$, $\triangle\, OCD$, $\triangle\, ODA$ *είναι αντίστοιχα* r_1, r_2, r_3, r_4 *και* E *είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου* $ABCD$. *Να αποδείξετε ότι:* $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geq E$. *Πότε ισχύει η ισότητα;*

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Έστω* $\triangle\ ABC$, $\hat{A} = 90^o$, $AB = AC$, *με* D *τυχόν σημείο της υποτείνουσας* BC. *Φέρουμε* $DE \perp AB$, $DZ \perp AC$ *και έστω το σημείο* $H \equiv BZ \cap CE$. *Να δείξετε ότι* $DH \perp EZ$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογιώργης) Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *τέτοιες ώστε*

$$f(x - y + f(y)) = f(x) + f(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Κώστας Τσουβαλάς) Αν* $x, y, z > 0$ *με* $xyz = 1$, *να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leqslant \frac{1}{2}$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Δίνεται τρίγωνο* $\triangle\ ABC$ *και έστω* M *τυχόν σημείο στο εσωτερικό του. Έστω* $A^{'} \equiv BC \cap AM$, $B^{'} \equiv AC \cap BM$, $C^{'} \equiv AB \cap CM$ *και* $E_1 = (BA^{'}M)$, $E_1^{'} = (CA^{'}M)$ *και* $E_2 = (CB^{'}M)$, $E_2^{'} = (B^{'}AM)$ *και* $E_3 = (AC^{'}M)$, $E_3^{'} = (C^{'}BM)$. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} = \frac{1}{E_1^{'}} + \frac{1}{E_2^{'}} + \frac{1}{E_3^{'}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Χρήστος Στραγάλης) Εστω ένα σκαληνό τρίγωνο* $\triangle ABC$, (ω_1) *ο περίκυκλός του με κέντρο* O *και* (ω_2) *ο περίκυκλος του τριγώνου* $\triangle AOC$. *Έστω επίσης* OQ *η διάμετρος του κύκλου* (ω_2) *και τα σημεία* M, N *που επιλέγονται με τέτοιον τρόπο επί των ευθειών* AQ, AC *αντίστοιχα, ώστε το τετράπλευρο* $AMBN$ *να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδειχθεί οτι το σημείο τομής των ευθειών* MN, BQ *ανήκει στον κύκλο* (ω_2).

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Λώλας) Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$9^x + 10^y = 12^z + 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Αν* $\tau(n)$ *το πλήθος και* $\sigma(n)$ *το άθροισμα των διαιρετών του θετικού ακεραίου* n, *να δείξετε ότι*

$$\sqrt{n} \leq \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leq \frac{n+1}{2}$$

Πότε ισχύει καθεμιά ισότητα;

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον IMC 2011/B3) Υπολογίστε το*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \ln\left(1 + \tfrac{1}{2n}\right) \ln\left(1 + \tfrac{1}{2n+1}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Από τον IMC 2011/A4) Έστω τα* $A_1, A_2, ..., A_n$, *τα οποία είναι πεπερασμένα, μη κενά σύνολα. Έστω η συνάρτηση:*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}|}.$$

Αποδείξτε ότι η f *είναι μη φθίνουσα στο* $[0, 1]$.

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προείνει ο Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Έστω* $A \in M_{3,2}(\mathbb{C})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{C})$ *τέτοιοι ώστε*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η ορίζουσα $\det(BA)$.

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω ο* $n \times n$ *πίνακας* $A = (a_{ij})$, *με* $a_{ij} \in \{0, 1\}$ *για κάθε* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *για τον οποίο ισχύει η σχέση*

$$AA^t = mI_n + J_n$$

όπου m *θετικός ακέραιος,* J_n *ο* $n \times n$ *πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με* 1, I_n *ο* $n \times n$ *μοναδιαίος πίνακας και* A^t *ο ανάστροφος του* A. *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας* A *είναι κανονικός, δηλαδή ότι ισχύει* $AA^t = A^tA$.

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln^2 n}{n} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\ln k \ln(n-k)}\,.$$

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Να υπολογισθεί το*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2\,(x^2 + a)} dx\,,\ a > 0\,.$$

ΑΕΙ Μαθηματική Λογική και Θεμέλια Μαθηματικών

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Δημήτρης Σκουτέρης) Εστω* $\bar{A} = \langle A, \leq \rangle$ *μια καλή διάταξη. Να αποδειχθεί ότι* $\bar{A} = \bar{B} + \bar{C}$, *όπου η* $\bar{B}$ *είναι μια καλή διάταξη χωρίς μέγιστο και η* $\bar{C}$ *μια πεπερασμένη διάταξη. (Λέμε ότι* $\langle A, \leq_A \rangle = \langle B, \leq_B \rangle + \langle C, \leq_C \rangle$ *αν και μόνο αν* $x \leq_A y \Leftrightarrow (x \leq_B y \bigvee x \leq_C y \bigvee (x \in B \wedge y \in C))$ *).*

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Ποτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Ονομάζουμε μια διάταξη* $\prec$ *ενός συνόλου* X *άριστη αν κάθε μη κενό υποσύνολο του* X *έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο σε σχέση με την* $\prec$*. Να εξεταστεί σε ποια σύνολα μπορούμε να ορίσουμε μια άριστη διάταξη.*

Γεωμετρία ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Atemlos) Να δείξετε ότι, εάν κάθε επίπεδη τομή ενός τρισδιάστατου στερεού σώματος είναι κύκλος, τότε το στερεό είναι σφαίρα.*

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω διανύσματα* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$*. Να λυθεί η εξίσωση* $\mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να δείξετε ότι η ακολουθία* $a_n = \sqrt{24n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *έχει ως όρους όλους τους πρώτους αριθμούς εκτός από το* 2 *και το* 3.

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να δείξετε ότι αν η διαφορά των κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι τετράγωνο ακέραιου, τότε ο ακέραιος αυτός είναι άθροισμα τετραγώνων διαδοχικών ακεραίων.*
(για παράδειγμα $8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2$ *και* $13 = 2^2 + 3^2$*)*

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να αποδείξετε, ότι*

$$\sin 1^\circ + \sin 3^\circ + \sin 5^\circ + \cdots + \sin 99^\circ = \frac{\sin^2 50^\circ}{\sin 1^\circ}$$

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Σε κόλουρη τριγωνική πυραμίδα οι πλευρές των βάσεων είναι* $3a, a$ *καθώς και τα αντίστοιχα εμβαδά των βάσεων είναι* E_1, E_2*. Αν το εμβαδό της μεσαίας τομής είναι* E *να δείξετε ότι:* $E = \dfrac{2}{9}(E_1 + 9E_2)$.

Ο Φάκελος του καθηγητή, Ανάλυση

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο pla.pa.s) Ένα λεπτό σημείο στον κανόνα de l' Hospital είναι ότι το όριο* $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ *πρέπει να υπάρχει. Μπορεί μήπως κάποιος να δώσει ένα αντιπαράδειγμα στο παραπάνω; Δηλαδή ένα παράδειγμα ενός κλάσματος* $\frac{f(x)}{g(x)}$

- *που το όριο του παίρνει απροσδιόριστη μορφή σε κάποιο* x_0 *(πεπερασμένο ή άπειρο),*
- *το όριο αυτό (δηλαδή το* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$*) υπάρχει και είναι υπολογίσιμο χωρίς de l' Hospital,*
- *οι* f, g *είναι παραγωγίσιμες (ή έστω κοντά στο* x_0*) και*
- *το όριο* $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *δεν υπάρχει.*

Επίσης, είναι δυνατόν ένα όριο να υπάρχει αλλά να μην είναι υπολογίσιμο;

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση. Μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο επί του* $\mathbb{R}$ *συναρτήσεων;*

Ο Φάκελος του καθηγητή, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) [Σ. Κανέλλου, «Γεωμετρικές Κατασκευές», «Ευκλείδειος Γεωμετρία Ι» (Α' Λυκείου, 1976)] Να κατασκευαστεί τετράγωνον του οποίου γνωρίζομεν δύο σημεία* P *και* K *κείμενα επί των φορέων των δύο διαγωνίων του και δύο σημεία* E *και* Z *κείμενα επί των φορέων των δύο απέναντι πλευρών του.*

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Γιώργος Μπαλόγλου) Να βρεθεί γεωμετρικά το κέντρο βάρους τυχόντος τραπεζίου.*

Ο Φάκελος του καθηγητή, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 63 *(Προτείνει ο Νικος Αντωνόπουλος) Έστω* $P(x)$ *πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Αν ισχύουν* $P(1) = 6$ *και* $P(7) = 3438$*, να υπολογίσετε την τιμή του πολυωνύμου για* $x = 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 64 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Έστωσαν τα πολυώνυμα*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

και

$$Q(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$$

με συντελεστές από το $\mathbb{C}$.

Οι ρίζες του P *είναι οι* $x_1, x_2, ..., x_n$*, ενώ του* Q *είναι οι* $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2$*. Αν* $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots \in \mathbb{R}$ *και* $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots \in \mathbb{R}$*, να αποδείξετε, ότι* $b_1 + b_2 + \cdots b_n \in \mathbb{R}$.

Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης) ΟΙ ΑΝΕΞΕΤΑΣΤΕΟΙ. Από τους* 120 *μαθητές του σχολείου, ποιανού άλλου... του Θωμά, τον Ιούνιο οι* 70 *προήχθησαν και οι υπόλοιποι έμειναν ανεξεταστέοι για το Σεπτέμβριο. Η ανακοίνωση για τους ανεξεταστέους είχε:*
36 *στα Αρχαία Ελληνικά,*
35 *στην Πληροφορική,*
40 *στα Μαθηματικά και*
42 *στην Ιστορία.*
Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μαθητών που έχει μείνει και στα τέσσερα μαθήματα;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=55933

Λύση 1 (Χρήστος Στραγάλης) Είναι

$$36+35=71>120-70=50$$

άρα τουλάχιστον 21 μαθητές έμειναν και στα 2 πρώτα μαθήματα. Επίσης:

$$40+42=82>50$$

και άρα τουλάχιστον 32 μαθητές έμειναν και στα Μαθηματικά και στην Ιστορία. Όμως

$$32+21=53>50$$

άρα τουλάχιστον 3 μαθητές έμειναν και στα 4 μαθήματα

Λύση 2 (Μιχάλης Λάμπρου) Από τους

$$120-70=50$$

που έμειναν, οι 42 έμειναν στην Ιστορία. Οι υπόλοιποι είναι

$$50-42=8$$

Στην καλύτερη περίπτωση, από τους 40 στα Μαθηματικά, έχουμε

$$40-8=32$$

που έμειναν και στα δύο αυτά μαθήματα. Εξετάζουμε αυτούς τους 32.

Στην καλύτερη περίπτωση, από τους

$$50-35=15$$

που δεν έμειναν στη Πληροφορική, οι υπόλοιποι

$$32-15=17$$

είναι μεταξύ των προηγούμενων 32, δηλαδή 17 έμειναν και στα τρία αυτά μαθήματα.

Εξετάζουμε τους 17. Από τους

$$50-36=14$$

που δεν έμειναν στα Αρχαία οι υπόλοιποι

$$17-14=3$$

είναι μεταξύ των προηγούμενων 17. Δηλαδή, στην καλύτερη περίπτωση, 3 έμειναν σε όλα τα μαθήματα.

Λύση 3 (Ανδρέας Βαρβεράκης)

$$36+35+40+42=153$$

Αν και οι 50 είχαν μείνει σε 3 το πολύ μαθήματα, τότε το άθροισμα θα ήταν το πολύ 150. Επομένως τουλάχιστον 3 έμειναν σε τέσσερα μαθήματα.

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Θεωρούμε έναν τριψήφιο αριθμό με τον περιορισμό το μικρότερο και το μεγαλύτερο ψηφίο να διαφέρουν τουλάχιστον κατά* 2*.*
Με τα ψηφία αυτά δημιουργούμε το μικρότερο και το μεγαλύτερο τριψήφιο και τους αφαιρούμε.
Αν x *η διαφορά, αναστρέφουμε τα ψηφία του* x *και προσθέτουμε στον* x*. Να αποδείξουμε ότι το τελευταίο άθροισμα είναι πάντα* 1089*.*
Π.χ.

Θεωρώ τον 572. *Δημιουργώ τους* 752 *και* 257 *και έχω* $x = 752 - 257 = 297$
Τέλος, έχω $792 + 297 = 1089$
ή θεωρώ τον 361. *Δημιουργώ τους* 631 *και* 136 *και έχω* $x = 631 - 136 = 495$
Τέλος, έχω $594 + 495 = 1089$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=84884

Λύση (Μιχάλης Νάννος) Ο αριθμός που προκύπτει από την αφαίρεση του xyz από τον zyx είναι της μορφής

$$99(x-z)$$

ή πολ 99 ή $a99$ όπου a φυσικός από 2 έως και 8. Άρα πρέπει τον $a99$ να τον γράψουμε σε αναπτυγμένη μορφή.

$$99a = 90a + 9a = 100a - 10a + 9a = 100a - a =$$

$$100a - 100 + 100 - a =$$

$$(a-1)100 + 9 \cdot 10 + (10-a)$$

Ο ανάποδος αριθμός λοιπόν θα είναι:

$$(10-a)100 + 9 \cdot 10 + (a-1)$$

Αν τους προσθέσεις αυτούς τους δύο δίνουν άθροισμα 1089.

Μαθηματικά Α' Γυμνασίου

Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

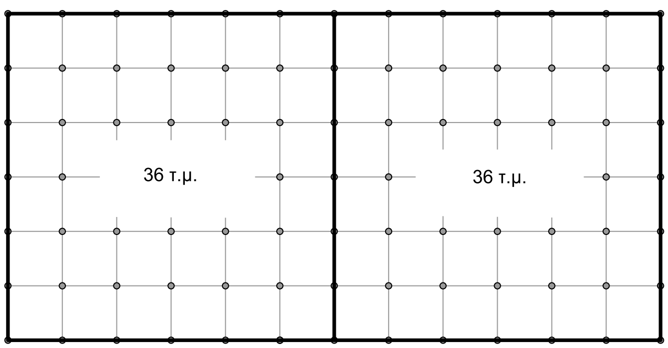
ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Ένας δήμος έχει μια τετράγωνη πλατεία.*

Αγόρασε όμως και το διπλανό τετραγωνικό οικόπεδο για να μεγαλώσει την πλατεία με συνέπεια το εμβαδόν της νέας πλατείας να διπλασιαστεί και να γίνει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν 72 τετραγωνικά μέτρα.

Αν ο Δήμος θέλει να περιφράξει την πλατεία με κάγκελο, πόσο θα του κοστίσει η περίφραξη, αν γνωρίζουμε ότι για κάθε μέτρο κάγκελο χρειάζεται 50 ευρώ;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=87192

Λύση (Γιώργος Απόκης) Αφού το εμβαδόν διπλασιάστηκε και έγινε 72 τ.μ., αρχικά ήταν $72 : 2 = 36$ τ.μ.



Η αρχική πλατεία λοιπόν αφού είχε σχήμα τετραγώνου, είχε πλευρά 6 μ. γιατί $6^2 = 36$.
Η νέα πλατεία έχει διαστάσεις 6 μ. και $2 \cdot 6 = 12$ μ., άρα περίμετρο

$$\Pi = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 6 = 36 \ \mu$$

Η περίφραξη θα κοστίσει, επομένως, $36 \cdot 50 = 1800$ ευρώ.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο KARKAR) Ο προπονητής, θα μοιράσει στους τρεις δρομείς του, πριμ 300 €, ανάλογα όμως με την ταχύτητα του καθενός.*

- *Ο πρώτος τερμάτισε σε 20 λεπτά,*
- *ο δεύτερος σε 24 και*
- *ο τρίτος σε 30.*

Πόσα θα πάρει ο καθένας ;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=85871

Λύση (Γιώργος Απόκης) Αφού η ταχύτητα είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου, αρκεί να μοιράσουμε το ποσό των 300 ευρώ, σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς

$$\frac{1}{20}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}$$

Αν a, b, c είναι τα ποσά που θα πάρουν, έχουμε:

$$\frac{a}{\frac{1}{20}} = \frac{b}{\frac{1}{24}} = \frac{c}{\frac{1}{30}} =$$

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{20}+\frac{1}{24}+\frac{1}{30}} =$$

$$\frac{300}{\frac{15}{120}} = 2400$$

Επομένως,

$$\frac{a}{\frac{1}{20}} = 2400 \Leftrightarrow a = 120€$$

$$\frac{b}{\frac{1}{24}} = 2400 \Leftrightarrow b = 100€$$

$$\frac{c}{\frac{1}{30}} = 2400 \Leftrightarrow c = 80€$$

Σημείωση: Θεωρούμε προφανώς ότι έτρεξαν την ίδια διαδρομή και καθένας έχει σταθερή ταχύτητα ή ότι το ποσό θα μοιραστεί σε ποσά ανάλογα με τη μέση ταχύτητα του καθενός.

Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

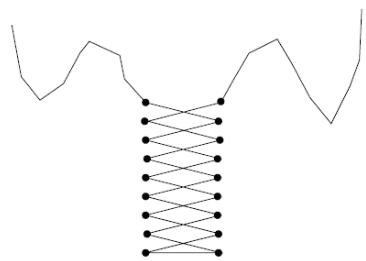
ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Ο Αλέξης κι ο Βασίλης συντόνισαν τα ρολόγια τους, ώστε την ώρα που έμπαινε ο καινούργιος χρόνος (δηλαδή το 2011) να δείχνουν και τα δύο ακριβώς 12. Όμως το ρολόι του Αλέξη πάει μπροστά 3 λεπτά το 24ωρο, ενώ του Βασίλη 2 λεπτά πίσω.*
1) Σε ποιά ημερομηνία τα δύο ρολόγια θα δείχνουν πάλι την ίδια ώρα;
2) Σε ποιά ημερομηνία τα δύο ρολόγια θα δείχνουν πάλι την ίδια, αλλά σωστή ώρα;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=72306

Λύση (KARKAR) Υποθέτουμε (πράγμα που συνήθως συμβαίνει), ότι το κάθε ρολόι επαναλαμβάνει τις ενδείξεις του ανά 12 και όχι ανά 24 ώρες. Κάθε μέρα (24-ωρο) η διαφορά των 2 ρολογιών αυξάνει κατά 5 λεπτά. Θα δείξουν την ίδια ώρα, όταν η διαφορά τους γίνει 12 ώρες ($= 720$ λεπτά). Αυτό θα συμβεί σε $720 : 5 = 144$ ημέρες. Πράγματι τότε το μεν Α θα έχει κερδίσει $144 * 3 = 432$ λεπτά (= 7 ώρες και 12 λεπτά), ενώ το Β θα έχει χάσει $144 * 2 = 288$λεπτά (= 4 ώρες και 48 λεπτά). Δηλαδή όταν η σωστή ώρα θα είναι 12 (αλλαγή ημέρας), τα δυό ρολόγια θα δείχνουν 7.12 απογευματινή (12+7.12, 12-4.48)

Αυτό συνέβη ήδη, 144 πλήρεις ημέρες μετά την έλευση του 2011, και η ημερομηνία ήταν (31+28+31+30+24) μέρες μετά, δηλαδή 24 Μαίου. Τώρα, το Α θα ξαναδείχνει τη σωστή ώρα, κάθε φορά που θα καλύπτει ακριβώς ένα 12ωρο κι αυτό θα συμβαίνει κάθε $720 : 3 = 240$ ημέρες. Ομοίως το Β θα ξαναδείχνει τη σωστή ώρα, κάθε φορά που θα μένει πίσω ακριβώς ένα 12ωρο κι αυτό θα συμβαίνει κάθε $720 : 2 = 360$ ημέρες. Ευτυχώς το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των (240, 360) είναι μόλις το 720, συνεπώς τα δύο ρολόγια θα «συντονιστούν» μεταξύ τους, αλλά και με την πραγματικότητα, 720 ημέρες μετά την Πρωτοχρονιά του 2011, δηλαδή μετά από 365+355 ημέρες και - λόγω της δισεκτότητας του 2012 - αυτό θα συμβεί 11 μέρες πριν τη λήξη του, δηλαδή υπομονή μέχρι την 20στή Δεκεμβρίου 2012!

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Τα παπούτσια του Παναγιώτη έχουν 9 τρύπες σε κάθε πλευρά οι οποίες απέχουν κατακόρυφα $\frac{1}{2}cm$ ενώ οριζόντια $1cm$.*

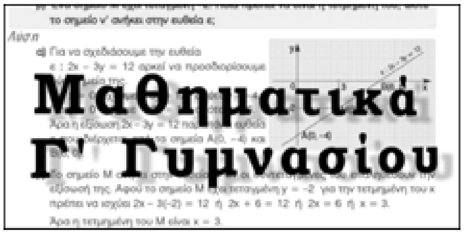


Τα παπούτσια δένονται όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν τελικά περισσεύει σε κάθε μεριά $12cm$ κορδόνι, τότε βρείτε το μήκος του κορδονιού.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=85516

Λύση (Γιώργος Απόκης) Αν θεωρήσουμε το ορθογώνιο που σχηματίζουν τα πρώτα 4 σημεία, έχουμε ότι το «λοξό» τμήμα (από Πυθαγόρειο Θεώρημα) έχει μήκος $\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ cm$. Άρα, συνολικά έχουμε μήκος

$16 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + 1 + 2 \cdot 12 = 8\sqrt{5} + 25\ cm$



Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο δύο απέναντι κορυφές δεν μπορούν να ισαπέχουν από την διαγώνιο των άλλων κορυφών.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=60737

Λύση 1 (Φώτης Μαραντίδης) Έστω τραπέζιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με $\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$.

Φέρνουμε την διαγώνιο $\mathrm{B\Delta}$ και έστω ότι οι αποστάσεις των A, Γ από την $\mathrm{B\Delta}$ είναι οι AE, $\Gamma\mathrm{Z}$ αντίστοιχα.

Έχουμε τα τρίγωνα ABE και $\Delta\Gamma\mathrm{Z}$.

Αυτά τα τρίγωνα είναι όμοια γιατί έχουν από μία γωνία ορθή ($\widehat{\mathrm{AEB}} = \widehat{\Gamma\Delta\mathrm{Z}} = 90^\circ$)και $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\Gamma\Delta\mathrm{Z}}$ ως εντός εναλλάξ από τις παράλληλες πλευρές.

Με την εις άτοπο απαγωγή έχουμε : Αν $\mathrm{AE} = \Gamma\mathrm{Z}$ τότε τα παραπάνω τρίγωνα ειναι ίσα (κριτήρια ισότητας τριγώνων) και οι πλευρές τους ίσες, δηλαδή $\mathrm{AB} = \Gamma\Delta$, που είναι άτοπο γιατί ειναι οι παράλληλες πλευρές τραπεζίου που εξ' ορισμού είναι άνισες. Άρα οι αποστάσεις ειναι άνισες.

Λύση 2 (Κώστας Καπένης) Ενδιαφέρων τρόπος να καταλήξουμε ότι οι βάσεις θα ήταν ίσες είναι και με τη βοήθεια των εμβαδών. Αν οι αποστάσεις είναι ίσες τότε τα τρίγωνα ABD, BCD γίνονται ισεμβαδικά λόγω της κοινής βάσης BD. Όμως αφού έχουν και ίσα ύψη (τις αποστάσεις των βάσεων) τότε θα έπρεπε και οι βάσεις του τραπέζιου να ήταν ίσες - άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο KARKAR) Αν $a > b > 0$ και*

$$x = \frac{a-b}{a+b}, y = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

α) Συγκρίνατε τους αριθμούς x, y
β) Δείξτε ότι η (θετική) διαφορά τους είναι μικρότερη του x.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=66599

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) α) Έχουμε ότι: $x = \dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$, οπότε $x < y$, αφού ανάμεσα σε δύο κλάσματα με τον ίδιο αριθμητή $(a^2 - b^2)$, μεγαλύτερο είναι εκείνο με τον μικρότερο παρονομαστή $(a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2)$.

β)

$$\begin{aligned} y - x < x \quad &\Leftrightarrow \quad y < 2x \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} < 2\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a^2+b^2} < \frac{2}{a^2+2ab+b^2} \\ &\Leftrightarrow \quad a^2+2ab+b^2 < 2a^2+2b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2-2ab+b^2 > 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 > 0, \end{aligned}$$

η οποία ισχύει, άρα και η αρχική.

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να λύσετε το σύστημα*

$$\begin{cases} |x-y| - \dfrac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 = 0 \end{cases}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=94586

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Έστω (x,y) λύση του συστήματος (με $x \neq 0$). Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 \\ &\geq |2x-y-(x-y)| + |x+y-1| + y - 1 \\ &= |x| + |x+y-1| + y - 1 \geq |x+y-1| + x + y - 1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Άρα πρέπει να ισχύει παντού ισότητα. Επομένως πρέπει $(2x-y)(x-y) \leq 0, x > 0, x+y-1 \leq 0$. (1)

Λόγω της $x > 0$, η πρώτη εξίσωση γράφεται ως $|x-y| = 0$, άρα $x = y$.

Τότε, από τις (1) βρίσκουμε $x \leq \dfrac{1}{2}$.

Είναι απλό να δούμε ότι όλα τα ζεύγη (a,a) με $a \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$ είναι λύσεις του συστήματος.

Λύση 2 (Χρήστος Λαζαρίδης) Για $x \geq 0$ η πρώτη εξίσωση γράφεται, $|x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη και έχουμε: $x + |2x-1| + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$|2x-1| = -(2x-1) \Leftrightarrow 2x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$

Για $x < 0$ η πρώτη γράφεται

$|x-y| + 1 = -1 \Leftrightarrow |x-y| = -2$. Το σύστημα είναι αδύνατο.

Τελικά έχουμε τις λύσεις: $(x,y) = (a,a), 0 < a \leq \dfrac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να αποδείξετε ότι*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=94028

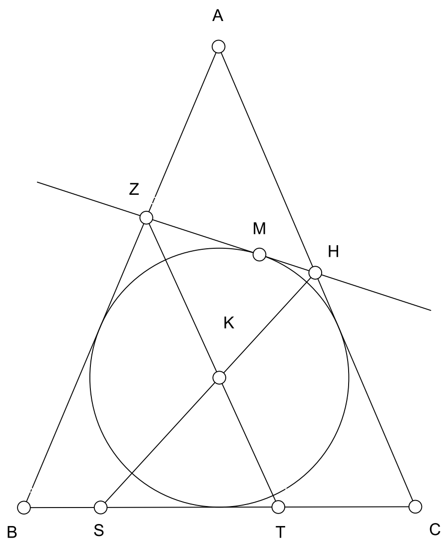
Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Θέτουμε $a = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ και $b = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$. Είναι

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} &= a^2 - ab + b^2 = \frac{a^3 + b^3}{a+b} \\ &= \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{\sqrt[3]{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} + 1} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} &= \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)^3}}{\sqrt[3]{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\left(3 + 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}\right)}}{\sqrt[3]{2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} + 1} \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} + 1} \sqrt[3]{2 - 1} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} + 1}. \end{aligned}$$

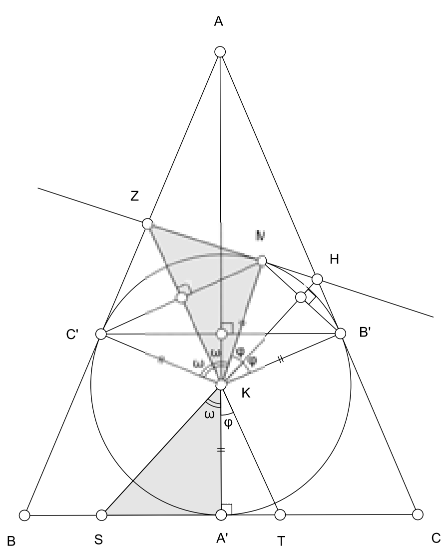
ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο σημείο M του εγγεγραμμένου, στο ισοσκελές τρίγωνο ABC, κύκλου (K, R) φέρω την εφαπτομένη, η οποία τέμνει τις πλευρές AB, AC στα σημεία Z, H αντίστοιχα.*



Οι ευθείες ZK, HK τέμνουν τη βάση BC στα σημεία T, S. Να δειχθεί ότι: $ZH = ST$.

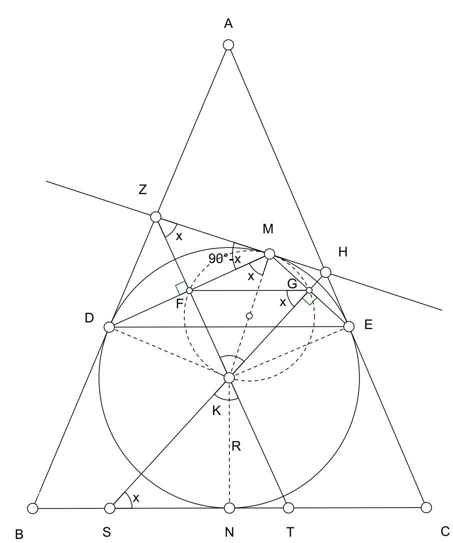
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=83176

Λύση 1 (Στάθης Κούτρας) Επειδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($AB = AC$), η προέκταση της AK (διχοτόμου) θα τέμνει κάθετα την BC έστω στο σημείο A'.



Αν επιπλέον B', C' είναι τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές AC, AB του τριγώνου ABC αντίστοιχα, τότε ισχύει: $AB \overset{\upsilon\pi o\theta\varepsilon\sigma\eta}{=} AC$ και $AC' \overset{\varepsilon\varphi\alpha\pi.\tau\mu\eta\mu\alpha\tau\alpha}{=} AB' \overset{\alpha\nu\tau\iota\sigma.\Theta\alpha\lambda\eta}{\Rightarrow} C'B'//BC \overset{AA''\perp BC}{\Rightarrow} AA'\perp C'B'$: (1). Επίσης έχουμε $ZC' \overset{\varepsilon\varphi\alpha\pi.\tau\mu\eta\mu\alpha\tau\alpha}{=} ZM$ άρα η KZ είναι διχοτόμος της $C'\widehat{K}M$ και ομοίως KH διχοτόμος της $M\widehat{K}B'$. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $KMH, KA'T$, τα οποία έχουν $KM = KA' = \rho$ και $\widehat{\varphi} = M\widehat{K}H \overset{\delta\iota\chi o\tau o\mu o}{=} \frac{M\widehat{K}B'}{2} \overset{\varepsilon\pi\iota\kappa-\varepsilon\gamma\gamma\varepsilon\gamma\rho}{=} B'\widehat{C'}M \overset{o\xi\varepsilon\iota\varepsilon\varsigma\,\mu\varepsilon\,\kappa\alpha\theta.\,\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\varepsilon\varsigma(1)}{=} A'\widehat{K}T$, οπότε είναι ίσα, συνεπώς $MH = A'T$: (2). Ομοίως δείχνουμε ότι τα τρίγωνα $ZKM, SA'K$ είναι ίσα, οπότε προκύπτει ότι $ZM = A'S$: (3). Τέλος, προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (3) κατά μέλη προκύπτει: $ZH = ST$.

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος) Έστω D, N, E τα εφαπτόμενα σημεία του εγγεγραμμένου κύκλου (K, R) με τις πλευρές AB, BC, CA αντίστοιχα. Από το μέσο N της BC και από εφαπτόμενα τμήματα ισχύει: $BD = BN = CN = CE$ και από διαφορά ίσων τμημάτων: $AD = AE$. Εφόσον $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AE}{CE}$ έπεται ότι $DE//BC$ (1).



Έστω $F \equiv KZ \cap DM$ και $G \equiv KH \cap ME$. Τα τετράπλευρα $KDZM$, $KMHE$ είναι χαρταετοί, οπότε τα F, G είναι μέσα των DM, ME αντίστοιχα και ισχύει στο τρίγωνο MDE: $FG//DE \overset{(1)}{//} BC$. Θέτοντας $F\widehat{G}K = x$ θα είναι

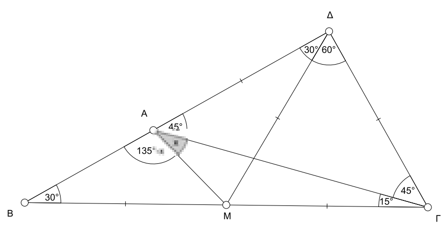
$T\widehat{S}K = x$ (εντός εναλλάξ), $F\widehat{M}K = x$ (από το εγγράψιμο $KFMG$, μια που $Z\widehat{F}M = M\widehat{G}K = 90^\circ$ από τους χαρταετούς) και $F\widehat{Z}M = x$(επειδή στο ορθογώνιο FZM η $Z\widehat{M}F = 90^\circ - x$).

Τα ορθογώνια τρίγωνα KMZ, KNS είναι ίσα (μια οξεία γωνία και μία πλευρά - ακτίνα αντίστοιχα ίσες), άρα $KZ = KS$. Τα τρίγωνα KZH, KST είναι ίσα από $\Gamma - \Pi - \Gamma$, επομένως $ZH = ST$.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Σε ένα τρίγωνο η* $\widehat{\mathrm{B}}$ *είναι* 30 *και η* $\widehat{\Gamma}$ *είναι* 45 *μοίρες. Αν* Μ *είναι το μέσο του* ΒΓ, *να βρεθεί η* $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=84016

Λύση 1 (Μιχάλης Νάννος) Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ΒΑ που τέμνει την προέκτασή της στο Δ. Είναι $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = 45^\circ$ (εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ) και $\Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{A} = 45^\circ$ (μια που στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ η $\widehat{\mathrm{B}} = 30^\circ$και η $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = 15^\circ$).

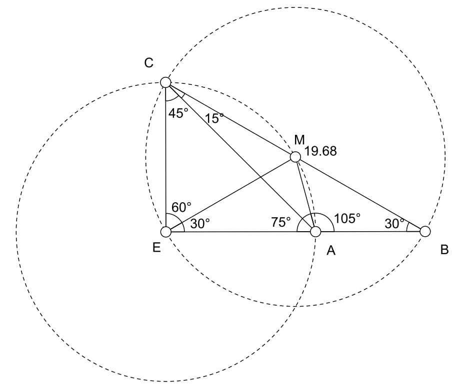


Έτσι το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το τρίγωνο ΔΜΓ είναι ισόπλευρο (λόγω της διαμέσου ΔΜ) και το τρίγωνο ΔΑΜ ισοσκελές. Από τις προσκείμενες στη βάση γωνίες του ισοσκελούς θα ισχύει:

$$45^\circ + x = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} \text{ ή } x = 30^\circ.$$

Λύση 2 (Φωτεινή Καλδή)

Γράφουμε κύκλο με κέντρο M και ακτίνα MB, E το σημείο τομής αυτού με την προέκταση της BA.



Τότε ισχύει $B\widehat{E}C = 90^\circ$, το τρίγωνο MEB είναι ισοσκελές και το τρίγωνο MEC ισόπλευρο.

Επίσης $A\widehat{C}M = \dfrac{1}{2}A\widehat{E}M$ άρα η $A\widehat{C}M$ εγγεγραμμένη στον κύκλο κέντρου E και ακτίνας EA, επομένως $M\widehat{A}C = \dfrac{1}{2}M\widehat{E}C = \dfrac{1}{2}\,60^\circ = 30^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Αν για μία αριθμητική (a_n) και μία γεωμετρική (b_n) πρόοδο (οι οποίες δεν είναι σταθερές) ισχύουν $a_1 = b_1, a_2 = b_2$, να δείξετε ότι $b_n > a_n$ για $n \geq 3$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=17827

Λύση 1 (Δημήτρης Ιωάννου) Πράγματι, οι όροι χρειάζεται να είναι θετικοί. Έστω λοιπόν ω, η διαφορά της αριθμ. προόδου και λ ο λόγος της γεωμ. προόδου. Τότε θα είναι:

$\omega = a_2 - a_1, \quad \lambda = \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1}$

Άρα $\omega = a_1(\lambda - 1)$

Τώρα έχουμε:

$b_n = b_1.\lambda^{n-1}, \quad a_n = a_1 + (n-1)\omega$

Πρέπει να δείξουμε ότι $b_n > a_n$ για κάθε $n \geq 3$

Άρα αρκεί ισοδύναμα να δείξουμε ότι

$$a_1.\lambda^{n-1} > a_1 + (n-1)a_1(\lambda - 1) \Leftrightarrow$$

$\lambda^{n-1} > 1 + (n-1)(\lambda - 1)$ (δεδομένου ότι $a_1 > 0$) Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε:

$$\lambda^{n-1} = [1 + (\lambda - 1)]^{n-1} \geq 1 + (n-1)(\lambda - 1)$$

(εφόσον είναι $\lambda - 1 > -1$, αφού εξ υποθέσεως είναι $\lambda > 0$ διότι η πρόοδος έχει θετικούς όρους). Και επειδή η ισότητα ισχύει για $n - 1 = 1$, δηλαδή για $n = 2$ άρα για κάθε $n \geq 3$ θα έχουμε ότι ισχύει η γνήσια ανισότητα και άρα το ζητούμενο.

Λύση 2 (Γιώργος Απόκης) Για ευκολία θα συμβολίσω με p, q τους δύο πρώτους (ίσους) όρους και με x, y το γενικό όρο κάθε προόδου. Ισχύουν:

$$x = p + (n-1)(q - p)$$

και

$$y = p \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} = \frac{q^{n-1}}{p^{n-2}}$$

Θα δείξουμε ότι: $y > x$ για $n \geq 3$. Είναι:

$$y > x \Leftrightarrow \frac{q^{n-1}}{p^{n-2}} > p + (n-1)(q-p) \Leftrightarrow$$

$$q^{n-1} > p^{n-1} + (n-1)(q-p)p^{n-2} \Leftrightarrow$$

$$(q^{n-1} - p^{n-1}) - (n-1)(q-p)p^{n-2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(q-p)(q^{n-2}+q^{n-3}\cdot p+...+p^{n-2})-(n-1)(q-p)p^{n-2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(q-p)(q^{n-2}+q^{n-3}\cdot p+...+p^{n-2}-p^{n-2}-p^{n-2}-...-p^{n-2}) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(q-p)[(q^{n-2}-p^{n-2})+p(q^{n-3}-p^{n-3})+...+p^{n-3}(q-p)] > 0 \Leftrightarrow$$

$$(q-p)^2[(q^{n-3}+...+p^{n-3})+...+p(q^{n-4}+...+p^{n-4})+...+p^{n-3}) > 0$$

που ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο KARKAR) Να λυθεί η ανίσωση :*

$$(x^4 - x + 1)^x < 1$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=17040

Λύση (Γιώργος Μανεάδης) Είναι :

$$x^4 - x + 1 = x^4 - x^2 + x^2 - x + 1 =$$

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$$

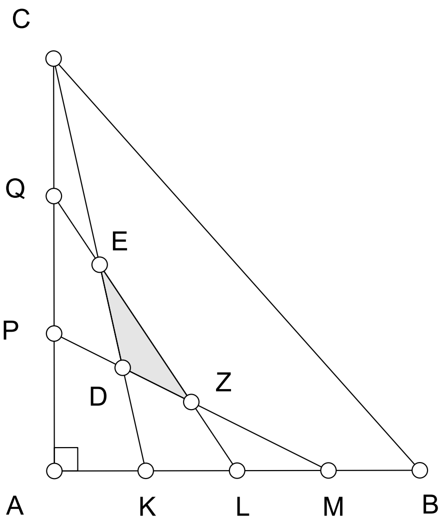
$$= (x^2 - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} > 0$$

Η δοσμένη ανίσωση $(x^4 - x + 1)^x < 1$ γίνεται :

$$x \ln(x^4 - x + 1) < 0, \quad (1)$$

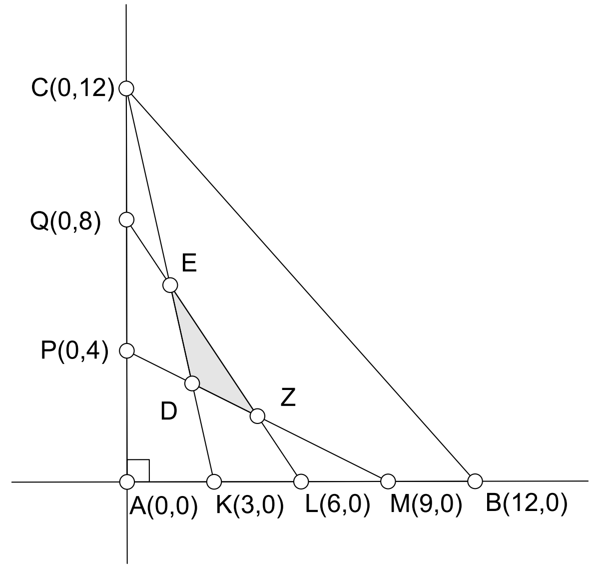
- Αν $x = 0$ η (1) δεν ισχύει
- Αν $x > 0$ η (1) γίνεται: $\ln(x^4 - x + 1) < 0 \Leftrightarrow x^4 - x + 1 < 1 \Leftrightarrow x^4 < x \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$ οπότε $0 < x < 1$.
- Αν $x < 0$ η (1) γίνεται : $x^4 - x + 1 > 1 \Leftrightarrow x^4 > x \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$. οπότε $x < 0$ τελικά λύση της δοσμένης ανίσωσης είναι $x \in (-\propto, 0) \bigcup (0, 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $AB = AC = 1$. Στην πλευρά AB θεωρούμε τα σημεία K, L, M με $AK = KL = LM = MB$ και στην AC τα P, Q με $AP = PQ = QC$. Αν D το σημείο τομής των CK, PM, E το σημείο τομής των CK, QL και Z το σημείο τομής των PM, QL να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου DEZ.*



http://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=95051

Λύση 1 (Γιώργος Ρίζος) Για να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνο αριθμητικού λάθους βαθμολογούμε κατάλληλα τους άξονες, παίρνοντας ως μήκος των ίσων πλευρών του τριγώνου το 12 (Ε.Κ.Π. των 3, 4). Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο $A(0,\ 0)$ τοποθετούμε τα σημεία $K(3,\ 0)$, $L(6,\ 0)$, $M(9,\ 0)$, $B(12,\ 0)$, $P(0,\ 4)$, $Q(0,\ 8)$, $C(0,\ 12)$. Τότε ABC ορθογώνιο και ισοσκελές και $AK = KL = LM = MB$, $AP = PQ = QC$ Η CK έχει εξίσωση $y = -4x + 12$, η $PM:\ \ y = -\dfrac{4}{9}x + 4$ και η $QL:\ \ y = -\dfrac{4}{3}x + 8$ Οπότε, λύνοντας τα συστήματα των εξισώσεων ανά δύο βρίσκουμε: $D\left(\dfrac{9}{4},\ 3\right)$, $E\left(\dfrac{3}{2},\ 6\right)$, $Z\left(\dfrac{9}{2},\ 2\right)$ Οπότε $\overrightarrow{DE} = \left(-\dfrac{3}{4},\ 3\right)$, $\overrightarrow{DZ} = \left(\dfrac{9}{4},\ -1\right)$ και $(DEZ) = \dfrac{1}{2}\left|-6\right| = 3$



Προσαρμόζοντάς το στην αρχική εκφώνηση: $(DEZ) = \dfrac{3}{12^2} = \dfrac{1}{48}$

Λύση 2 (Κώστας Δόρτσιος) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο AMP με διατέμνουσα την KDC:

$$\frac{AK}{KM}\cdot\frac{MD}{DP}\cdot\frac{PC}{CA} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{MD}{DP}\cdot\frac{2}{3} = 1 \Rightarrow MD = 3DP \quad (1).$$

Όμοια το ίδιο θεώρημα στο τρίγωνο AMP με διατέμνουσα την L, Z, Q:

$$\frac{AL}{LM}\cdot\frac{MZ}{ZP}\cdot\frac{PQ}{QA} = 1 \Rightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{MZ}{ZP}\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow MZ = ZP \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε:

$$MD = 3PD \Rightarrow MZ + ZD = 3PD \overset{(2)}{\Rightarrow} ZP + ZD = 3PD$$
$$\Rightarrow ZP - PD + ZD = 2PD \Rightarrow 2ZD = 2PD$$
$$\Rightarrow ZD = PD \quad (3)$$

Δηλαδή το σημείο D είναι μέσο του τμήματος ZP.

Όμοια αν εφαρμόσουμε δύο φορές το θεώρημα του Μενελάου στο τρίγωνο AKC με διατέμνουσες τις PDM και QEL θα προκύψει:

$$DE = KD \quad (4)$$

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι το τετράπλευρο $KZEP$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αν η βάση του παραλληλογράμμου θεωρηθεί η EZ τότε το ύψος του θα είναι το μισό του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου ALQ το οποίο έχει πλευρές:

$$AL = \frac{1}{2},\ \ AQ = \frac{2}{3} \Rightarrow LQ = \frac{5}{6} \Rightarrow \upsilon_a = \frac{4}{10}$$

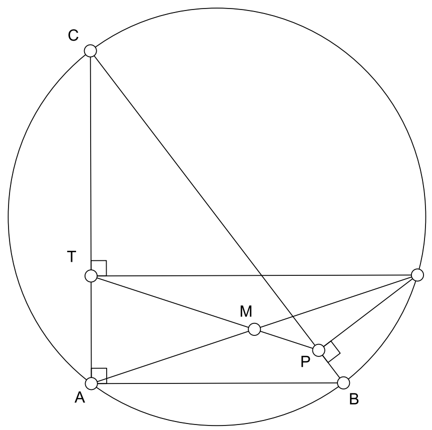
άρα το ύψος του παρ/μου είναι: $\upsilon = \dfrac{\upsilon_a}{2} = \dfrac{2}{10}$

Τελικά για το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$E(DEZ) = \frac{1}{4} \cdot E\left(KZEP\right) = \frac{1}{4} \cdot (EZ)\, \upsilon =$$

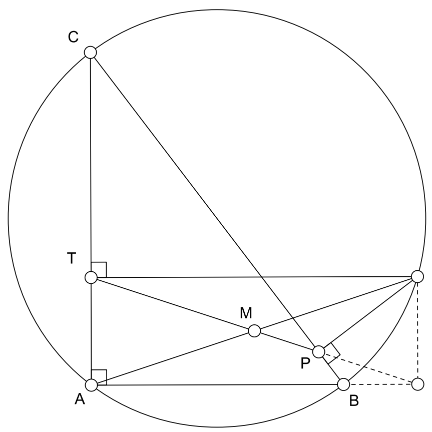
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{LQ}{2} \frac{\upsilon_a}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5/6}{2} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{48} \text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο KARKAR) Από τυχαίο σημείο S του περικύκλου, του ορθογωνίου τριγώνου ABC, φέρω τμήματα ST, SP, κάθετα προς την πλευρά CA και την υποτείνουσα CB αντίστοιχα. Δείξτε ότι το PT διχοτομεί το AS.*



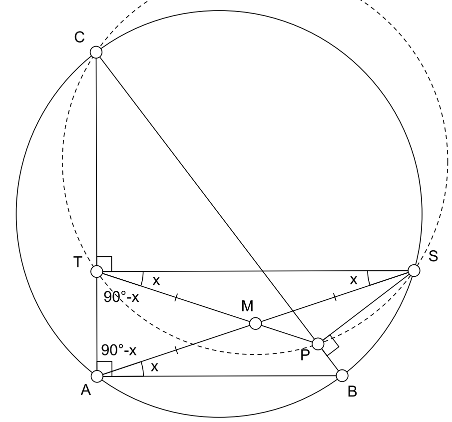
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&t=18701&p

Λύση 1 (Στράτης Αντωνέας) Αν φέρουμε $SK \perp AB$ τότε τα σημεία T, P, K είναι συνευθειακά (ευθεία Simson).



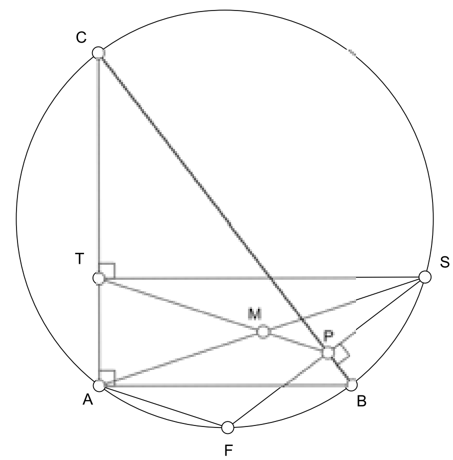
Το $ATSK$ είναι ορθογώνιο και οι διαγώνιές του AS, TK διχοτομούνται στο σημείο M.

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος) Από το εγγεγραμμένο $CABS$: $B\widehat{A}S = B\widehat{C}S = x$ (1), απ' το εγγράψιμο $CTPS$ $\left(C\widehat{T}S = C\widehat{P}S = 90^\circ\right)$: $(B\widehat{C}S) = P\widehat{C}S = P\widehat{T}S \overset{(1)}{=} x$ και από εντός εναλλάξ των παραλλήλων TS, AB: $T\widehat{S}A = B\widehat{A}S \overset{(1)}{=} x$.



Τα τρίγωνα MTS, MTA είναι ισοσκελή (γωνίες της βάσης ίσες) με MT κοινή, επομένως M μέσο του AS.

Λύση 3 (Σωτήρης Λουρίδας)



Επίσης έχουμε:

$$\equiv SP \cap (ABC)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} AM = MS \\ SP = PF \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} PM \parallel FA \Rightarrow \angle PMS = \angle FAM = \\ 2\angle BAM = 2\angle MST = \angle AMT. \end{array} \right.$$

Επομένως τα σημεία T, M, P είναι σημεία της ίδιας ευθείας.

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο ΚΕΦΑΛΟΝΙΤΗΣ) Δίνονται τα διανύσματα* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *έτσι ώστε* $|\vec{a}| = 1, \left|\vec{b}\right| = 2, |\vec{c}| = 3$*.Να αποδείξτε ότι* $2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} \neq \vec{0}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=93638

Λύση 1 (Βασίλης Μαυροφρύδης)

$$2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$3\vec{b} = -\vec{c} - 2\vec{a} \Rightarrow$$

$$\left|3\vec{b}\right| = |-\vec{c} - 2\vec{a}| \leq |\vec{c}| + |2\vec{a}| \Leftrightarrow$$

$$6 \leq 2 + 3$$

άτοπο, οπότε ισχύει το ζητούμενο.

Λύση 2 (parmenides51) Είναι:

$$2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$3\vec{b} + \vec{c} = -2\vec{a} \Rightarrow$$

$$(3\vec{b} + \vec{c})^2 = (-2\vec{a})^2 \Leftrightarrow$$

$$9\vec{b}^2 + 6\vec{b}\vec{c} + \vec{c}^2 = 4\vec{a}^2 \Leftrightarrow$$

$$9|\vec{b}|^2 + 6|\vec{b}||\vec{c}|\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) + |\vec{c}|^2 = 4|\vec{a}|^2 \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot 3\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) + 3^2 = 4 \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$

$$36 + 36\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) + 9 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = -\frac{41}{36}$$

άτοπο διότι

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) \leq 1$$

Άρα

$$2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} \neq \vec{0}$$

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω η έλλειψη* $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ *και η εστία της* $E(\gamma, 0)$*. Αν* $\mathrm{K}\Lambda$ *είναι τυχαία χορδή της έλλειψης* C*, με* $(\mathrm{EK}) + (\mathrm{E}\Lambda) = \mathrm{a}$*, τότε να δείξετε ότι το μέσο της* $\mathrm{K}\Lambda$ *ανήκει σε μία σταθερή ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=70751

Λύση (Γιώργος Τζίρογλου) Έστω $K\left(x_k, y_k\right), \Lambda\left(x_l, y_l\right)$. Είναι γνωστό ότι:

$$EK = a - \varepsilon x_k$$

και

$$E\Lambda = a - \varepsilon x_l$$

Άρα

$$EK + E\Lambda = a \Rightarrow$$

$$\varepsilon\left(x_k + x_l\right) = a \Rightarrow$$

$$x_k + x_l = \frac{a^2}{\gamma} \Rightarrow$$

$$x_m = \frac{a^2}{2\gamma}$$

Άρα το M κινείται στην ευθεία $x = \frac{a^2}{2\gamma}$.

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης) Δίνονται οι συναρτήσεις* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = (a^2 + b^2)x^2 - 2ax$ *και* $g(x) = 4bx + 5$.

$i)$ *Αν ισχύει* $\lim\limits_{x\to1} f(x) + \lim\limits_{x\to1} g(x) = 0$ *να δείξετε ότι* $a = 1$ *και* $b = -2$.

$ii)$ *Για τις παραπάνω τιμές των* a, b *να βρεθεί το όριο* $\lim\limits_{x\to\frac{3}{5}} \dfrac{f(x) - \frac{3}{5}}{g(x) + 13x - 8}$.

$iii)$ *Για τις παραπάνω τιμές των* a, b *να βρεθεί ο θετικός αριθμός* λ *για τον οποίο ισχύει η σχέση* $f'(-\frac{3}{5})ln^2\lambda = g'(2012)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=90309

Λύση (Γιώργος Ροδόπουλος)

$i.$ Είναι $0 = \lim\limits_{x\to1} f(x) + \lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1}[(a^2+b^2)x^2 - 2ax] + \lim\limits_{x\to1}[4bx + 5] = a^2 + b^2 - 2a + 4b + 5$. Οπότε:$a^2 + b^2 - 2a + 4b + 5 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ και $b = -2$.

$ii.$ Είναι: $\lim\limits_{x\to\frac{3}{5}} \dfrac{f(x) - \frac{3}{5}}{g(x) + 13x - 8} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{5}} \dfrac{5x^2 - 2x + \frac{3}{5}}{5x - 3} = \lim\limits_{x\to\frac{3}{5}} \dfrac{(5x-3)\left(x + \frac{1}{5}\right)}{5x-3} = \lim\limits_{x\to1} \left(x + \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$.

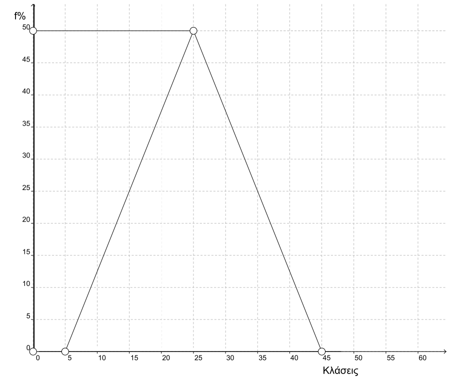
$iii.$ Είναι $f'(x) = 10x - 20$ και $g'(x) = -8$ άρα $f'(-\frac{3}{5}) = -8$ και $g'(2012) = -8$ Άρα $f'(-\frac{3}{5})ln^2\lambda = g'(2012) \Leftrightarrow ln^2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = e \vee \lambda = \frac{1}{e}$

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Ένα δείγμα ομαδοποιήθηκε σε* k *κλάσεις, ίσου πλάτους* c. *Παρακάτω δίνεται το πολύγωνο* f_i *το οποίο έχει σχήμα τριγώνου.*

α. Να εκφράσετε το c *ως συνάρτηση του* k.

β. Να βρείτε τα c, k.

γ. Αν $f_1 = 25$, *να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα* f_i



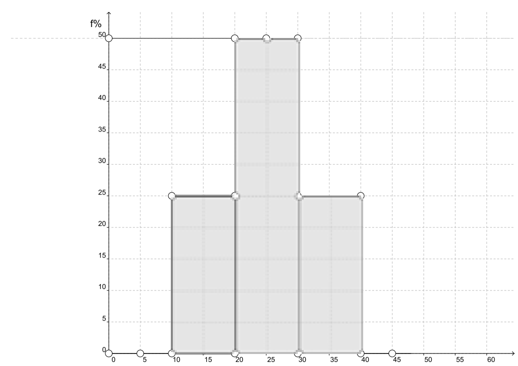
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=90978

Λύση (Γιώργος Απόκης)

α. Οι αριθμοί $5, 45$ είναι οι κεντρικές τιμές των ¨βοηθητικών¨ κλάσεων. Ανάμεσά τους υπάρχουν οι κεντρικές τιμές $x_1, x_2, ..., x_k$. Επομένως , ισχύει $\frac{c}{2} + ck + \frac{c}{2} = 45 - 5 \Leftrightarrow c = \frac{40}{k+1}$.

β. Στον υπολογισμό εμβαδών θεωρούμε ως μονάδα, στον οριζόντιο άξονα, το c. Άρα, η βάση του τριγώνου έχει μήκος $b = \frac{1}{2} + k + \frac{1}{2} = k + 1$. Το εμβαδό που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 100, και αφού έχει σχήμα τριγώνου θα ισχύει:$E = 100 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 50b = 100 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 50(k+1) = 100 \Leftrightarrow k = 3$ και άρα $c = 10$.

γ. Αφού $k = 3$, από το πολύγωνο έχουμε $f_2 = 50$ άρα $f_3 = 100 - (25 + 50) = 25$ και έτσι εύκολα προκύπτει το ιστόγραμμα συχνοτήτων.



ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Δημήτριος Κατσίποδας) Δίνεται η εξίσωση* $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ *με* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, z \in C$ *και* z_1, z_2 *είναι οι ρίζες της με* $z_1 = 2 + i$

$i.$ *Να βρείτε τους* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$ii.$ *Να αποδείξετε ότι* $z_1^{2008} + z_2^{2008} \in \mathbb{R}$. *Αν* $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ *οι εικόνες των* z_1, z_2 *και* z_3 *αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με*

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5}(17 + i)$$

τότε:

$iii.$ *Να αποδείξετε ότι το* ΑΒΓ *είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.*

$iv.$ *Αν* $|w - z_1| = |\bar{w} - z_1|$ *να αποδείξετε ότι* $w \in \mathbb{R}$.

$v.$ *Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών* w *που επαληθεύουν την* $|w - z_2| + |\bar{w} - z_2| = 10$, *βρίσκονται σε έλλειψη.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=27051

Λύση (Πρωτοπαπάς Λευτέρης)

$i.$ Είναι $z_2 = 2 - i$ και από Vieta$z_1 + z_2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $z_1 \cdot z_2 = \beta \Leftrightarrow \beta = 5$.

$ii.$ $z_1^{2008} + z_2^{2008} = z_1^{2008} + \overline{z_1}^{2008} = 2Re(z_1) \in \mathbb{R}$.

$iii.$ $z_3 = 4 + i$, άρα $A(2,1), B(2,-1), \Gamma(4,1)$. Τότε: $AB = A\Gamma = 2$ και $AB \perp A\Gamma$, οπότε το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

$iv.$ $|w - z_1|^2 = |\bar{w} - z_1|^2 \Leftrightarrow (\overline{z_1} - z_1)(\bar{w} - w) = 0 \Leftrightarrow \bar{w} = w \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$.

$v.$ Η δοσμένη σχέση γράφεται: $|w - z_2| + |\bar{w} - \overline{z_1}| = 10 \Leftrightarrow |w - z_2| + |w - z_1| = 10$, Ισχύει $|z_1 - z_2| = |2 + i - (2 - i)| = |2i| = 2 \leq 10$ άρα είναι έλλειψη.

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης) Για το μιγαδικό αριθμό* $z = x + yi$ *με* $x, y \in \mathbb{R}$ *ισχύει η σχέση:* $(1 - \lambda i)z = 4 - 2i$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι: $(x + \lambda y) + (-\lambda x + y)i = 4 - 2i$

β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του Μ(x, y) *του* z *ανήκει σε κύκλο.*

γ) Μπορεί το σημείο Μ(x, y) *να πάρει την θέση* $O(0, 0)$;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=86918

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&(1 - \lambda i)z = 4 - 2i \Leftrightarrow \\
&(1 - \lambda i)(x + yi) = 4 - 2i \Leftrightarrow \\
&(x + \lambda y) + (-\lambda x + y)i = 4 - 2i \Leftrightarrow \\
&x + \lambda y = 4, -\lambda x + y = -2,\ \lambda \in \mathbb{R} \ \ (I)
\end{aligned}$$

α) Συνεπώς από τις (I) έχουμε: $(x + \lambda y) + (-\lambda x + y)i = 4 - 2i$

β) Λύνουμε το σύστημα των (I) ως προς x, y και έχουμε: $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{2\lambda + 4}{\lambda^2 + 1}, \frac{4\lambda - 24}{\lambda^2 + 1}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ισχύει:

$$\begin{aligned}
&(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \\
&= \left(\frac{2\lambda + 4}{\lambda^2 + 1} - 2\right)^2 + \left(\frac{4\lambda - 2}{\lambda^2 + 1} + 1\right)^2 = \\
&= \left(\frac{-2\lambda^2 + 2\lambda + 2}{\lambda^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda^2 + 4\lambda - 1}{\lambda^2 + 1}\right)^2 = \ldots \\
&\ldots. = 5
\end{aligned}$$

άρα η εικόνα του Μ(x, y) του z ανήκει στον κύκλο κέντρου Κ(2, -1) με ακτίνα $\sqrt{5}$.

γ) Έστω ότι $(x, y) = (0, 0)$. Τότε από την σχέση $(1 - \lambda i)z = 4 - 2i$ προκύπτει ότι $0 = 4 - 2i$, άτοπο. Συνεπώς το σημείο Μ(x, y) δεν μπορεί να πάρει την θέση $O(0, 0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Γιωργος Τσικαλουδακης) Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αντιστρέψιμη τέτοια ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:*

$$e^{1-f^{-1}(x)}-f^{-1}(x)=x+1$$

1. *Να βρεθεί η f.*
2. *Να αποδείξετε ότι:*
   α. η f είναι γνήσίως φθίνουσα.
   β. οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
3. *Να υπολογιστούν τα όρια:*
   i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^{-1}(x)+x\right)$
   ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=57607

Λύση (Γιώργος Ροδόπουλος) Ισχύει

$$e^{1-f^{-1}(x)}-f^{-1}(x)=x+1\,(1)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι οι f,f^{-1} έχουν πεδίο ορισμού (άρα και σύνολο τιμών) το $\mathbb{R}$.

1. Θέτουμε στην (1) όπου x το $f(x)$, με x στο $\mathbb{R}$ οπότε παίρνουμε: $e^{1-f^{-1}(f(x))}-f^{-1}(f(x))=f(x)+1\Rightarrow f(x)=e^{1-x}-x-1,\,x\in\mathbb{R}$

2. α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}\mu\varepsilon\, x_1<x_2$ $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow -x_1-1>-x_2-1(*)$, επίσης , $x_1<x_2\Rightarrow -x_1>-x_2\Rightarrow 1-x_1>1-x_2\Rightarrow e^{1-x_1}>e^{1-x_2}\,(**)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $(*),(**)$ παίρνουμε: $e^{1-x_1}-x_1-1>e^{1-x_2}-x_2-1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) *Ύπαρξη κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των f,f^{-1}*: Έστω η εξίσωση $f(x)=x\;(2)\;\Leftrightarrow f(x)-x=0\Leftrightarrow e^{1-x}-2x-1=0\,(3)$, $x\in\mathbb{R}$ Η συνάρτηση $g(x)=e^{1-x}-2x-1$ είναι συνεχής (το αιτιολογούμε εύκολα) στο $[0,1]$ και $g(0)g(1)=(e-1)(-2)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η (3) άρα και η (2) έχει ρίζα $\xi\in(0,1)$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα (ως άθροισμα των γνησίως φθινουσών συναρτήσεων f και $-x$, ή απόδειξη κατασκευαστικά) άρα και $1-1$ Έτσι η (2) έχει μοναδική ρίζα $\xi\in(0,1)$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y=x$ το $M(\xi,\xi)$, $\xi\in(0,1)$. Από το M όμως διέρχεται και η γραφική παράσταση της f^{-1}. Συμπεραίνουμε ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν κοινό σημείο το M (μοναδικό επί της $y=x$)

Μοναδικότητα του κοινού σημείου: Έστω ότι οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν και άλλο κοινό σημείο το $A(x_1,y_1)$, $x_1\neq y_1$ (αφού δεν μπορεί να βρίσκεται στην $y=x$). Έχουμε: $f(x_1)=y_1$ και $f^{-1}(x_1)=y_1\Rightarrow f(y_1)=x_1$, οπότε: $f(x_1)-f(y_1)=y_1-x_1\Rightarrow e^{1-x_1}-x_1-1-(e^{1-y_1}-y_1-1)=y_1-x_1\Rightarrow e^{1-x_1}-e^{1-y_1}=0\Rightarrow e^{1-x_1}=e^{1-y_1}\Rightarrow x_1=y_1$ που είναι άτοπο και έτσι το ζητούμενο αποδείχθηκε.

3. $i)$ $(1)\Rightarrow f^{-1}(x)=e^{1-f^{-1}(x)}-x-1\Rightarrow f^{-1}(x)>-x-1$

και επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x-1)=+\infty$

προκύπτει

$$\lim_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=+\infty$$

Επίσης

$$(1)\Rightarrow f^{-1}(x)+x=e^{1-f^{-1}(x)}-1$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f^{-1}(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-f^{-1}(x)}-1\right)$$

$$\overset{u=f^{-1}(x)}{=}\lim_{u\to+\infty}e^{1-u}-1=0-1=-1$$

$$ii)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}=$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)+x-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)+x}{x}-1=$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(f^{-1}(x)+x\right)\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-1=(-1)\cdot 0-1=-1.$$

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Στράτος Παπαδόπουλος) Έστω οι συναρτησεις $f,\ g$ με κοινο πεδιο ορισμού A, τέτοιες ώστε $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε x στο A.*

Α) Αν ισχυει $\dfrac{f^4(x)}{\alpha}+\dfrac{g^4(x)}{\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ με α,β πραγματικοι διαφοροι του 0, $\alpha+\beta\neq 0$ να δειξετε ότι

$$\frac{f^8(x)}{\alpha^3}+\frac{g^8(x)}{\beta^3}=\frac{1}{(\alpha+\beta)^3}.$$

Β) Να δειξετε ότι $|\alpha f(x)+\beta g(x)|\leq\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=18988

Λύση 1 (Χρήστος Κυριαζής) (α′ Ερώτημα) Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, έχω:

$$\beta\left(\alpha+\beta\right)f^{4}\left(x\right)+\alpha\left(\alpha+\beta\right)g^{4}\left(x\right)=\alpha\beta f^{2}\left(x\right)+\alpha\beta g^{2}\left(x\right)$$

ή ακόμα καλύτερα:

$$\alpha\beta f^{4}\left(x\right)+\beta^{2}f^{4}\left(x\right)+\alpha\beta g^{4}\left(x\right)+\alpha^{2}g^{4}\left(x\right)=$$

$$\alpha\beta f^{2}\left(x\right)+\alpha\beta g^{2}\left(x\right)$$

Συνεχίζοντας, έχω:

$$\beta^{2}f^{4}\left(x\right)+\alpha^{2}g^{4}\left(x\right)=$$

$$\alpha\beta f^{2}\left(x\right)\left(1-f^{2}\left(x\right)\right)+\alpha\beta g^{2}\left(x\right)\left(1-g^{2}\left(x\right)\right)$$

Απ'οπου, λόγω των δεδομένων προκύπτει:

$$\beta^{2}f^{4}\left(x\right)+\alpha^{2}g^{4}\left(x\right)=2\alpha\beta f^{2}\left(x\right)g^{2}\left(x\right)$$

από όπου έχουμε ότι

$$\left(\beta f^{2}\left(x\right)-ag^{2}\left(x\right)\right)^{2}=0\Leftrightarrow f^{2}\left(x\right)=\frac{\alpha}{\beta}g^{2}\left(x\right)$$

Αξιοποιώντας τώρα και την :

$$f^{2}\left(x\right)+g^{2}\left(x\right)=1$$

μπορούμε να έχουμε:

$$f^{2}\left(x\right)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ g^{2}\left(x\right)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

Αν θεωρήσουμε το πρώτο μέλος της προς απόδειξη σχέσης έχουμε:

$$\frac{f^{8}(x)}{\alpha^{3}}+\frac{g^{8}(x)}{\beta^{3}}=\frac{\left(f^{2}(x)\right)^{4}}{\alpha^{3}}+\frac{\left(g^{2}(x)\right)^{4}}{\beta^{3}}=\dots=\frac{\alpha+\beta}{\left(\alpha+\beta\right)^{4}}=\frac{1}{\left(\alpha+\beta\right)^{3}}$$

Λύση 2 (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) (β′ Ερώτημα) Από Lagrange:

$$\alpha^{2}+\beta^{2}=(f^{2}(x)+g^{2}(x))(\alpha^{2}+\beta^{2})=$$

$$(\alpha f(x)+\beta g(x))^{2}+(\alpha g(x)-\beta f(x))^{2}\geq(\alpha f(x)+\beta g(x))^{2}$$

οπότε

$$\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}}\geq|\alpha f(x)+\beta g(x)|$$

Λύση 3 (Χρήστος Κυριαζής) (β′ Ερώτημα) Με Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)|\leq\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}}\sqrt{f^{2}(x)+g^{2}(x)}$$

$$=\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}}$$

αφού: $f^{2}(x)+g^{2}(x)=1$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Κατεύθυνση Διαφορικός Λογισμός)

Επιμελητής: Ροδόλφος Μπόρης

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Αν οι συναρτήσεις: $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν*

1) $f(1) = g(0) + 1$

2) $f(x) \geq g(x), \quad \forall x \in [0,1]$

3) $f'(sin^2 x) + g'(cos^2 x) = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

τότε να δειχθεί ότι: $f = g$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=89293

Λύση (Βασίλης Μαυροφρύδης)

$$f'(sin^2 x) + g'(cos^2 x) = 2 \Rightarrow$$

$$\sin 2x f'(sin^2 x) + \sin 2x g'(cos^2 x) = 2\sin 2x \Rightarrow$$

$$\left[f\left(\sin^2 x\right) - g\left(\cos^2 x\right)\right]' = (-\cos 2x)' \Rightarrow$$

$$f\left(\sin^2 x\right) - g\left(\cos^2 x\right) = c - \cos 2x$$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ λαμβάνουμε $1 = c + 1 \Leftrightarrow c = 0$. Άρα

$$f\left(\sin^2 x\right) - g\left(1 - sin^2 x\right) = -\cos 2x = 2\sin^2 x - 1, x \in \mathbb{R}$$

Αλλάζουμε μεταβλητή $\sin^2 x = u \in [0,1]$ οπότε $f(u) - g(1-u) = 2u - 1 \quad (1)$ και για $u = 1 - u$ λαμβάνουμε $f(1-u) - g(u) = 1 - 2u \quad (2)$.

Έστω ότι υπάρχει α ώστε $f(\alpha) > g(\alpha)$. Για $x = \alpha$ στις $(1), (2)$ λαμβάνουμε

$$f(\alpha) - g(1-\alpha) = 2\alpha - 1$$

$$f(1-\alpha) - g(\alpha) = 1 - 2\alpha$$

Τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε

$$f(\alpha) - g(\alpha) + f(1-\alpha) - g(1-\alpha) = 0$$

άτοπο αφού το πρώτο μέλος είναι θετικό. Συνεπώς για κάθε $u \in [0,1]$ ισχύει $f(u) = g(u)$ και επίσης

$$f(u) - f(1-u) = 2u - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(u) - u - [f(1-u) - 1 + u] = 0$$

Η $h(u) = f(u) - u, u \in [0,1]$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα θα έχει μεγιστη M και ελάχιστη τιμή m. Συνεπώς $m \leq h(u) \leq M, \forall u \in [0,1]$. Για $u = 1 - u$ λαμβάνουμε

$$m \leq h(1-u) \leq M \Rightarrow -M \leq -h(1-u) \leq -m$$

και προσθέτοντας με την προηγούμενη έχουμε

$$m - M \leq h(u) - h(1-u) \leq M - m \Rightarrow$$

$$m - M \leq 0 \leq M - m \Rightarrow m = M$$

άρα η h είναι σταθερή οπότε

$$h(u) = c \Rightarrow f(u) - u = c \Rightarrow f(u) = u + c$$

Για $u = 0$ παίρνουμε $f(0) = c$. Άρα $f(u) = u + f(0)$, η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της άσκησης.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ που είναι τέτοια ώστε $f'(x) = -3\ln f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 1$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=94525

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Λόγω της ανισότητας $\ln t \leq t - 1$ έχουμε $f'(x) \geq -3(f(x) - 1)$ για όλα τα x, (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{3x}(f(x) - 1)$, με $x \in \mathbb{R}$. Βρίσκουμε $g'(x) = e^{3x}(f'(x) + 3f(x) - 3)$. Τότε, λόγω της (1), είναι $g'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $g(x) \geq g(1) = 0$, άρα $f(x) \geq 1$, οπότε λόγω της αρχικής δ.ε. $f'(x) \leq 0$. Δηλαδή η f είναι φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Άρα ισχύει $f(x) \leq f(1) = 1$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Άρα, ισχύει $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Ομοίως εργαζόμαστε και στο $(-\infty, 1)$ και βρίσκουμε $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$. Είναι και $f(1) = 1$, οπότε η μοναδική συνάρτηση, που (φανερά) ικανοποιεί το αρχικό πρόβλημα, είναι η σταθερή $f(x) = 1$.

Ας παρατηρηθεί, ότι με την ίδια διαδικασία αντιμετωπίζεται η γενικότερη περίπτωση $f'(x) = a\ln f(x)$ με $f(1) = 1$ και $a < 0$.

Λύση 2 (Θάνος Μάγκος) Ακόμη μία ιδέα με χρήση ολοκληρώματος.

Λήμμα: Ισχύει $t\ln t - t + 1 \geq 0$ για κάθε $t > 0$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $t = 1$ και η απόδειξη είναι τετριμμένη. Ερχόμαστε τώρα, στο αρχικό πρόβλημα.

Η δοθείσα γράφεται ως $(f'(x))^2 = -3f'(x)\ln f(x)$. Άρα ισχύει

$$\begin{aligned} 0 \le \int_1^x (f'(t))^2 dt &= \int_1^x -3f'(t)\ln f(t)dt \\ &= -3\Big[f(t)\ln f(t)\Big]_1^x \\ &+ 3\int_1^x f(t)\frac{f'(t)}{f(t)}dt \\ &= -3f(x)\ln f(x) + 3f(x) - 3 \\ &= -3(f(x)\ln f(x) - f(x) + 1 \le 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x \ge 1$. (η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω του Λήμματος). Άρα, πάλι λόγω του Λήμματος, είναι $f(x) = 1$ για κάθε $x \ge 1$. Πως μπορούμε να καλύψουμε και την περίπτωση $x < 1$;

Λύση 3 (Βασίλης Μαυροφρύδης)

$$(\ln f(x))' + \frac{3}{f(x)}\ln f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln f(x))' e^{\int_1^x \frac{3}{f(t)}dt} + \left(e^{\int_1^x \frac{3}{f(t)}dt}\right)' \ln f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln f(x))' + \frac{3}{f(x)}\ln f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln f(x))' e^{\int_1^x \frac{3}{f(t)}dt} + \left(e^{\int_1^x \frac{3}{f(t)}dt}\right)' \ln f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\ln f(x) \cdot e^{\int_1^x \frac{3}{f(t)}dt}\right)' = 0 \Leftrightarrow \ln f(x) \cdot e^{\int_1^x \frac{3}{f(t)}dt} = c$$

Για $x = 1$ προκύπτει $c = 0$. Με αντικατάσταση λαμβάνουμε

$$\ln f(x) \cdot e^{\int_1^x \frac{3}{f(t)}dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

Λύση 4 (Ροδόλφος Μπόρης) Είναι $ln(y(1)) = 0$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη τιμή του x. Ας πούμε $x_0 : lny(x_0)) = 1$ την πρώτη που θα συναντήσουμε μετά το 1 αφού δεχτούμε πως η y είναι μη μηδενική σε διάστημα. Τότε $ln(y(x)) \neq 0 \forall x \in (1, x_0)$ $[1]$. Αλλά από το Θ. Rolle συμπεραίνουμε ότι $\exists \xi \in (1, x_0) : y'(\xi) = 0$ ή $-3ln(y(\xi)) = 0$ άτοπο από την $[1]$. Συνεπώς για $x > 1$ έχουμε $\dfrac{y'}{lny} = -3$ δηλαδή $\displaystyle\int_1^x \frac{dy}{lny} = -3(x-1)$ $[2]$. Ομοίως η σχέση $[2]$ ισχύει και για $x \le 1$. Από ΘΜΤ ολοκληρωτικού λογισμού είναι $(x-1)1/lnu = -3(x-1)$ για $1 < u < x$ και αντίστοιχα για $x < u < 1$. Αν θεωρήσουμε $x \to 1$ τότε $u \to 1$ συνεπώς $1/0+ = -3$ άτοπο και έτσι $lnf(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1, x > 0$.

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Κατεύθυνση Ολοκληρωτικός Λογισμός)

Επιμελητής: Αναστάσιος Κοτρώνης

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Έστω η συνεχής συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *η οποία είναι γνησίως αύξουσα*

Να δείξετε ότι

$$\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx < \int_a^b xf(x)dx$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=19032

Λύση (Φωτεινή Καλδή) Έστω

$$g(x) = \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt, x \in [a, b]$$

αρκεί να δείξουμε ότι $g(b) < 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) με $g(a) = 0$ και για $x \in (a, b)$ είναι

$$g'(x) = \frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt - \frac{x-a}{2}f(x) =$$

$$\frac{x-a}{2}\Big(\frac{\int_a^x f(t)dt - \int_a^a f(t)dt}{x-a} - f(x)\Big) \overset{*}{\Rightarrow}$$

$$g'(x) = \frac{x-a}{2}(f(\xi) - f(x)) < 0$$

με $\xi \in (a, x)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$ κι έτσι $g(b) < g(a) \Rightarrow g(b) < 0$.

(*) Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $\int_a^y f(t)\,dt$ στο διάστημα $[a, x]$.

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Οι συναρτήσεις* f, g *είναι συνεχείς στο* $\mathbb{R}$ *και επιπλέον*

1) $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{Z}$,

2) $f(x) = \int_0^x f(t)e^{g(t)}dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=18241

Λύση (Γιώργος Ροδόπουλος) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = f(x)e^{g(x)}$$

Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Η f είναι συνεχής στο $[k, k+1]$ και άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Έχουμε

$$f(k) = f(k+1) = 0$$

Αν δεχθούμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $r \in (k, k+1)$ τότε από το Θεώρημα του Fermat

$$f'(r) = 0 \Rightarrow f(r)e^{g(r)} = 0 \Rightarrow f(r) = 0$$

δηλαδή το ακρότατο θα είναι ίσο με μηδέν. Συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [k, k+1]$ και αυτό για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Christiano) Αν για μια $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $2f^3(x)+2f(x)=sinf(x)+x^2$ να δείξετε ότι $|f(x)|\le|x|$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=94879

Λύση (Θάνος Μάγκος) Έχουμε

$$2f(x)(1+f^2(x))=\sin f(x)+x^2$$

άρα $2|f(x)|(1+f^2(x))=|\sin f(x)+x^2|$, οπότε είναι $2|f(x)|(1+f^2(x))\le|\sin f(x)|+x^2\le|f(x)|+x^2$. Θέτουμε για ευκολία $|f(x)|=a\ge0$. Είναι $2a(1+a^2)\le a+x^2$ άρα $a+2a^3\le x^2$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $a^2\le a+2a^3$. Είναι

$2a^3+a-a^2=a(2a^2-a+1)\ge0.$

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Χρήστος Κανάβης) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)\neq0$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(1,0)$ και $B(2,-1)$.*

A Να δείξετε ότι η f' έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

B Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ Έστω ο μιγαδικός u. Αν ισχύει

$$f'\left(2+f'\left(|i\cdot u+1|\right)\right)<0$$

να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών u.

Δ Έστω οι μιγαδικοί z,z_1,z_2,w για τους οποίους ισχύει $|z-z_1|=f(1)$, $|w-z_2|=f(2)$ και $|z_1-z_2|=2f\left(\frac{3}{2}\right)$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=77273

Λύση (Βασίλης Κακαβάς) Α) Επειδή $f''(x)\neq0$ και f''συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ άρα $f''(x)>0$ ή $f''(x)<0$

Τώρα επειδή στο $[1,\ 2]$ σύμφωνα με το ΘΜΤ υπάρχει $x_0\in(0,\ 1)$ώστε $f''(x_0)=\dfrac{f'(2)-f'(1)}{2-1}=-1<0$ θα είναι $f''(x)<0$ και άρα f' γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και ¨1-1¨ και αφού $f'(1)=0$ το 1 μοναδική ρίζα της f'στο $\mathbb{R}$.

Β) Επειδή f' γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεχής θα ισχύει για $x<1$ ότι $f'(x)>f'(1)=0$ άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(-\infty,\ 1]$ και για $x>1$ ότι $f'(x)<f'(1)=0$ άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[1,\ +\infty)$ επομένως έχει μέγιστο στο $x_0=1$ το $f(1)$.

Γ) Από $f'(2+f'(|iu+1|))<0\Leftrightarrow f'(2+f'(|iu+1|))<f'(1)$ και επειδή f' γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε

$2+f'(|iu+1|))>1\Leftrightarrow f'(|iu+1|))>-1\Leftrightarrow f'(|iu+1|))>f'(2)$ οπότε θα ισχύει $|iu+1|<2$ απ' όπου ισοδύναμα $|i(u-i)|<2\Leftrightarrow|u-i|<2$ που σημαίνει ότι οι εικόνες του u είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου κέντρου $K(0,\ 1)$ και ακτίνας 2.

Δ) Οι μιγαδικοί z ανήκουν σε κύκλο κέντρου $A(z_1)$ και ακτίνας $\rho_1=f(1)$ και οι w ανήκουν σε κύκλο κέντρου $B(z_2)$ και ακτίνας $\rho_2=f(2)$.

Τώρα λόγω της κυρτότητας αφού f είναι κοίλη από ΘΜΤ στα διαστήματα $\left[1,\ \dfrac{3}{2}\right]$, $\left[\dfrac{3}{2},\ 2\right]$ προκύπτει ότι $f(1)+f(2)<2f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ δηλαδή $\rho_1+\rho_2<AB$ που σημαίνει ότι οι δύο κύκλοι δεν τέμνονται, οπότε $\max|z-w|=AB+\rho_1+\rho_2=2f\left(\dfrac{3}{2}\right)+f(0)+f(1)$ και

$\min|z-w|=AB-\rho_1-\rho_2=2f(\frac{3}{2})-f(0)-f(1).$

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να αποδείξετε ότι*

$$\left(\frac{x}{\ln(x+1)}\right)^{e^x-x-1} > \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{x-\ln(x+1)}$$

για κάθε $x \in (0,+\infty)$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=83034

Λύση (Βασίλης Κακαβάς) Αν $f(t) = \ln t$ επειδή ως γνωστόν $\ln(x+1) \leq x,\ x \geq 0$, για $x > 0$ στο διάστημα $[\ln(x+1),\ x]$ από θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $\xi \in [\ln(x+1),\ x]$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\ln(x+1))}{x - \ln(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\xi} = \frac{f(x) - f(\ln(x+1))}{x - \ln(x+1)}$$

και αφού

$$0 < \ln(x+1) < \xi < x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\ln(x+1)}$$

οπότε θα ισχύει

$$\frac{1}{x} < \frac{f(x) - f(\ln(x+1))}{x - \ln(x+1)} < \frac{1}{\ln(x+1)} \ (1)$$

Επίσης επειδή $x \leq e^x - 1$, για $x > 0$ στο διάστημα $[x,\ e^x - 1]$ από θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $\eta \in (x,\ e^x - 1)$ ώστε

$$f'(\eta) = \frac{f(e^x-1) - f(x)}{e^x - 1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta} = \frac{f(e^x-1) - f(x)}{e^x - 1 - x}$$

και επειδή

$$x < \eta < e^x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x-1} < \frac{1}{\eta} < \frac{1}{x}$$

επομένως

$$\frac{1}{e^x-1} < \frac{f(e^x-1) - f(x)}{e^x - 1 - x} < \frac{1}{x} \ (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$\frac{f(e^x-1) - f(x)}{e^x - 1 - x} < \frac{f(x) - f(\ln(x+1))}{x - \ln(x+1)}$$

ή

$$(x - \ln(x+1)) \ln \frac{e^x-1}{x} < (e^x - x - 1) \ln \frac{x}{\ln(x+1)}$$

απ όπου προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Έστω η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *κυρτή και τέτοια ώστε να υπάρχουν* $\alpha < \beta$ *πραγματικοί με* $\alpha < \beta$ *και*

$$f(f(\alpha) + b) + f(f(b) + \alpha) =$$

$$f(\alpha) \cdot f'(b) + f'(\alpha) \cdot f(b) + f(\alpha) + f(b)$$

Να δείξετε ότι η f *έχει ελάχιστη τιμή, η οποία είναι αρνητική.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=83034

Λύση (Χρήστος Κυριαζής) Η συνάρτηση είναι κυρτή και παραγωγίσιμη με γνησίως αύξουσα παράγωγο (σχολικός ορισμός). Συνεπώς η γραφική της παράσταση βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο αυτής, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Για την εφαπτομένη στο $(a, f(a))$ ισχύει:

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a), \forall x \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς και για $x = f(b) + a$ θα ισχύει:

$$f(f(b)+a) \geq f'(a)(f(b)+a-a) + f(a) \Rightarrow$$

$$f(f(b)+a) \geq f'(a)f(b) + f(a) : (1)$$

Όμοια για την εφαπτομένη στο $(b, f(b))$ ισχύει:

$$f(x) \geq f'(b)(x-b) + f(b), \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα και για $x = f(a) + b$ θα ισχύει:

$$f(f(a)+b) \geq f'(b)(f(a)+b-b) + f(b)$$

$$\Rightarrow f(f(a)+b) \geq f'(b)f(a) + f(b) : (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$f(f(b)+a) + f(f(a)+b) \geq f'(a)f(b) + f(a) + f'(b)f(a) + f(b)$$

Αν τώρα κοιτάξουμε τη δοθείσα αρχική σχέση, συμπεραίνουμε πως αληθεύει ως ισότητα και αυτό ισχύει όταν και μόνο όταν: $f(a) + b = b \wedge f(b) + a = a$ (αν κάποια από τις παραπάνω δεν ίσχυε τότε θα είχαμε γνήσια ανισότητα). Με λίγα λόγια: $f(a) = 0 \wedge f(b) = 0$ Τώρα από το θεώρημα Rolle προκύπτει πως υπάρχει $\xi \in (a,b)$ με $f'(\xi) = 0$. Αξιοποιώντας τη μονοτονία της παραγώγου(γνησίως αύξουσα) έχουμε πολύ απλά πως το ξ είναι θέση ελαχίστου. Τώρα στο $[a,\xi] \Rightarrow f'(x) < 0$ δηλαδή η συνάρτηση μου είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα. Συνεπώς αξιοποιώντας αυτό: $a < \xi \Rightarrow f(a) > f(\xi) \Rightarrow f(\xi) < 0$

Επιμελητής: Σπύρος Καπελλίδης

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Νίκος Ζανταρίδης) Δίνεται τρίγωνο* $AB\Gamma$ *και τα ύψη* $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$. *Αν* $BA_1 + \Gamma B_1 + A\Gamma_1 = A_1\Gamma + B_1 A + \Gamma_1 B$, *να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=86990

Λύση (Νίκος Ζανταρίδης) Με a, b, c συμβολίζουμε τα μήκη των πλευρών $B\Gamma, \Gamma A, AB$ του τριγώνου.

Εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Το τρίγωνο είναι οξυγώνιο

Τότε $BA_1 + \Gamma B_1 + A\Gamma_1 = \Gamma A_1 + B\Gamma_1 + AB_1$

$\Rightarrow ccosB + acos\Gamma + bcosA = bcos\Gamma + acosB + ccosA$

$\Rightarrow c\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + a\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + b\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2cb}$

$= b\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + a\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + c\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Rightarrow bc(a^2+c^2-b^2)+ac(a^2+b^2-c^2)+ab(c^2+b^2-a^2) =$

$= bc(a^2+b^2-c^2)+ab(c^2+a^2-b^2)+ac(b^2+c^2-a^2)$

$\Rightarrow bc(c^2-b^2) + ac(a^2-c^2) + ab(b^2-a^2) = 0$

$\Rightarrow$ ... (παραγοντοποίηση)

$(c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c) = 0 \Rightarrow a = b \vee b = c \vee c = a$, δηλαδή το τρίγωνο ισοσκελές.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι είναι ισοσκελές και στις περιπτώσεις που το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Σπύρος Καπελλίδης) Έστω* $a \in \mathbb{R}^*$ *και* $b, c \in \mathbb{R}$ *ώστε* $4ac < (b-1)^2$ *και* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση με την ιδιότητα* $f(ax^2+bx+c) = af^2(x)+bf(x)+c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(f(x)) = x$ *έχει μία τουλάχιστον λύση.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=75995

Λύση (Eukleidis) Η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + c = x$ είναι ισοδύναμη με την (1) $ax^2 + (b-1)x + c = 0$, η οποία έχει διακρίνουσα $(b-1)^2 - 4ac$, η οποία δίνεται θετική, άρα η (1) έχει δύο ρίζες x_1, x_2.

Η δοθείσα σχέση για $x = x_1$ δίνει

$$f(ax_1^2 + bx_1 + c) = af^2(x_1) + bf(x_1) + c \Rightarrow$$

$$f(x_1) = af^2(x_1) + bf(x_1) + c \Rightarrow$$

$$af^2(x_1) + (b-1)f(x_1) + c = 0$$

άρα η $f(x_1)$ είναι ρίζα της (1). Θέτοντας στην (1) όπου x το x_2 ομοίως καταλήγουμε στο ότι και η $f(x_2)$ είναι επίσης ρίζα της (1). Άρα $\{x_1, x_2\} = \{f(x_1), f(x_2)\}$, το οποίο σημαίνει

α. $f(x_i) = x_1, i = 1, 2$ ή

β. $f(x_1) = x_2 \wedge f(x_2) = x_1$

Στην περίπτωση που αληθεύει το α) θα έχουμε $f(f(x_i)) = x_i, i = 1, 2$, δηλαδή το ζητούμενο.

Στην περίπτωση που αληθεύει το β) θα έχουμε $f(f(x_2)) = f(x_1) = x_2$, δηλαδή το ζητούμενο, άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών τιμών, που μπορεί να λάβει η συνάρτηση*

$$f(x) = [x] + [2x] + \left[\frac{5x}{3}\right] + [3x] + [4x],$$

όταν $x \in [0, 100]$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=18361

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Θέτουμε

$$g\left(x\right) = [x] + [2x] + [3x] + [4x]$$

οπότε είναι

$$f\left(x\right) = g\left(x\right) + \left[\frac{5x}{3}\right]$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g είναι αύξουσα, κατά τμήματα σταθερή και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g\left(x+1\right) = g\left(x\right) + 10$. Για $x \in [0, 1)$, η τιμή της g αλλάζει σε καθένα από τα σημεία $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$, οπότε το $g\left([0, 1)\right)$ είναι ίσο με

$$\left\{g\left(0\right), g\left(\frac{1}{4}\right), g\left(\frac{1}{3}\right), g\left(\frac{1}{2}\right), g\left(\frac{2}{3}\right), g\left(\frac{3}{4}\right)\right\}$$

δηλαδή

$$g\left([0, 1)\right) = \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$$

Έτσι, βρίσκουμε ότι η g παίρνει 6 διαφορετικές τιμές στο διάστημα $[0, 1)$. Παρατηρούμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι επίσης αύξουσα, κατά τμήματα σταθερή και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f\left(x+3\right) = f\left(x\right) + 35$. Για $x \in [0, 3)$, η τιμή της f αλλάζει στα σημεία που αλλάζει η τιμή της g και επιπλέον στα 4 σημεία $\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{12}{5}$. Έτσι, βρίσκουμε ότι η f παίρνει $3 \cdot 6 + 4 = 22$ διαφορετικές τιμές στο διάστημα $[0, 3)$. Άρα, η f παίρνει $33 \cdot 22 = 726$ διαφορετικές τιμές στο διάστημα $[0, 99)$.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί* $0, 1, 2, ..., 100$ *με κενά μεταξύ τους. Ένας μαθητής, ο* A*, τοποθετεί στα κενά* 50 $+$ *και* 50 $*$ *και υπολογίζει την τιμή της παράστασης που προκύπτει (με τη συνήθη προτεραιότητα πράξεων.) Έστω ότι το αποτέλεσμα που βρίσκει είναι ο αριθμός* a*. Στη συνέχεια ο μαθητής* B *αλλάζει όλα τα* $+$ *σε* $*$ *και όλα τα* $*$ *σε* $+$ *στην παράσταση που σχημάτισε ο* A *και υπολογίζει την τιμή της νέας παράστασης, έστω* b*. Αν τα τέσσερα τελευταία ψηφία του αριθμού* $a + b$ *είναι* 2011*, να δείξετε ότι κάποιος από τους μαθητές έκανε λάθος στις πράξεις.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=15584&p=88219#p88219

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Πρώτα θα γίνουν οι πολλαπλασιασμοί. Μετά, θα μείνουν 51 αριθμοί τους οποίους πρέπει να προσθέσουμε. Μπορούμε να βρούμε πόσοι από αυτούς είναι περιττοί και πόσοι άρτιοι· Σίγουρα όλοι οι καινούργιοι αριθμοί που εμφανίστηκαν μετά από τον πολλαπλασιασμό είναι άρτιοι. Για να είναι κάποιος περιττός πρέπει να ήταν περιττός και να μην χρησιμοποιήθηκε στον πολλαπλασιασμό. Δηλαδή να είχε και αριστερά του και δεξιά του το σύμβολο +.

Δηλαδή για να δούμε αν ο a είναι περιττός ή άρτιος χωρίς να κάνουμε τις πράξεις, κοιτάζουμε όλους τους περιττούς αριθμούς $1, 3, \ldots, 99$ και πως τοποθέτησε τα σύμβολα $+$ και $*$ ο μαθητής A. Ας γράψουμε x_{++} για όσους από αυτούς έχουν και αριστερά και δεξιά το σύμβολο $+$, x_{+*} για όσους έχουν αριστερά $+$ και δεξιά $*$ και ομοίως ορίζουμε τους x_{*+} και x_{**}. Τότε ο a είναι περιττός αν και μόνο αν ο x_{++} είναι περιττός. Επειδή ο b προκύπτει με εναλλαγή των $+$ και των $*$, ο b είναι περιττός αν και μόνο αν ο x_{**} είναι περιττός.

Γνωρίζουμε όμως ότι $2x_{++} + x_{+*} + x_{*+} = 50$ αφού έχουν χρησιμοποιηθεί 50 $+$. Ομοίως $2x_{**} + x_{+*} + x_{*+} = 50$. Άρα $x_{++} = x_{**}$. Άρα ο a είναι περιττός αν και μόνο αν ο b είναι περιττός και άρα ο $a + b$ είναι άρτιος. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του $a + b$ δεν μπορεί να ισούται με 1 και άρα κάποιος μαθητής έκανε σίγουρα λάθος στις πράξεις.

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ABCD$. Οι διαγώνιοι του AC, BD τέμνονται στο σημείο O. Αν οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $\triangle\ OAB$, $\triangle\ OBC$, $\triangle\ OCD$, $\triangle\ ODA$ είναι αντίστοιχα r_1, r_2, r_3, r_4 και E είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABCD$. Να αποδείξετε ότι: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 \geq E$. Πότε ισχύει η ισότητα;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=89586

Λύση (Αθανάσιος Κοντογεώργης) Η διάμετρος κάθε κύκλου είναι ίση με τη μέγιστη δυνατή χορδή του και άρα έχουμε $2r_1 \geq AB$ και $2r_2 \geq BC$ και $2r_3 \geq CD$ και $2r_4 \geq DA$.

$$4(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2) \geq (AB)^2+(BC)^2+(CD)^2+(DA)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 4(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \geq \frac{(AB)^2+(BC)^2}{2} + \frac{(BC)^2+(CD)^2}{2} + \frac{(CD)^2+(DA)^2}{2} + \frac{(DA)^2+(AB)^2}{2}$$

$$\Longrightarrow 4(r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2) \geq (AB)(BC)+(BC)(CD)+(CD)(DA)+(DA)(AB), \quad (1).$$

Επειδή σε κάθε τρίγωνο το γινόμενο δύο πλευρών του είναι μεγαλύτερο ή το πολύ ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού του,

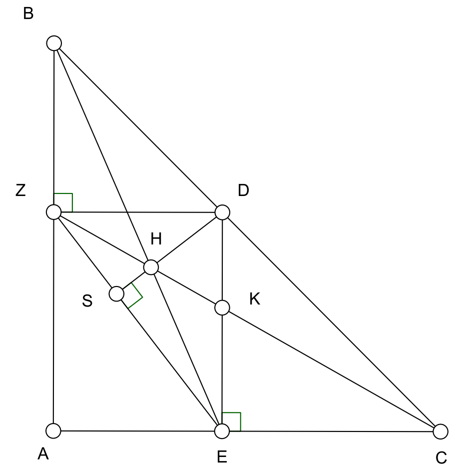
από $(1) \Longrightarrow 4(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) \geq 2[(ABC) + (BCD) + (CDA) + (DAB)] = 4E$

• Η ισότητα ισχύει όταν το $ABCD$ είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει η Φωτεινή Καλδή) Έστω $\triangle\ ABC$, $\hat{A} = 90^o$, $AB = AC$, με D τυχόν σημείο της υποτείνουσας BC. Φέρουμε $DE \perp AB$, $DZ \perp AC$ και έστω το σημείο $H \equiv BZ \cap CE$. Να δείξετε ότι $DH \perp EZ$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=17545

Λύση 1 (Σωτήρης Λουρίδας) Έστω DS το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου $\triangle\ DEZ$ και έστω τα σημεία $K \equiv DZ \cap CE$ και $L \equiv DE \cap BZ$.



Από όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\ ZCD$, $\triangle\ DEK$ έχουμε $\dfrac{KZ}{KD} = \dfrac{ZC}{DE} = \dfrac{ZD}{DE}$, (1) γιατί ισχύει $ZC = ZD$.

Ομοίως, από όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\ DZL$, $\triangle\ EBL$ έχουμε $\dfrac{LD}{LE} = \dfrac{ZD}{BE} = \dfrac{ZD}{DE}$, (2)

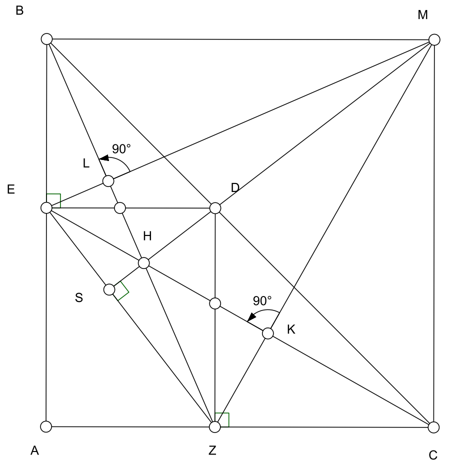
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle\ DEZ$ ισχύει $\dfrac{SE}{DE} = \dfrac{DS}{ZD}$, (3) και $\dfrac{SZ}{ZD} = \dfrac{DS}{DE}$, (4)

Από (3), (4), $\Longrightarrow \dfrac{SE}{SZ} \cdot \dfrac{ZD}{DE} = \dfrac{DE}{ZD} \Longrightarrow \dfrac{SE}{SZ} = \dfrac{(DE)^2}{(ZD)^2}$, (5)

Από (1), (2), (5), $\Longrightarrow \dfrac{KZ}{KD} \cdot \dfrac{LD}{LE} \cdot \dfrac{SE}{SZ} = 1$, (6)

Από (6), σύμφωνα με το Θεώρημα Ceva, συμπεραίνεται ότι $DS \cap EK \cap ZL \equiv H$ και άρα ισχύει το ζητούμενο $DH \perp EZ$.

Λύση 2 (Μπάμπης Στεργίου) Έστω το σημείο M, ώστε το $ABMC$ να είναι τετράγωνο και έστω τα σημεία $K \equiv CE \cap MZ$ και $L \equiv BZ \cap ME$.



Στό ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle\ CMZ$, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, έχουμε $(MZ)^2 = (MC)^2 + (CZ)^2$, (1)

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle\ BME$ έχουμε $(ME)^2 = (MB)^2 + (BE)^2$, (2)

Από (1), (2) $\implies (MZ)^2 - (ME)^2 = (DZ)^2 - (DE)^2$, (3) γιατί ισχύει $MC = MB$ και $DZ = CZ$ και $DE = BE$.

Από (3) συμπεραίνεται ότι $MD \perp EZ$, (4)

Από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\ ABZ$, $\triangle\ BME$, προκύπτει ότι $\angle AZB = \angle BEM$ και άρα το τετράπλευρο $AELZ$ είναι εγγράψιμο.

Έτσι, έχουμε $ZL \perp ME$, (5) και ομοίως $EK \perp MZ$, (6).

Στο τρίγωνο $\triangle\ MEZ$, από (4), (5), (6), συμπεραίνεται ότι $MD \cap EK \cap ZL \equiv H$ και άρα ισχύει το ζητούμενο $DH \perp EZ$.

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογιώργης) Να προσδιορίσετε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ τέτοιες ώστε*

$$f(x - y + f(y)) = f(x) + f(y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=18966

Λύση (Γιώργος Βλαχος) Είναι προφανές ότι η μηδενική συνάρτηση ικανοποιεί τη σχέση. Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι η μηδενική. Τότε, για $x = y$, είναι $f(f(x)) = 2f(x)$, άρα το σύνολο τιμών της f θα περιέχει άπειρους ακεραίους.

Έστω τώρα ότι υπάρχει y με $2y - f(y) = a \neq 0$. Για $x = a$ παίρνουμε $f(a) = 0$. Για $y = a$ στην αρχική, παίρνουμε $f(x - a) = f(x)$, άρα η f είναι περιοδική και παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών, άτοπο. Άρα οι μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση είναι η f με $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{Z}$ και η $f \equiv 0$.

ΣΧΟΛΙΟ: Το παραπάνω πρόβλημα λύθηκε επίσης από τον Νίκο Ζανταρίδη.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Κώστας Τσουβαλάς) Αν $x, y, z > 0$ με $xyz = 1$, να αποδείξετε ότι:*

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{1}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leqslant \frac{1}{2}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=17554

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) Ισχύει

$$\frac{1}{(x+1)^2 + y^2 + 1} \leq \frac{1}{2xy + 2x + 2}$$

κι έτσι αρκεί να αποδειχθεί

$$\sum_{cyc} \frac{1}{xy + x + 1} \leq 1.$$

Θέτοντας όμως $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{c}, z = \dfrac{c}{a}$ έχουμε $\dfrac{1}{xy + x + 1} = \dfrac{bc}{ab + ac + bc}$ και έτσι $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{1}{xy + x + 1} = 1.$

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Στάθης Κούτρας) Δίνεται τρίγωνο* $\triangle\ ABC$ *και έστω* M *τυχόν σημείο στο εσωτερικό του. Έστω* $A' \equiv BC \cap AM,\ B' \equiv AC \cap BM,\ C' \equiv AB \cap CM$ *και* $E_1 = (BA'M),\ E_1' = (CA'M)$ *και* $E_2 = (CB'M),\ E_2' = (B'AM)$ *και* $E_3 = (AC'M),\ E_3' = (C'BM)$*. Να αποδειχθεί ότι*

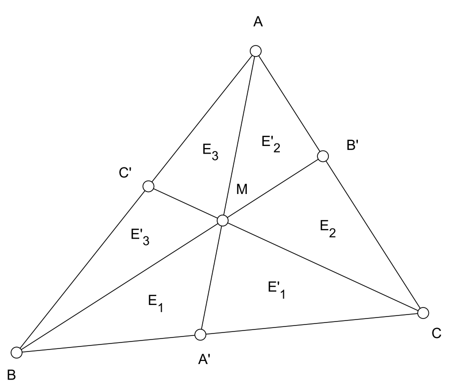
$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} = \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_3'}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=92583

Λύση (Φωτεινή Καλδή) Θα δουλέψουμε με το θεώρημα Ceva και λόγους εμβαδών και είναι γνωστό ότι σε δύο τρίγωνα με ίσα ύψη, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων πλευρών τους.

• Στό τρίγωνο $\triangle\ ABC$ για $AA' \cap BB' \cap CC' \equiv M$, σύμφωνα με το θεώρημα Ceva, ισχύει $\dfrac{A'B}{A'C} \cdot \dfrac{B'C}{B'A} \cdot \dfrac{C'A}{C'B} = 1$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_1'} \cdot \frac{E_2}{E_2'} \cdot \frac{E_3}{E_3'} = 1 \ \Rightarrow E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 = E_1' \cdot E_2' \cdot E_3'$$



Θεωρούμε τους Λόγους :

• $\dfrac{MC'}{MC} = \dfrac{E_3'}{E_1 + E_1'} = \dfrac{E_3}{E_2 + E_2'} \ \Rightarrow$

$E_2 \cdot E_3' + E_2' \cdot E_3{}' = E_1 \cdot E_3 + E_1{}' \cdot E_3 \ \ ,(1)$

• $\dfrac{MB'}{MB} = \dfrac{E_2'}{E_3 + E_3'} = \dfrac{E_2}{E_1 + E_1'} \ \Rightarrow$

$E_1 \cdot E_2' + E_1' \cdot E_2' = E_2 \cdot E_3 + E_3 \cdot E_2 \ \ ,(2)$

• $\dfrac{MA'}{MA} = \dfrac{E_1'}{E_2 + E_2'} = \dfrac{E_1}{E_3 + E_3'} \ \Rightarrow$

$E_3 \cdot E_1' + E_1' \cdot E_3' = E_1 \cdot E_2 + E_2' \cdot E_1 \ \ ,(3)$

• Από τις $(1),\ (2),\ (3)$ παίρνουμε

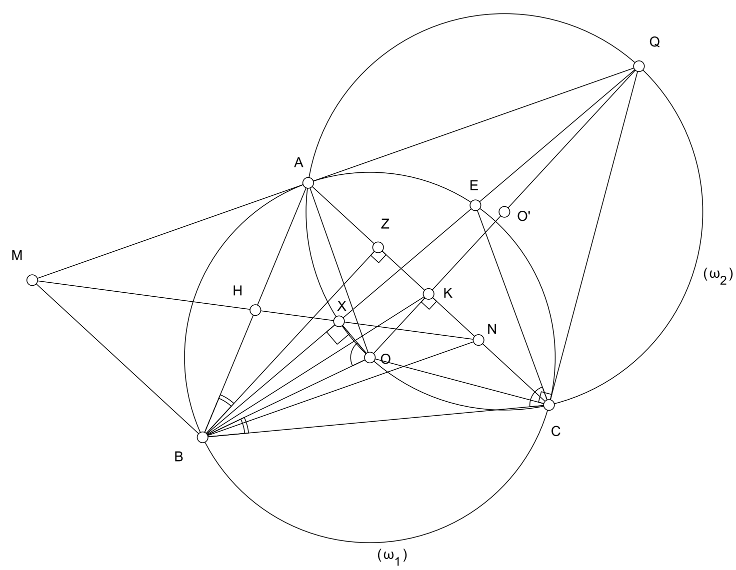
$$E_1' \cdot E_2' + E_2' \cdot E_3' + E_3' \cdot E_1' = E_1 \cdot E_2 + E_2 \cdot E_3 + E_3 \cdot E_1$$
$$\Rightarrow \frac{E_1' \cdot E_2' + E_2' \cdot E_3' + E_3' \cdot E_1'}{E_1' \cdot E_2' \cdot E_3'} = \frac{E_1 \cdot E_2 + E_2 \cdot E_3 + E_3 \cdot E_1}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_3'} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Χρήστος Στραγάλης) Εστω ένα σκαληνό τρίγωνο* $\triangle ABC$*,* (ω_1) *ο περίκυκλός του με κέντρο* O *και* (ω_2) *ο περίκυκλος του τριγώνου* $\triangle AOC$*. Έστω επίσης* OQ *η διάμετρος του κύκλου* (ω_2) *και τα σημεία* M, N *που επιλέγονται με τέτοιον τρόπο επί των ευθειών* AQ, AC *αντίστοιχα, ώστε το τετράπλευρο* $AMBN$ *να είναι παραλληλόγραμμο. Να αποδειχθεί οτι το σημείο τομής των ευθειών* MN, BQ *ανήκει στον κύκλο* (ω_2)*.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=96244

Λύση (Δημήτρης Σκουτέρης) • Έστω το σημείο $X \equiv MN \cap BQ$ και ας είναι Y, το άλλο σημείο τομής του περίκυκλου του $\triangle\ AOC$, από την ευθεία BQ και αρκεί να αποδειχθεί ότι $Y \equiv X$.

Έστω το σημείο $Z \equiv AC \cap BQ$ και ας είναι $K,\ H$ τα ίχνη επί της AC, της διαμέσου και του ύψους αντίστοιχα στο $\triangle\ AOC$.



Από το Θεώρημα Μενελάου στο τρίγωνο $\triangle\ AQB$ με διατέμνουσα την MN, έχουμε $\dfrac{BX}{XQ} = \dfrac{MA}{MQ} \ \ ,(1)$

Από $AZ \parallel MB \Longrightarrow \dfrac{MA}{MQ} = \dfrac{BZ}{BQ} \ \ ,(2)$

Από όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\ BHZ,\ \triangle\ QYO$, έχουμε $\dfrac{HZ}{OY} = \dfrac{BH}{YQ} \Longrightarrow (HZ)(YQ) = (OY)(BH) \ \ ,(3)$

• Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\ OBY,\ \triangle\ KBH$ είναι όμοια γιατί έχουν $\angle BOY = \angle BKH$, που προκύπτει από το ότι η ευθεία BQ ταυτίζεται με την B-συμμετροδιάμεσο του $\triangle\ ABC$.

($\angle BKH = \angle C + \angle KBC = \angle C + \angle ZBA = \angle BCE = \angle BOY$, όπου $E \equiv (\omega_1) \cap BQ$).

Άρα έχουμε $\dfrac{OY}{KH} = \dfrac{BY}{BH} \Longrightarrow (OY)(BH) = (BY)(KH)$,(4)

Από (3), (4) $\Longrightarrow (HZ)(YQ) = (BY)(KH) \Longrightarrow \dfrac{BY}{YQ} = \dfrac{HZ}{KH} = \dfrac{BZ}{BQ}$,(5)

Από (1), (2), (5), $\Longrightarrow \dfrac{BY}{YQ} = \dfrac{BX}{XQ}$,(6)

Από (6) συμπεραίνεται ότι τα $X,\ Y$ ταυτίζονται, αφού είναι είτε και τα δύο εσωτερικά του BQ (αν $\angle B \leq 90^o$), είτε εξωτερικά (αν $\angle B \geq 90^o$).

Επιμελητής: Αλέξανδρος Συγκελάκης

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Λώλας) Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση:*

$$9^x + 10^y = 12^z + 1$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=71915

Λύση 1 (Σιλουανός Μπραζιτίκος) Η λύση είναι με χρήση του λήμματος « lift the exponent » (κοιτάξτε στο τέλος της δεύτερης λύσης). Λοιπόν ισχυρίζομαι αρχικά ότι κάποιος από τους x, y είναι μεγαλύτερος από τον z. Πράγματι έστω $z > x$ και $z > y$. Τότε $9^x + 10^y = 12 \cdot 12^{z-1} + 1 > 2 \cdot 12^{z-1}$, άτοπο.

Διακρίνουμε λοιπόν τις περιπτώσεις: Αν $x \geq z$. Τότε $3^z || 10^y - 1$. Αφού $3^2 || 10 - 1$ θα πρέπει $3^{z-2} || y$ Επομένως αν $z \geq 4$ τότε $3^{z-2} > 3z$. Τότε όμως το πρώτο μέλος είναι μεγαλύτερο από το δεύτερο.

Αν $y \geq z$. Τότε $2^{2z} || 9^x - 1$. Αφού $2^4 || \frac{9^2-1}{2}$ θα πρέπει $2^{2z-4} || x$ Επομένως αν $z \geq 4$ τότε $2^{2z-4} > 2z$. Τότε όμως το πρώτο μέλος είναι μεγαλύτερο από το δεύτερο. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις με το χέρι. Να σημειώσουμε ότι η λύση που βγαίνει $x = y = z = 3$ δίνει (όπως είχε πει ο αμίμητος Ramanujan) τον ελάχιστο αριθμό που γράφεται κατά δύο διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα δύο κύβων.

Λύση 2 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Κοιτάζοντας $\bmod 5$: Το δεξί μέλος δεν μπορεί να ισούται με $1 \bmod 5$. Άρα ούτε και το αριστερός και άρα ο x πρέπει να είναι περιττός.

Κοιτάζοντας $\bmod 16$: Αν $y \geqslant 4$ και $z \geqslant 2$ τότε $9^x \equiv 1 \bmod 16$ και άρα ο x πρέπει να είναι άρτιος.

Άρα πρέπει απαραίτητα $y < 4$ ή $z < 2$. Αν $z = 1$ τότε $9^x + 10^y = 13$ η οποία είναι αδύνατη. Άρα πρέπει $y < 4$.

Αν $y = 1$ τότε $9^x + 9 = 12^z$ και επειδή το 9 διαιρεί το αριστερό μέλος αλλά το 27 όχι πρέπει $z = 2$ και βλέπουμε ότι η εξίσωση είναι αδύνατη. Ομοίως αν $y = 2$ τότε $9^x + 99 = 12^z$ άρα $z = 2$ και πάλι η εξίσωση είναι αδύνατη. Τέλος, αν $y = 3$ τότε $9^x + 999 = 12^z$. Αν $x = 1$ η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν $x \geqslant 2$ τότε το 27 διαιρεί το αριστερό μέλος αλλά το 81 όχι. Οπότε $z = 3$ και άρα $x = 3$ και παίρνουμε την μοναδική λύση.

Να προσθέσω μόνο το λήμμα που χρησιμοποίησε ο Σιλουανός επειδή φαίνεται αρκετά σημαντικό σε τέτοιες ασκήσεις και δεν το γνωρίζουμε όλοι.

Λήμμα: Έστω p περιττός πρώτος, a, b διαφορετικοί ακέραιοι με $a \equiv b \bmod p$ και n θετικός ακέραιος. Έστω επίσης r, s, t οι μεγαλύτεροι εκθέτες ώστε τα p^r, p^s, p^t να διαιρούν τα $a-b, n$ και $a^n - b^n$ αντίστοιχα. Τότε $r+s = t$.

Για $p = 2$, αν a, b διαφορετικοί ακέραιοι με $a \equiv b \bmod 2$ και r, s, t οι μεγαλύτεροι εκθέτες ώστε τα $2^r, 2^s, 2^t$ να διαιρούν τα $a^2 - b^2, n$ και $a^n - b^n$ τότε $r + s = t + 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Αν $\tau(n)$ το πλήθος και $\sigma(n)$ το άθροισμα των διαιρετών του θετικού ακεραίου n, να δείξετε ότι*

$$\sqrt{n} \leq \frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leq \frac{n+1}{2}$$

Πότε ισχύει καθεμιά ισότητα;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=91457

Λύση (Σταύρος Ευθυμίου) Αρχίζουμε με την αριστερή Για $\tau(n) = 1$, πρέπει $n = 1$ και τότε ισχύει ισότητα. Για $\tau(n) > 1$: Όταν ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, ο $\tau(n)$ είναι άρτιος: Έστω $1 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_{\tau(n)} = n$ οι διαιρέτες του n. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ισχύει $d_i d_{\tau(n)-i} = n$ Από ΑΜ-ΓΜ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{i=0}^{\tau(n)} d_i \geq \sqrt[\tau(n)]{\prod_{i=0}^{\tau(n)} d_i} \\
&= \sqrt[\tau(n)]{\prod_{i=0}^{\tau(n)/2} d_i d_{\tau(n)-i}} \\
&= \sqrt[\tau(n)]{n^{\frac{\tau(n)}{2}}} = \sqrt{n}
\end{aligned}$$

Για να ισχύει ισότητα στην ΑΜ-ΓΜ πρέπει οι διαιρέτες να είναι ίσοι, που είναι άτοπο. Άρα ισότητα ισχύει μόνο για $n = 1$. Στην περίπτωση που ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, έστω $n = d_j^2$, ακολουθούμε τον ίδιο τρόπο, δηλαδή από ΑΜ-ΓΜ:

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} &= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{i=0}^{\tau(n)} d_i \geq \sqrt[\tau(n)]{\prod_{i=0}^{\tau(n)} d_i} \\
&= \sqrt[\tau(n)]{n^{\frac{\tau(n)-1}{2}} d_j} \\
&= \sqrt[\tau(n)]{n^{\frac{\tau(n)-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt[\tau(n)]{n^{\frac{\tau(n)}{2}}} = \sqrt{n}
\end{aligned}$$

Για την δεξιά: Για $n=1$ ισχύει ισότητα. Για $n>1$: Και πάλι στην περίπτωση που ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, άρα $\tau(n)$ άρτιος:

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} \leq \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow$$

$$(n+1)\tau(n) \geq 2\sigma(n) \Leftrightarrow$$

$$(n+1)\frac{\tau(n)}{\sigma(n)} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} + \frac{\tau(n)}{\sigma(n)} \geq 2 \ \ (1)$$

Όμοια με την απόδειξη της αριστερής θεωρούμε

$$1 = d_0 < d_1 < d_2 < ... < d_{\tau(n)} = n$$

τους διαιρέτες του n με $d_i d_{\tau(n)-i} = n \ \forall \ i \in \mathbb{N}$. Τότε ισχύει

$$\tau(n) = n + n + n + \cdots + n =$$

$$d_0 d_{\tau(n)} + d_1 d_{\tau(n)-1} + \cdots + d_k d_{\tau(n)-k} +$$

$$+ d_0 d_{\tau(n)} + d_1 d_{\tau(n)-1} + \cdots + d_k d_{\tau(n)-k} =$$

$$2 \sum_{i=0}^{\tau(n)/2} d_i d_{\tau(n)-i}$$

Θα συγκρίνουμε το άθροισμα και το γινόμενο δύο θετικών ακεραίων x, y:

$$xy \geq x + y \Leftrightarrow$$

$$xy - x - y + 1 \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$x(y-1) - (y-1) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(y-1) \geq 1$$

Άρα παρατηρούμε ότι αν οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι του 2 ή ο ένας ίσος με 2 και ο άλλος μεγαλύτερος, τότε το γινόμενο τους είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα. Αν και οι δύο είναι ίσοι με 2, τότε το γινόμενο είναι ίσο με το άθροισμα, ενώ αν έστω κι ένας ένας είναι ίσος με 1, τότε το άθροισμα είναι μεγαλύτερο. Για τους διαιρέτες, όλοι εκτός από τον πρώτο είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 2, άρα το γινόμενο τους είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα. Άρα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&n\tau(n) = 2 \sum_{i=0}^{\tau(n)/2} d_i d_{\tau(n)-i} = \\
&2d_0 d_{\tau(n)} + 2 \sum_{i=1}^{\tau(n)/2} d_i d_{\tau(n)-i} \geq \\
&2d_0 d_{\tau(n)} + 2 \sum_{i=1}^{\tau(n)/2} (d_i + d_{\tau(n)-i}) = \\
&2d_0 d_{\tau(n)} + 2 \sum_{i=0}^{\tau(n)/2} (d_i + d_{\tau(n)-i}) - 2d_0 - 2d_{\tau(n)} = \\
&2n + 2\sigma(n) - 2 - 2n = 2\sigma(n) - 2
\end{aligned}$$

Άρα: $\dfrac{n\tau(n)}{\sigma(n)} \geq \dfrac{2\sigma(n)-2}{\sigma(n)} = 2 - \dfrac{2}{\sigma(n)}$.

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{n\tau(n)}{\sigma(n)} + \frac{\tau(n)}{\sigma(n)} &\geq 2 - \frac{2}{\sigma(n)} + \frac{\tau(n)}{\sigma(n)} \\
&= 2 + \frac{\tau(n)-2}{\sigma(n)}
\end{aligned}$$

Οπότε αντί για την (1) μπορεί να αποδειχτεί η ισχυρότερη:

$$2 + \frac{\tau(n)-2}{\sigma(n)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\tau(n)-2}{\sigma(n)} \geq 0 \Leftrightarrow \tau(n) \geq 2$$

, που ισχύει αφού $n > 1$

Η ισότητα ισχύει αν $n = 1$, ή n πρώτος.

Στην περίπτωση που ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου (έστω $n = d_j^2$), έχουμε: $d_j \geq 2 \Rightarrow d_j^2 \geq 2d_j$. Άρα όμοια με παραπάνω έχουμε:

$$\begin{aligned}
n\tau(n) &= 2(d_0 d_{\tau(n)} + d_1 d_{\tau(n)-1} + \cdots + d_{j-1} d_{\tau(n)-j+1} \\
&+ d_{j+1} d_{\tau(n)-j-1} + \cdots + d_k d_{\tau(n)-k} + d_j^2 \\
&\geq 2d_0 d_{\tau(n)} + 2(d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{j-1} \\
&+ d_{j+1} + \cdots + d_{\tau(n)}) + 2d_j - 2(d_0 + d_{\tau(n)}) \\
&= 2n + 2\sigma(n) - 2n - 2 = 2\sigma - 2
\end{aligned}$$

και συνεχίζουμε όμοια με την περίπτωση που ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον IMC 2011/B3) Υπολογίστε το*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\ln\left(1+\tfrac{1}{2n}\right)\ln\left(1+\tfrac{1}{2n+1}\right)$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=17717

Λύση (Ηλίας Ζαδίκ) Θέτουμε $c_n = \ln(1+1/n)$ και παρατηρούμε ότι $c_n = c_{2n} + c_{2n+1}$. Αν L το ζητούμενο άθροισμα έχουμε:

$$\begin{aligned} 3L &= \sum_{n=1}^{\infty} 3c_n c_{2n} c_{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3(c_{2n}+c_{2n+1})c_{2n}c_{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(c_{2n}+c_{2n+1})^3 - (c_{2n}^3 + c_{2n+1}^3)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n^3 - (c_{2n}^3 + c_{2n+1}^3)] = c_1^3 = (\ln 2)^3. \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη τιμη είναι $L = \dfrac{\ln(2)^3}{3}$]. Το τηλεσκοπικό άθροισμα έχει νόημα γιατί αυτό που μένει πάει στο μηδέν.

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Από τον IMC 2011/A4) Έστω τα* $A_1, A_2, ..., A_n$*, τα οποία είναι πεπερασμένα, μη κενά σύνολα. Έστω η συνάρτηση:*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} (-1)^{k-1} t^{|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \ldots \cup A_{i_k}|}.$$

Αποδείξτε ότι η f *είναι μη φθίνουσα στο* $[0,1]$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=17717

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Για κάθε $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ρίχνουμε ένα νόμισμα το οποίο έχει πιθανότητα t να έρθει κορώνα. (Όλες οι ρίψεις ανεξάρτητες.) Έστω E το ενδεχόμενο τουλάχιστον σε ένα από τα από τα A_i να έρθουν όλες οι ρίψεις κορώνες. Προφανώς το $\Pr(E)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του t (στο $[0,1]$).

Για $I \subseteq [n]$, (όπου $[n] = \{1,\ldots,n\}$) έστω E_I το ενδεχόμενο για κάθε $x \in \cup_{i \in I} A_i$ να φέρουμε κορώνα. Τότε $\Pr(E_i) = t^{|\cup_{i\in I} A_i|}$. Άρα από την αρχή εγκλισμού-αποκλισμού έχουμε

$$\Pr(E) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \Pr(E_i) = f(t)$$

και άρα η $f(t)$ είναι όντως αύξουσα συνάρτηση στο $[0,1]$.

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προείνει ο Αχιλλέας Συνεφακόπουλος)* *Έστω $A \in M_{3,2}(\mathbb{C})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{C})$ τέτοιοι ώστε*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η ορίζουσα $\det(BA)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=17629

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Οι ιδιοτιμές του πίνακα AB είναι $0, 1, 2$, άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το: $p_{AB}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του BA είναι το: $p_{BA}(\lambda) = \lambda^{2-3} p_{AB}(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, οπότε $\det(BA) = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω ο $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$, με $a_{ij} \in \{0, 1\}$ για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, για τον οποίο ισχύει η σχέση*

$$AA^t = mI_n + J_n$$

όπου m θετικός ακέραιος, J_n ο $n \times n$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1, I_n ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας και A^t ο ανάστροφος του A. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι κανονικός, δηλαδή ότι ισχύει $AA^t = A^tA$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=18518

Λύση (Ηλίας Ζαδίκ)

Αρχικά παρατηρούμε ότι από την σχέση μας είναι άμεσο ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, ότι κάθε γραμμή έχει $m + 1$ ακριβώς άσσους καθώς και ότι για οποιεσδήποτε 2 γραμμές υπάρχει στήλη μοναδική που έχουν μονάδα και οι δύο.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι ο A^tA δεν έχει μηδενικό στοιχείο και ότι τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με 1.

Πράγματι έστω i, j τέτοια ώστε $\langle A^tAe_i, e_j\rangle = 0$. Άμεσα $i \neq j$ αφού ο A είναι αντιστρέψιμος. Επίσης αν v τέτοιο ώστε $A^tv = e_i$ έπεται ότι $A^tAe_i = A^tAA^tv = A^t(mv + Jv) = me_i + A^tJv$ και άρα $0 = \langle A^tAe_i, e_j\rangle = \langle A^tJv, e_j\rangle = \langle v, J(Ae_j)\rangle$ και αφού το Ae_j έχει μη αρνητικά στοιχεία με μη μηδενικό άθροισμα έπεται ότι το άθροισμα των στοιχείων του v είναι μηδέν. Όμως τότε $1 = (1\,1\,\cdots\,1)e_i = (1\,1\,\cdots\,1)A^tv = (m+1)(1\,1\,\cdots\,1)v = 0$, αντίφαση. Συνεπώς το πρώτο ζητούμενο είναι εντάξει. Για το άλλο απλά παρατηρούμε ότι αν σε μη διαγώνια θέση (i, j) είχε τουλάχιστον 2 τότε οι στήλες i, j θα είχαν σε 2 τουλάχιστον γραμμές κοινό άσσο κάτι αντιφατικό με την υπόθεση αφού σε κάθε ζεύγος γραμμών αντιστοιχεί μια και μόνο τέτοια στήλη.

Τώρα πίσω στο πρόβλημα. Θα μετρήσουμε τα ζεύγη $((i_1, j_1), (i_2, j_1))$ όπου $i_1 \neq i_2$ και επιπλέον στις 2 θέσεις ο πίνακας A έχει άσσο. Από την μία, για κάθε επιλογή γραμμών, από την υπόθεση έχουμε μια ακριβώς επιλογή στήλης οπότε αυτά τα ζεύγη είναι $n(n-1)$. Από την άλλη, για κάθε επιλογή στήλης i, έχουμε $x_i(x_i - 1)$ επιλογές αν έχει η στήλη x_i άσσους. Συνεπώς ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - 1) = n(n-1). \qquad (1)$$

Επίσης, θα μετρήσουμε τα ζεύγη $((i_1, j_1), (i_1, j_2))$ όπου $j_1 \neq j_2$ και επιπλέον στις 2 θέσεις ο πίνακας A έχει άσσο. Αυτές είναι με το ίδιο σκεπτικό και $nm(m+1)$ αλλά και $n(n-1)$ αφού σε κάθε επιλογή j_1, j_2 από τον ισχυρισμό υπάρχει μοναδικό i_1 που μας ικανοποιεί. Συνεπώς ισχύει και

$$m(m+1) = n - 1. \quad (2)$$

Από (1),(2) έπεται ότι

$$\begin{aligned} n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= n^2(n-1) + n\sum_{i=1}^{n} x_i \\ &= n^2(n+m) = (n(m+1))^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \end{aligned}$$

οπότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz όλα τα x_i είναι ίσα με $m + 1$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε, αφού είναι τα διαγώνια στοιχεία του A^tA.

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί, αν υπάρχει, το όριο*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^2 n}{n}\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)}\,.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=15160

Λύση 1 (Δημήτρης Σκουτέρης) Έστω (a_n) η ακολουθία μας. Η $\ln(\ln x)$ είναι κοίλη, από όπου έχουμε

$$\ln k\ln(n-k)\le(\ln(n/2))^2 \text{ και}$$

$$\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)}\ge\frac{n-3}{(\ln n-\ln 2)^2}$$

Επίσης, από ανισότητα Chebyshev, έχουμε

$$\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)}\le\frac{1}{n-3}\left(\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k}\right)^2.$$

Έτσι, έχουμε $a_n\ge b_n=\dfrac{n-3}{n}\dfrac{(\ln n)^2}{(\ln n-\ln 2)^2}$ και

$a_n\le c_n=\dfrac{(\ln n)^2}{n(n-3)}\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\ln k}\right)^2.$

Βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=1$ (το δεύτερο όριο με Cesàro-Stolz), οπότε $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1\,.$ □

Λύση 2 (Αναστάσιος Κοτρώνης) Αρχικά βλέπουμε πως συμπεριφέρεται το $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}$. Επειδή η αντίστοιχη απειροσειρά αποκλίνει και καθώς η $1/(\ln x)$ είναι θετική και γνησίως φθίνουσα, έχουμε ότι $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}\overset{n\to+\infty}{\sim}\int_2^n\frac{1}{\ln x}\,dx.$

Όμως

$$\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{\ln n}\frac{1}{1+\frac{\ln(x/n)}{\ln n}}\overset{*}{=}\frac{1}{\ln n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{\ln(x/n)}{\ln n}\right)\right)$$

$*$ από την προσέγγιση της $(1+x)^{-1}$ αφού $-1<\dfrac{\ln(x/n)}{\ln n}<0\,.$

Ολοκληρώνοντας τώρα έχουμε

$$\int_2^n\frac{1}{\ln x}\,dx=\frac{n-2}{\ln n}+\mathcal{O}\left(\int_2^n\frac{\ln(x/n)}{\ln^2 n}\,dx\right)=$$

$$\frac{n}{\ln n}+\mathcal{O}\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right).$$

Γυρνώντας στο αρχικό πρόβλημα, παρατηρούμε ότι η αθροισθέα συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον $x=n/2$, άρα η ποσότητα της οποίας αναζητούμε το όριο είναι ίση με $\dfrac{2\ln^2 n}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n/2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)}$.

Ακόμα έχουμε :

$$\frac{1}{\ln(n-k)}=\frac{1}{\ln n}\frac{1}{1+\frac{\ln(1+k/n)}{\ln n}}=$$

$$\frac{1}{\ln n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{\ln(1+k/n)}{\ln n}\right)\right)=\frac{1}{\ln n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right).$$

Έπεται ότι $\dfrac{1}{\ln k\ln(n-k)}=\dfrac{1}{\ln n\ln k}+\dfrac{1}{\ln k}\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\ln^2 n}\right)$

και συνεπώς $\dfrac{2\ln^2 n}{n}\displaystyle\sum_{k=2}^{n/2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)}=$

$$\frac{2\ln n}{n}\sum_{k=2}^{n/2}\frac{1}{\ln k}+\mathcal{O}(1/n)\sum_{k=2}^{n/2}\frac{1}{\ln k}\,.$$

Από την αρχική μελέτη όμως

$$\sum_{k=2}^{n/2}\frac{1}{\ln k}=\frac{n/2}{\ln(n/2)}+\mathcal{O}\left(\frac{n}{\ln^2(n/2)}\right)$$

άρα

$$\frac{2\ln^2 n}{n}\sum_{k=2}^{n/2}\frac{1}{\ln k\ln(n-k)}=\frac{\ln n}{\ln(n/2)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln n}\right)\to 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Να υπολογισθεί το*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-1}{x^2\left(x^2+a\right)}dx\,,\ a>0\,.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=83560#p83560

Λύση 1 (Κώστας Τσουβαλάς) Θεωρούμε την μιγαδική συνάρτηση $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z^2\left(z^2+a\right)}$. Η συνάρτηση έχει σαν απλούς πόλους τους φανταστικούς $\pm i\sqrt{a}$ και από αυτούς μόνο ο $i\sqrt{a}$ βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο.

Το μηδέν είναι ρίζα 2ης τάξης του παρανομαστή καθώς $(z^2(z^2+a))''=2a$, $(z^2(z^2+a))'=0$, για $z=0$ και ρίζα πρώτης τάξης του αριθμητή καθώς $\left(e^{iz}-1\right)'=ie^{iz}\neq 0$, για $z=0$. Άρα είναι πόλος 1ης τάξης της συνάρτησης.

Επομένως $Res\,(f,0)=\dfrac{1}{0!}\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{e^{iz}-1}{z\,(z^2+a)}=$

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\left(e^{iz}-1\right)'}{\left(z\,(z^2+a)\right)'}=\dfrac{i}{a}$.

Θεωρώντας θετικά προσανατολισμένη ημιπεριφέρεια ακτίνας R μεγαλύτερη από a έχουμε

$$\int_C f\,(z)=2\pi Res\,(f,ai)+i\pi Res\,(f,0) \quad \text{και}$$

$$Res\,(f,0)=\frac{e^{-\sqrt{a}}-1}{\left(x^2\,(x^2+a)\right)'}=\frac{e^{-\sqrt{a}}-1}{-2ia\sqrt{a}}.$$

Άρα $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1-e^{-\sqrt{a}}}{2ia\sqrt{a}}\right)+i\pi\,\frac{i}{a}=$

$-\dfrac{\pi\left(-1+\sqrt{a}+e^{-\sqrt{a}}\right)}{a\sqrt{a}}$ και γιά $z=R\,e^{it}=$

$R\,(\cos\theta+i\sin\theta)$, έχουμε

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}-1}{x^2\,(x^2+a)}dx+\int_0^{\pi}\frac{e^{iR\cos\theta}\cdot e^{-R\sin\theta}-1}{R^2e^{2it}\,(R^2e^{2it}+a)}Re^{it}dt=$$

$$-\frac{\pi\left(-1+\sqrt{a}+e^{-\sqrt{a}}\right)}{a\sqrt{a}}.$$

Αφήνοντας $R\to\infty$, έχουμε

$$\left|\int_0^{\pi}\frac{e^{iR\cos\theta}\cdot e^{-R\sin\theta}-1}{R^2e^{2it}\,(R^2e^{2it}+a)}iRe^{it}dt\right|\leqslant$$

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{iR\cos\theta}\cdot e^{-R\sin\theta}-1}{R^2e^{2it}\,(R^2e^{2it}+a)}iRe^{it}\right|dt\leqslant$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\left|e^{iR\cos\theta}\cdot e^{-R\sin\theta}\right|+1}{R^2\,(|R^2-a|)}Rdt\to 0.$$

Άρα $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{Re^{i\cos\theta-R\sin\theta}-1}{R^2e^{2it}\,(R^2e^{2it}+a)}iRe^{it}dt=0$ και έτσι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}-1}{x^2\,(x^2+a)}dx=-\frac{\pi\left(-1+\sqrt{a}+e^{-\sqrt{a}}\right)}{a\sqrt{a}}.$$

Εξισώνοντας φανταστικά και πραγματικά μέρη βρίσκω

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-1}{x^2\,(x^2+a)}dx=-\frac{\pi\left(-1+\sqrt{a}+e^{-\sqrt{a}}\right)}{a\sqrt{a}}}.\quad\square$$

Λύση 2 (Σεραφείμ Τσιπέλης)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x-1}{x^2\,(x^2+a)}\,dx=2\int_0^{\infty}\frac{\cos x-1}{x^2\,(x^2+a)}\,dx=$$

$$\frac{2}{a}\int_0^{\infty}\frac{\cos x-1}{x^2}dx-\frac{2}{a}\int_0^{\infty}\frac{\cos x-1}{x^2+a}\,dx=$$

$$\frac{2}{a}\int_0^{\infty}(\cos x-1)\left(\int_0^{\infty}ye^{-yx}dy\right)dx-$$

$$-\frac{2}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}(\cos x-1)\left(\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{a}y\right)e^{-yx}dy\right)dx=$$

$$\frac{2}{a}\int_0^{\infty}y\left(\int_0^{\infty}(\cos x-1)\,e^{-yx}dx\right)dy-$$

$$\frac{2}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{a}y\right)\left(\int_0^{\infty}(\cos x-1)\,e^{-yx}dx\right)dy\stackrel{[1]}{=}$$

$$-\frac{2}{a}\int_0^{\infty}y\,\frac{1}{y\,(y^2+1)}dy+\frac{2}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{a}y\right)\frac{1}{y\,(y^2+1)}dy=$$

$$-\frac{\pi}{a}+\frac{2}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{a}y\right)}{y\,(y^2+1)}dy\stackrel{y=\sqrt{x}}{=}$$

$$-\frac{\pi}{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{ax}\right)}{x\,(x+1)}dx=$$

$$-\frac{\pi}{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{ax}\right)}{x}dx-\frac{1}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{ax}\right)}{x+1}dx=$$

$$-\frac{\pi}{a}+\frac{1}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{y}\right)}{y}dy-$$

$$\frac{1}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{ax}\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-(x+1)t}dt\right)dx\stackrel{\sqrt{y}=x}{=}$$

$$-\frac{\pi}{a}+\frac{2}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(x\right)}{x}dx-$$

$$\frac{1}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}e^{-t}\left(\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{ax}\right)e^{-xt}dx\right)dt\stackrel{[2]}{=}$$

$$-\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{a\sqrt{a}}-\frac{1}{a\sqrt{a}}\int_0^{\infty}e^{-t}\,\frac{\sqrt{a\pi}}{2t\sqrt{t}}\,e^{-\frac{a}{4t}}\,dt\stackrel{t=\frac{1}{x}}{=}$$

$$\frac{\pi\,(1-\sqrt{a})}{a\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int_0^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{t}}\,e^{-\frac{a}{4t}}\,e^{-t}\,dt\stackrel{[3]}{=}$$

$$\frac{\pi\,(1-\sqrt{a})}{a\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,2\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-\sqrt{a}}=\frac{\pi\left(1-\sqrt{a}-e^{-\sqrt{a}}\right)}{a\sqrt{a}}.$$

Χρησιμοποιήθηκαν οι τύποι

$$[1]:\int_0^{\infty}(\cos x-1)\,e^{-yx}dx=\frac{y}{y^2+1}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{y\,(y^2+1)}\,.$$

$$[2]:\int_0^{\infty}\sin\left(m\sqrt{x}\right)e^{-yx}\,dx=\frac{m\sqrt{\pi}}{2y\sqrt{y}}\,e^{-\frac{m^2}{4y}}\quad \text{και}$$

$$[3]:\int_0^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}e^{-\dfrac{m^2}{4x}}\,e^{-yx}\,dx=2\frac{\sqrt{\pi}}{m}\,e^{-m\sqrt{y}}\,.$$

(Δ. Δασκαλόπουλος - Ανώτερα Μαθηματικά Ε.Μ.Π. 3ος τόμος - σελ. 350 - 355 με αποδείξεις που βασίζονται σε χρήση διαφορικών εξισώσεων πραγματικής μεταβλητής).

Επίσης ότι $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin\left(\sqrt{a}x\right)e^{-xy}dx=\frac{\sqrt{a}}{y^2+a}\,.$ $\square$

Μαθηματική Λογική & Θεμέλια Μαθηματικών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Δημήτρης Σκουτέρης

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Δημήτρης Σκουτέρης) Εστω $\bar{A} = \langle A, \leq \rangle$ μια καλή διάταξη. Να αποδειχθεί ότι $\bar{A} = \bar{B} + \bar{C}$, όπου η $\bar{B}$ είναι μια καλή διάταξη χωρίς μέγιστο και η $\bar{C}$ μια πεπερασμένη διάταξη. (Λέμε ότι $\langle A, \leq_A \rangle = \langle B, \leq_B \rangle + \langle C, \leq_C \rangle$ αν και μόνο αν $x \leq_A y \Leftrightarrow (x \leq_B y \bigvee x \leq_C y \bigvee (x \in B \wedge y \in C))$).*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=91864

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Αν το A πεπερασμένο παίρνουμε $B = \emptyset$. Αν A άπειρο χωρίς μέγιστο στοιχείο, παίρνουμε $C = \emptyset$. Στις δύο αυτές ¨ανιαρές¨ περιπτώσεις, το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Μένει η ουσιαστικη περίπτωση.

Ορίζουμε ως C το σύνολο των στοιχείων x που το καθένα έχει πεπερασμένο το πλήθος στοιχείων y με $y \geq x$. Παρατηρούμε ότι το C είναι πεπερασμένο διότι από καλή διάταξη έχει ελάχιστο στοιχείο $m \in C$. Εξ ορισμού των m, C τα στοιχεία του C, ως μεγαλύτερα του m, είναι πεπερασμένα το πλήθος. Επίσης παρατηρούμε ότι αν $p \in C$ και $q \geq p$ τότε και $q \in C$ (αλλιώς τα άπειρα το πλήθος $y \geq q$ θα ήσαν άπειρα το πλήθος στοιχεία $\geq p$.

Ορίζουμε $B = A - C$ και στα B, C βάζουμε την διάταξη που είχαν στο A. Έστω τώρα $x \leq_A y$. Αν και τα δύο ανήκουν στο B ή και τα δύο στο C, τελειώσαμε. Όποτε έστω το ένα στο B και το άλλο στο C. Δεν μπορεί $x \in C$ γιατί τότε και $y \in C$. Τελικά, $x \in B, y \in C$. Το αντίστροφο είναι όμοιο. Συγκεκριμένα, έστω $x \leq_B y \bigvee x \leq_C y \bigvee (x \in B \wedge y \in C)$. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις, τελειώσαμε. Αν πάλι $x \in B \wedge y \in C$ δεν μπορεί, εξ ορισμού του C να είναι $x \geq_A y$, οπότε τελικά $x \leq_A y$.

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Ποτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Ονομάζουμε μια διάταξη $\prec$ ενός συνόλου X άριστη αν κάθε μη κενό υποσύνολο του X έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο σε σχέση με την $\prec$. Να εξεταστεί σε ποια σύνολα μπορούμε να ορίσουμε μια άριστη διάταξη.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=91760

Λύση 1 (Νίκος Μαυρογιάννης) Βρίσκω ότι μόνο τα πεπερασμένα επιδέχονται άριστη διάταξη. Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος διαφορετικών στοιχείων a, b το δισύνολο $\{a, b\}$ θα έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο άρα η διάταξη είναι γραμμική. Το Q θα έχει ελάχιστο στοιχείο. Ας το πούμε x. Έστω y το μέγιστο στοιχείο του X. Για κάθε $x \in X - \{y\}$ συμβολίζουμε με x^* το ελάχιστο στοιχείο του $\{t \in X : x \precnapprox t\}$. Το x^* είναι επόμενο του x ως προς την διάταξη μας δηλαδή μεταξύ των x, x^* δεν παρεμβάλλονται άλλα στοιχεία. Ορίζουμε την ακολουθία (x_n) ως εξής $x_1 = x$ και αν $x_n \neq y$ τότε $x_{n+1} = x_n^*$ Η ακολουθία αυτή δε μπορεί να είναι άπειρη διότι τότε το σύνολο των όρων της $\{x_1, ..., x_n, ...\}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Άρα είναι πεπερασμένη που σημαίνει πως για κάποιο n είναι $x_n = y$. Μα τότε $X = \{x_1, ..., x_n\}$ και το Q είναι πεπερασμένο. Με μία άλλη διατύπωση: Μόνο τα πεπερασμένα σύνολα δέχονται καλή διάταξη της οποίας η αντίστροφη είναι επίσης καλή διάταξη.

Λύση 2 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Ας υποθέσουμε πως υπάρχει άριστη διάταξη $\prec$ σε κάποιο άπειρο σύνολο X. Για $x \in X$ ορίζω $I(x) = \{y \in X : y \preccurlyeq x\}$. Έστω A το σύνολο όλων των στοιχείων x του X για τα οποία το $I(x)$ είναι άπειρο. Επειδή το X έχει μέγιστο στοιχείο, αυτό το στοιχείο ανήκει στο A. Επειδή τώρα το A είναι μη κενό, έχει ένα ελάχιστο στοιχείο a. Όμως το $I(a) \setminus \{a\}$ είναι μη κενό άρα έχει ένα μέγιστο στοιχείο, έστω $a^{'}$. Από την μία όμως έχουμε $a^{'} \notin A$, ενώ από την άλλη έχουμε $I(a^{'}) = I(a) \setminus \{a\}$ το οποίο είναι άπειρο. Αυτό όμως είναι άτοπο και άρα δεν μπορούμε να ορίσουμε άριστη διάταξη στο X.

Γεωμετρία (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Θάνος Μάγκος

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Atemlos) Να δείξετε ότι, εάν κάθε επίπεδη τομή ενός τρισδιάστατου στερεού σώματος είναι κύκλος, τότε το στερεό είναι σφαίρα.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=93446

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Έστω S μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια, ώστε κάθε επίπεδο που τέμνει την S σε περισσότερα από ένα σημεία να τέμνει την S κατά κύκλο. Θα αποδείξουμε ότι η S είναι σφαίρα (καλύτερα: σφαιρική επιφάνεια).

Έστω επίπεδο p τέτοιο, ώστε $p \cap S = C$, όπου C είναι κύκλος κέντρου K. Θεωρούμε την ευθεία ℓ, η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο p στο σημείο K.

Θεωρούμε τυχαίο επίπεδο P, το οποίο να περιέχει την ℓ. Το P τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία $A, B \in S$. Από την υπόθεσή μας, το P θα τέμνει την επιφάνεια S κατά κύκλο γ. Το κέντρο O του κύκλου γ ανήκει στη μεσοκάθετο του AB, δηλαδή στην ευθεία ℓ. Αν, λοιπόν, $\ell \cap \gamma = \{M, N\}$, τότε θα είναι και $\ell \cap S = \{M, N\}$.

Συμβολίζουμε με $T(S)$ τη σφαιρική επιφάνεια (με κέντρο O) που παράγεται από τον κύκλο γ κατά την περιστροφή του επιπέδου P ως προς άξονα ℓ. Θα αποδείξουμε ότι $T(S) = S$, οπότε η S είναι σφαιρική επιφάνεια.

Από την κατασκευή είναι προφανές ότι $T(S) \subseteq S$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $Q \in S$ με $Q \notin T(S)$. Αν $Q \in \ell$, τότε θα είχαμε ότι $Q \in \{M, N\}$, οπότε $Q \in T(S)$, άτοπο. Άρα, $Q \notin \ell$, οπότε το σημείο Q και η ευθεία ℓ ορίζουν επίπεδο Ω, το οποίο διέρχεται από το κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας $T(S)$, άρα τέμνει την $T(S)$ κατά κύκλο ω. Αλλά $\omega \subset S$, οπότε η τομή $\Omega \cap S$ περιέχει τον κύκλο ω και το σημείο $Q \notin \omega$, πράγμα άτοπο από την υπόθεσή μας. Ώστε, είναι $T(S) = S$ και το συμπέρασμα έπεται.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Έστω διανύσματα* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$. *Να λυθεί η εξίσωση* $\mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=58082

Λύση (Σεραφείμ Τσιπέλης)

$$\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \overset{\cdot \vec{a}}{\Rightarrow} (\vec{x} \cdot \vec{a}) + (\vec{x} \cdot \vec{a}) \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \Rightarrow$$

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{b}} \Rightarrow \vec{x} = \vec{c} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b}$$

Διερεύνηση

Αν $1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, τότε για $\vec{x} = m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c}$ η αρχική εξίσωση γίνεται $m \cdot \vec{b} + n \cdot \vec{c} + (-m + n \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c})) \cdot \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow$

$n \cdot \vec{c} + n \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{c}$, οπότε:

Αν $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow n = 1$ οπότε $\vec{x} = m \cdot \vec{b} + \vec{c},\ m \in R$

Αν $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ και $\vec{b}, \vec{c}$ όχι συγγραμμικά η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ και $\vec{b}, \vec{c}$ συγγραμμικά η εξίσωση γινεται $k \cdot \vec{b} + \left(k \cdot \vec{b} \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot \vec{b} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$ ορ $\vec{c} = \vec{0}$.

Σύνοψη

$1 + \vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{c} - \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{1 + \vec{a} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b}$

$1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ και $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ τότε $\vec{x} = m \cdot \vec{b} + \vec{c},\ m \in R$

$1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ και $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ τότε αν $\vec{b}, \vec{c}$ όχι συγγραμμικά (συνεπώς ούτε μηδενικά), η εξίσωση είναι αδύνατη.

$1 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ και $\vec{c} = 0$ τότε $\vec{x} = m \cdot \vec{b},\ m \in R$.

Θεωρία Αριθμών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να δείξετε ότι η ακολουθία* $a_n = \sqrt{24n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *έχει ως όρους όλους τους πρώτους αριθμούς εκτός από το* 2 *και το* 3.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=18906

Λύση (Νίκος Κατσίπης) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{p^2-1}{24}$$

είναι φυσικός αριθμός για κάθε πρώτο $p > 3$. Έχουμε ότι

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

Επειδή $p-1, p+1$ δύο διαδοχικοί άρτιοι (αφού $p \neq 2$), έπεται εύκολα ότι

$$8|(p-1)(p+1)$$

Επίσης, οι $p-1, p, p+1$ είναι 3 διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Κάποιος λοιπόν από αυτούς θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Επειδή p πρώτος με $p \neq 3$, κάποιος από τους $p-1, p+1$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3.

Άρα, $3|(p-1)(p+1)$.

Οπότε, αφού

$$\text{μ.κ.δ}(3, 8) = 1$$

έχουμε ότι

$$3 \cdot 8|(p-1)(p+1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Να δείξετε ότι αν η διαφορά των κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι τετράγωνο ακέραιου, τότε ο ακέραιος αυτός είναι άθροισμα τετραγώνων διαδοχικών ακεραίων.*
(για παράδειγμα $8^3 - 7^3 = 512 - 343 = 169 = 13^2$ *και* $13 = 2^2 + 3^2$*)*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=18715

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Έχουμε

$$(x+1)^3 - x^3 = y^2$$

δηλαδή

$$3x^2 + 3x + 1 - y^2 = 0$$

Για να έχει η τελευταία εξίσωση ακέραιες λύσεις θα πρέπει η διακρίνουσά της $\Delta = 12y^2 - 3$ να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Άρα, πρέπει

$$12y^2 - 3 = z^2$$

απ' όπου $3|z$, δηλαδή $z = 3z_1$.

Η εξίσωση τότε γίνεται

$$4y^2 - 1 = 3z_1^2$$

δηλαδή

$$(2y-1)(2y+1) = 3z_1^2$$

Όμως $(2y-1, 2y+1) = 1$, άρα έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις

Α) $2y - 1 = 3y_1^2$ και $2y + 1 = y_2^2$ με $y_1 y_2 = z_1$ απ' όπου αφαιρώντας τις δύο πρώτες παίρνουμε $y_2^2 - 3y_1^2 = 2$, δηλαδή $y_2^2 \equiv 2 \pmod 3$, άτοπο αφού το 2 δεν είναι τετραγωνικό υπόλοιπο $\mod 3$.

Β) $2y - 1 = y_1^2$ και $2y + 1 = 3y_2^2$ με $y_1 y_2 = z_1$ απ' όπου $2y = y_1^2 + 1$, δηλαδή ο y_1 είναι περιττός, έστω $y_1 = 2k+1$. Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$2y = 4k^2 + 4k + 2$$

δηλαδή

$$y = 2k^2 + 2k + 1$$

οπότε

$$\boxed{y = k^2 + (k+1)^2}$$

που είναι αυτό που ζητούσαμε.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να αποδείξετε, ότι*

$$\sin 1^\circ + \sin 3^\circ + \sin 5^\circ + \cdots + \sin 99^\circ = \frac{\sin^2 50^\circ}{\sin 1^\circ}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=95017

Λύση (Χρήστος Κυριαζής) Αρκεί: $\sin 1^\circ \sin 1^\circ + \sin 1^\circ \sin 3^\circ + \sin 1^\circ \sin 5^\circ + ... + \sin 1^\circ \sin 99^\circ = \sin^2 50^\circ$

Αρκεί: $\frac{1}{2}(2\sin 1^\circ \sin 1^\circ + 2\sin 1^\circ \sin 3^\circ + 2\sin 1^\circ \sin 5^\circ + ... + 2\sin 1^\circ \sin 99^\circ) = \sin^2 50^\circ$

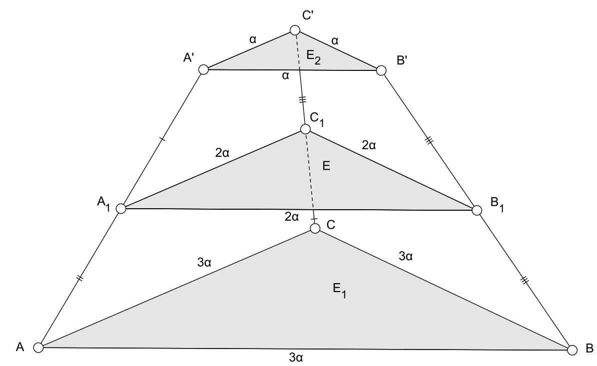
Αρκεί: $\frac{1}{2}(1 - \cos 2^\circ + \cos 2^\circ - \cos 4^\circ + \cos 4^\circ - \cos 5^\circ + ... + \cos 98^\circ - \cos 100^\circ) = \sin^2 50^\circ$

Αρκεί: $\frac{1}{2}(1 - \cos 100^\circ) = \sin^2 50^\circ$ το οποίο αληθεύει.

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Σε κόλουρη τριγωνική πυραμίδα οι πλευρές των βάσεων είναι $3a$, a καθώς και τα αντίστοιχα εμβαδά των βάσεων είναι E_1, E_2. Αν το εμβαδό της μεσαίας τομής είναι E να δείξετε ότι: $E = \frac{2}{9}(E_1 + 9E_2)$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=93378

Λύση (Στάθης Κούτρας) Υποθέτοντας ότι ο Χρήστος εννοεί ότι τα τρίγωνα των βάσεων είναι ισόπλευρα τότε (από τον γνωστό τύπο του εμβαδού βάσης ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς k: $E = \frac{k^2\sqrt{3}}{4}$ θα είναι $E_1 = \frac{(3\alpha)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow E_1 = \frac{9\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ (1) και $E_2 = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ (2)



Για την μεσαία τομή (A_1, B_1, C_1) (η οποία προφανώς θα διέρχεται από τα μέσα των παράπλευρων ακμών της κόλουρης πυραμίδας) και από ένα από τα τραπέζια (έστω το $ABB^{'}A^{'}$) η A_1B_1 θα είναι η διάμεσός του οπότε θα ισχύει: $A_1B_1 = \frac{AB + A^{'}B^{'}}{2} = \frac{3\alpha + \alpha}{2} \Rightarrow A_1B_1 = 2\alpha$

Έτσι η «μεσαία» τομή θα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2α και συνεπώς εμβαδού (βάσει του ίδιου τύπου) $E = \frac{(2\alpha)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow E = \frac{4\alpha^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow E_1 = \alpha^2\sqrt{3}$ (3)

Τελικά

$$\begin{aligned} &\tfrac{2}{9}\left(E_1 + 9E_2\right) \overset{(1),(2)}{=} \\ &\tfrac{2}{9}\left(\tfrac{9\alpha^2\sqrt{3}}{4} + 9\tfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right) = \\ &\tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{18}{4}\alpha^2\sqrt{3} = \\ &\alpha^2\sqrt{3} \overset{(3)}{=} E \end{aligned}$$

Άρα τελικά $E = \frac{2}{9}\left(E_1 + 9E_2\right)$

Επιμελητής: Μιχάλης Λάμπρου

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο pla.pa.s) Ένα λεπτό σημείο στον κανόνα de l' Hospital είναι ότι το όριο $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ πρέπει να υπάρχει. Μπορεί μήπως κάποιος να δώσει ένα αντιπαράδειγμα στο παραπάνω; Δηλαδή ένα παράδειγμα ενός κλάσματος $\frac{f(x)}{g(x)}$*

- *που το όριο του παίρνει απροσδιόριστη μορφή σε κάποιο x_0 (πεπερασμένο ή άπειρο),*
- *το όριο αυτό (δηλαδή το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$) υπάρχει και είναι υπολογίσιμο χωρίς de l' Hospital,*
- *οι f, g είναι παραγωγίσιμες (ή έστω κοντά στο x_0) και*
- *το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει.*

Επίσης, είναι δυνατόν ένα όριο να υπάρχει αλλά να μην είναι υπολογίσιμο;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=89706

Λύση 1 (Νίκος Μαυρογιάννης) Θέτουμε

$$f\left(x\right) = 2x + \sin(x)$$

και

$$g\left(x\right) = 3x + \sin\left(x\right)$$

με $x \to +\infty$.

Για $x \to x_0 = 0$ δουλεύουμε με τις $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $g\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Για το δεύτερο ερώτημα: Ο όρος «υπολογίσιμο» χωράει πολύ συζήτηση γιατί είναι θέμα κριτηρίου τι θεωρούμε υπολογίσιμο και τι όχι. Ας πάρουμε την συνάρτηση

$$f\left(x\right) = 2x^5 - 5x^4 + 5 \;\; x \in [2, +\infty)$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $[-11, +\infty)$. Επομένως έχει ακριβώς μία ρίζα και είναι αντιστρέψιμη. Ας ονομάσουμε g την αντίστροφη της η οποία είναι συνεχής. Το όριο $\lim\limits_{u\to 0} g\left(u\right)$ υπάρχει και είναι η μοναδική ρίζα της f. Όμως οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου (τρεις το πλήθος) όπως αποδεικνύεται με μεθόδους της Άλγεβρας δεν μπορούν να εκφρασθούν με τις τέσσερις πράξεις και ριζικά. Με αυτή την ειδική έννοια υπολογισιμότητας το $\lim\limits_{u\to 0} g\left(u\right)$ υπάρχει μεν αλλά δεν είναι υπολογίσιμο.

Λύση 2 (Μιχάλης Λάμπρου) Το στάνταρ παράδειγμα είναι το όριο στο άπειρο της $\dfrac{x+\sin x}{x}$ που υπάρχει (=1). Η εφαρμογή όμως του l' Hospitalμας οδηγεί στο $\dfrac{(x+\sin x)'}{x'} = \dfrac{1+\cos x}{1}$ που δεν υπάρχει.

Λύση 3 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Άλλο ένα παράδειγμα για το δεύτερο ερώτημα: Ορίζω $f(n) = 1$ αν ο n και ο $n+2$ είναι πρώτοι , αλλιώς $f(n) = 0$. Ορίζω $g(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$. Δηλαδή το $g(n)$ είναι ο αριθμός των ζευγαριών πρώτων της μορφής $(k, k+2)$ με $k \leqslant n$. Τέλος ορίζω $h(n) = \dfrac{1}{1+g(n)}$. Το 1 στον παρονομαστή υπάρχει απλώς για να μην κάνω διαίρεση με το 0.

Το $h(n)$ προφανώς συγκλίνει. Είτε στο 0 αν έχουμε άπειρα ζεύγη δίδυμων πρώτων, είτε στο $\dfrac{1}{k+1}$ αν έχουμε ακριβώς k ζεύγη δίδυμων πρώτων.

Η εικασία είναι ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη δίδυμων πρώτων δηλαδή ότι το $h(n)$ συγκλίνει στο 0. Δυστυχώς όμως προς το παρόν είναι μόνο εικασία.

Ακόμη χειρότερα: Ίσως ο λόγος που δεν έχει αποδειχθεί η πιο πάνω εικασία να είναι ότι εμπίπτει στο θεώρημα μη πληρότητας του Goedel. Δηλαδή με τα υπάρχοντα αξιώματα που χρησιμοποιούμε ίσως να μην μπορούμε να αποδείξουμε αν το όριο ισούται με 0 ή όχι.

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο επί του $\mathbb{R}$ συναρτήσεων;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=94877

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Έστω $g_1 : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $g_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο επί του $\mathbb{R}$ συναρτήσεις $(*)$. Τέτοιες υπάρχουν πολλές (οι πληθάριθμοι είναι ίδιοι). Π.χ. $g_1(x) = \ln(-x)$ και ανάλογα για την g_2.

Θέτουμε

$$F(x) = \begin{cases} g_1(x) & , \;\; x < 0 \\ f(x) - g_2(x) & , \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} f(x) - g_1(x) & , \;\; x < 0 \\ g_2(x) & , \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $f = F + G$ και ότι οι F, G είναι επί (λόγω των $(*)$).

Επιμελητής: Γιώργος Μπαλόγλου

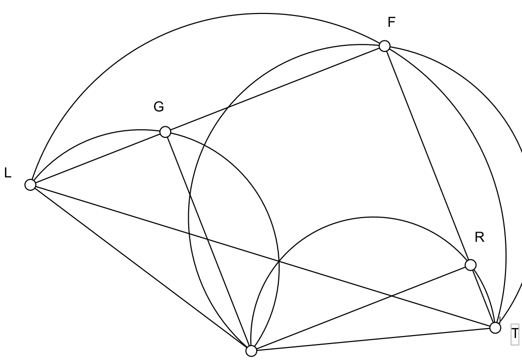
ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) [Σ. Κανέλλου, «Γεωμετρικές Κατασκευές», «Ευκλείδειος Γεωμετρία Ι» (Α΄ Λυκείου, 1976)] Να κατασκευαστεί τετράγωνον του οποίου γνωρίζομεν δύο σημεία P και K κείμενα επί των φορέων των δύο διαγωνίων του και δύο σημεία E και Z κείμενα επί των φορέων των δύο απέναντι πλευρών του.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=94010

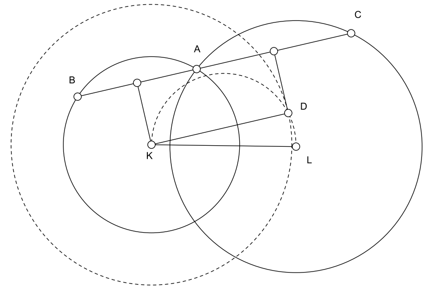
Λύση 1 (Σωτήρης Λουρίδας) Ας δούμε την επίλυση του καταπληκτικού προβλήματος που αναφέρεται στην κατασκευή τετραγώνου ξεκινώντας από την κατασκευή-λήμμα που ακολουθεί:

Δίνονται στο επίπεδο τρία σημεία, όχι κατ' ανάγκη της ίδιας ευθείας, L, C, T. Θεωρούμε τους κύκλους με διαμέτρους τα LC, CT. Ζητάμε την κατασκευή δύο σημείων G, R αντίστοιχα πάνω στους κύκλους που κατασκευάσαμε ώστε: $GC = CR$, $\angle GCR = \frac{\pi}{2}$.

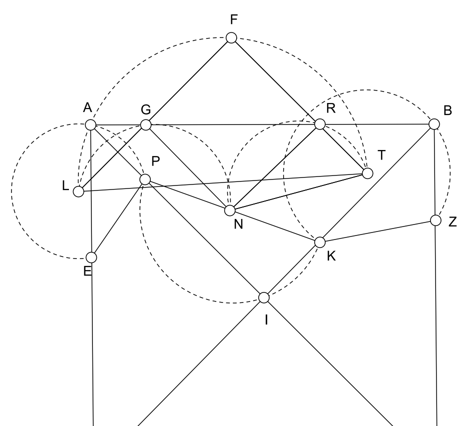
Διαπραγμάτευση: Αρκεί να κατασκευάσουμε το σημείο τομής F των LG, TR που είναι με την σειρά του η τομή του ημικυκλίου με διάμετρο LT και του τόξου, τα σημεία του οποίου βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα CT υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$, καθότι το τετράπλευρο $GCRF$ είναι τετράγωνο.



Στην συνέχεια θα υπενθυμίσουμε την κλασική κατασκευή: Δίνονται δύο κύκλοι κέντρων K, L που τέμνονται στα σημεία A, A'. Να κατασκευαστούν δύο σημεία B, C που να ανήκουν στους κύκλους K, L αντίστοιχα ,ώστε το A να ανήκει στην ευθεία BC και $BC = 2h$, με το h να είναι δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Αυτή η κατασκευή, ως γνωστόν, είναι ισοδύναμη με την κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου KLD με $KD = h$.



Στο σχήμα που ακολουθεί κατανοούμε ότι η κορυφή A κινείται στο σταθερό τόξο κέντρου L τα σημεία του οποίου βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα EP υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$, η κορυφή B κινείται στο σταθερό τόξο κέντρου T τα σημεία του οποίου βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα KZ υπό γωνία $\frac{\pi}{4}$, το κέντρο του τετραγώνου I κινείται σε ημικύκλιο διαμέτρου PK κέντρου N. Οπότε αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $(IA = IB,\ IA \perp IB)$ ή $(NG = NR,\ NG \perp NR)$, που είναι ο συνδυασμός των ήδη αναφερθέντων. [Ο κύκλος (PIK) στοχεύει στήν $\angle PIK = \frac{\pi}{2}$ και στην $IB = 2NR = 2NG = IA$.]



Λύση 2 (Γιώργος Μπαλόγλου) Κατασκευάζουμε κύκλους κέντρων L, T, κάθε σημείο των οποίων βλέπει τα EP, ZK υπό γωνία 45^0, αντίστοιχα*. Τα A, B προσδιορίζονται ως τομές των δύο κύκλων με την ευθεία $E'Z'$, όπου E', Z' τα συμμετρικά των E, Z ως προς τα κέντρα L, T, αντίστοιχα. (Και τα C, D, προσδιορίζονται πλέον ως

τομές των BZ, AP και AE, BK, αντίστοιχα: προφανώς οι γωνίες $ABC = Z'BZ$ και $BAD = E'AE$ είναι ορθές, οι γωνίες $ZBK = CBD$ και $EAP = DAC$ ισούνται προς 45^0, κλπ)

*βεβαίως η ακριβής τοποθεσία των κέντρων επηρεάζει την λύση του προβλήματος, καθώς υπάρχουν $2 \times 2 = 4$ περιπτώσεις, σε κάποιες από τις οποίες έχουμε να κάνουμε με επεκτάσεις πλευρών ή διαγωνίων, κλπ κλπ

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Γιώργος Μπαλόγλου) Να βρεθεί γεωμετρικά το κέντρο βάρους τυχόντος τραπεζίου.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=94331

Λύση 1 (Γιώργος Μπαλόγλου) Βρίσκουμε τα βαρύκεντρα P, Q, R, S των τριγώνων ABD, BCD, ABC, ACD και ορίζουμε το βαρύκεντρο G του $ABCD$ (όπου $AD//BC$) ως την τομή των PQ, RS.

Σχόλιο: το G οφείλει να ικανοποιεί τις σχέσεις $\frac{|GP|}{|GQ|} = \frac{(ABD)}{(BCD)} = \frac{|AD|}{|BC|}$ και $\frac{|GR|}{|GS|} = \frac{(ABC)}{(ACD)} = \frac{|BC|}{|AD|}$, όμως η προτεινόμενη κατασκευή εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε τετράπλευρο.

Εφαρμογή με $A = (1, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 4)$, $D = (1, 1)$:

P: $\frac{2}{3}(\frac{5}{2},\ 0) + \frac{1}{3}(1,\ 1) = (2,\ \frac{1}{3})$
Q: $\frac{2}{3}(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}) + \frac{1}{3}(4,\ 0) = (3,\ \frac{5}{3})$
R: $\frac{2}{3}(\frac{5}{2},\ 0) + \frac{1}{3}(4,\ 4) = (3,\ \frac{4}{3})$
S: $\frac{2}{3}(1,\ \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}(4,\ 4) = (2,\ \frac{5}{3})$
PQ: $y = \frac{4x}{3} - \frac{7}{3}$
RS: $y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{3}$
G: $(\frac{14}{5},\ \frac{7}{5})$

Λύση 2 (parmenides51) [Αρχιμήδης, Επιπέδων Ισορροπιών Α΄ 15]

Αν ένα επίπεδο σχήμα χωριστεί σε 2 άλλα σχήματα τότε το βαρύκεντρο του μεγάλου σχήματος βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα βαρύκεντρα των άλλων 2 σχημάτων. (1) Έστω $ABCD$ το τραπέζιο με $AD//BC$ (AD η μικρή βάση) με μέσα βάσεων M, N αντίστοιχα, E το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών του BA, CD. Τα βαρύκεντρα των τριγώνων AED, ABC βρίσκονται πάνω στην ευθεία MN διότι οι EM, MN είναι διάμεσοι των αντίστοιχων τριγώνων. Άρα λόγω της (1) το βαρύκεντρο του τραπεζίου θα βρίσκεται πάνω στην MN. (2) Φέρνω την διαγώνιο BD και τις παράλληλες προς τις βάσεις του τραπεζίου ευθείες $(z), (w)$ με την (z) πλησιέστερα στην AD ώστε να τριχοτομείται η διαγώνιος DB. Τα βαρύκεντρα P, Q των τριγώνων ABD, BCD αντίστοιχα είναι τα σημεία τομής των $(z), BM$ και $(w), DN$ αντίστοιχα. Άρα λόγω της (1) το βαρύκεντρο του τραπεζίου θα βρίσκεται πάνω στην PQ. (3) Από (2), (3) προκύπτει πως το βαρύκεντρο G του τραπεζίου $ABCD$ είναι το σημείο τομής των PQ, MN.

Ο Αρχιμήδης αποδεικνύει - μέσω της $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{KG}{GL}$ – πως το παραπάνω σημείο ικανοποιεί την ισότητα $\dfrac{MG}{GN} = \dfrac{2BC + AD}{2AD + BC}$ (*) δηλαδή $\dfrac{MG}{GN} = \lambda$,όπου $\lambda = \dfrac{2\mathbb{B} + \beta}{2\beta + \mathbb{B}} > 0$ με $\beta, \mathbb{B}$ την μικρή και μεγάλη βάση του τραπεζίου αντίστοιχα.

Αναλυτικά το βαρύκεντρο του τραπεζίου με βάσεις $\beta, \mathbb{B}$ μικρή, μεγάλη αντίστοιχα κι αντίστοιχα μέσα βάσεων M, N θα υπολογίζεται ως το σημείο G για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{MG} = \lambda\overrightarrow{GN} \Leftrightarrow \overrightarrow{NG} = \dfrac{1}{\lambda + 1}\overrightarrow{NM}$ όπου $\lambda = \dfrac{2\mathbb{B} + \beta}{2\beta + \mathbb{B}}$.

Εφαρμογή για $A = (1, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 4)$, $D = (1, 1)$:

τα M, N μέσα των βάσεων AD, BC είναι $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, $(4, 2)$ αντίστοιχα. η βάση μεγάλη $\mathbb{B} = BC = 4$, η βάση μικρή $\beta = AD = 1$ και ο λόγος $\lambda = \dfrac{2\mathbb{B} + \beta}{2\beta + \mathbb{B}} = \dfrac{2 \cdot 4 + 1}{2 \cdot 1 + 4} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$. Άρα

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NG} &= \frac{1}{\lambda + 1}\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \\
(x - 4, y - 2) &= \frac{1}{\frac{3}{2} + 1}\left(1 - 4, \frac{1}{2} - 2\right) \Leftrightarrow \\
(x - 4, y - 2) &= \frac{2}{5}\left(-3, -\frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \\
(x, y) &= \left(4 - \frac{6}{5}, 2 - \frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow \\
(x, y) &= \left(\frac{14}{5}, \frac{7}{5}\right)
\end{aligned}$$

Λύση 3 (parmenides51) Λήμμα 1: Αν ένα επίπεδο σχήμα χωριστεί σε δυο άλλα σχήματα τότε το βαρύκεντρο του μεγάλου σχήματος βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει τα βαρύκεντρα των άλλων δυο σχημάτων.

Λήμμα 2: Ένας ζυγός ισορροπεί όταν το άθροισμα των γινομένων των βαρών (εμβαδών στο επίπεδο) σωμάτων επί των αποστάσεων του κέντρου βάρους αυτών από το σημείο εφαρμογής του ζυγού είναι ίδιο και στις δυο πλευρές του ζυγού.

Έστω $ABCD$ το τραπέζιο με $AD//BC$ (AD η μικρή βάση) , E το σημείο τομής των BA, CD και V, G, W τα κέντρα βάρους των πολυγώνων $EAD, ABCD, EBC$. Είναι προσδιορίσιμα άμεσα τα V, W ως βαρύκεντρα τριγώνων καθώς και τα εμβαδά των παραπάνω σχημάτων (το τετράπλευρο το χωρίζουμε σε δυο τρίγωνα πρώτα). Τα σημεία E, V, G, W είναι συνευθειακά λόγω του λήμματος (1) κι επειδή οι διάμεσοι των τριγώνων EAD, EBC τέμνονται στο E. Θεωρούμε ζυγό στο σημείο E και σχηματίζουμε το υποθετικό επίπεδο σχήμα (άγνωστου σχήματος αλλά) ισεμβαδικό με το τρίγωνο EBC με κέντρο βάρους T σε απόσταση $ET = EW$ πάνω στην προέκταση της ευθείας VE. Ο ζυγός θα ισορροπεί λόγω του λήμματος (2) άρα $(EAD)(EV)+(ABCD)(EG)=(EBC)(ET)$ $\Leftrightarrow (EAD)(EV)+(ABCD)(EG)=(EBC)(EW)$. Από την παραπάνω ισότητα προσδιορίζεται η απόσταση EG κι επειδή $EG//EV$, προσδιορίζεται πλήρως το σημείο G, το βαρύκεντρο του τραπεζίου $ABCD$.

Εφαρμογή για $A=(1,0)$, $B=(4,0)$, $C=(4,4)$, $D=(1,1)$:

$\begin{cases} A=(1,0) \\ B=(4,0) \end{cases} \Rightarrow AB : y = 0, \begin{cases} C=(4,4) \\ D=(1,1) \end{cases} \Rightarrow$ $CD: y=x$, $\begin{cases} AB: y=0, \\ CD: y=x \end{cases} \Rightarrow E(0,0)$

Το τρίγωνο EAD έχει βαρύκεντρο

$$V\left(\frac{0+1+1}{3},\frac{0+1+0}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$(EV)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

κι εμβαδόν

$(EAD)=\dfrac{(EA)(AD)}{2}=\dfrac{1}{2}$ διότι $EA\perp AD$.

Το τρίγωνο EBC έχει βαρύκεντρο

$$W\left(\frac{0+4+4}{3},\frac{0+4+0}{3}\right)=\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right),$$

$$(EW)=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$$

κι εμβαδόν

$(EBC)=\dfrac{(EB)(BC)}{2}=\dfrac{16}{2}=8$ διότι $EB\perp BC$.

Το τραπέζιο $ABCD$ έχει βαρύκεντρο G κι εμβαδόν

$$(ABCD)=\frac{(AD+BC)(AB)}{2}=\frac{15}{2}$$

διότι $EB\perp BC$ (είναι ορθογώνιο τραπέζιο).

Άρα αντικαθιστώντας στην σχέση $(EAD)(EV)+(ABCD)(EG)=(ECD)(EW)$ προκύπτει πως $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{15}{2}(EG)=8\dfrac{4\sqrt{5}}{3}\Leftrightarrow (EG)=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

$\begin{cases} E=(0,0) \\ V=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow EV : x = 2y$ κι επειδή E,V,G συνευθειακά τότε $G(x,y)=(2y,y) \Rightarrow (EG)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2y)^2+y^2}=|y|\sqrt{5}$ άρα $(EG)=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}=|y|\sqrt{5}\Rightarrow y=\pm\dfrac{7}{5}$ κι επειδή $y>0$ τότε $G(x,y)=\left(\dfrac{14}{5},\dfrac{7}{5}\right)$

Παρόμοιες ιδέες (υπολογισμός όγκου και βαρύκεντρου δισδιάστατων και τρισδιάστατων κυρίως σχημάτων χρησιμοποιώντας μηχανική) είχε εφαρμόσει ο Αρχιμήδης στο έργο του «Περί μηχανικών θεωρημάτων προς Ερατοσθένη έφοδος».

Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 63 *(Προτείνει ο Νικος Αντωνόπουλος) Έστω $P(x)$ πολυώνυμο του οποίου οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Αν ισχύουν $P(1) = 6$ και $P(7) = 3438$, να υπολογίσετε την τιμή του πολυωνύμου για $x = 3$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=15830

Λύση 1 (Γιώργος Απόκης) Το πολυώνυμο θα είναι το πολύ 4ου βαθμού αφού $7^4 < 3438 < 7^5$. Αν

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

με a, b, c, d, e φυσικούς, έχω

$$P(1) = 6 \Leftrightarrow a + b + c + d + e = 6$$

Αν πάρουμε τις πεντάδες φυσικών που ικανοποιούν την τελευταία, η μόνη που ικανοποιεί και την $P(7) = 3438$ είναι: $a = 1, b = 3, c = 0, d = 1, e = 1$, άρα $P(x) = x^4 + 3x^3 + x + 1$ και $P(3) = 166$.

Λύση 2 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Όταν μια πολυωνυμική συνάρτηση έχει μη αρνητικούς συντελεστές τότε είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $[0, +\infty)$ ή είναι σταθερή. Υπάρχει πολυώνυμο $A(x)$ του οποίου οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί ακέραιοι ώστε

$$P(x) = xA(x) + P(0)$$

Είναι

$$P(7) = 7A(7) + P(0) \ \ (1)$$

Ακόμα

$$P(1) = A(1) + P(0) \ \ (2)$$

Επίσης ο $P(0)$ είναι μη αρνητικός ακέραιος μικρότερος του $P(1)$, δηλαδή μικρότερος του 7. Άρα η (1) είναι η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(7) : 7$. Το $A(7)$ είναι το πηλίκο και το $P(0)$ το υπόλοιπο. Επομένως $A(7) = 491$ και $P(0) = 1$ οπότε από τη (2) προκύπτει $A(1) = 5$.

Υπάρχει πολυώνυμο $B(x)$ του οποίου οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί ακέραιοι ώστε $A(x) = xB(x) + A(0)$. Είναι

$$A(7) = 7B(7) + A(0) \ \ (3)$$

Ακόμα

$$A(1) = B(1) + A(0) \ \ (4)$$

Επίσης ο $A(0)$ είναι μη αρνητικός ακέραιος μικρότερος του $A(1)$, δηλαδή μικρότερος του 7. Άρα η (3) είναι η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $A(7) : 7$. Το $B(7)$ είναι το πηλίκο και το $A(0)$ το υπόλοιπο. Επομένως $B(7) = 70$ και $A(0) = 1$ οπότε από τη (4) προκύπτει $B(1) = 4$.

Επαναλαμβάνουμε άλλη μια φορά τη διαδικασία αυτή: Υπάρχει πολυώνυμο $C(x)$ του οποίου οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί ακέραιοι ώστε

$$B(x) = xC(x) + B(0)$$

Είναι

$$B(7) = 7C(7) + B(0) \ \ (5)$$

Ακόμα

$$B(1) = C(1) + B(0) \ \ (6)$$

Επίσης ο $B(0)$ είναι μη αρνητικός ακέραιος μικρότερος του $B(1)$,δηλαδή μικρότερος του 7. Άρα η (5) είναι η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $B(7) : 7$. Το $C(7)$ είναι το πηλίκο και το $B(0)$ το υπόλοιπο. Επομένως $C(7) = 10$ και $B(0) = 0$ οπότε από τη (6) προκύπτει $C(1) = 4$. Άρα το $C(x)$είναι μη σταθερό οπότε

$$4 = C(1) < C(2) < C(3) < C(4) < C(5) < C(6) < C(7) = 10$$

και όλοι αυτοί είναι ακέραιοι, άρα $C(3) = 6$. Τελικώς

$$B(3) = 3C(3) + B(0) = 18$$

$$A(3) = 3B(3) + A(0) = 55$$

$$P(3) = 3A(3) + P(0) = 166$$

ΑΣΚΗΣΗ 64 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Έστωσαν τα πολυώνυμα*

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

και

$$Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

με συντελεστές από το $\mathbb{C}$.

Οι ρίζες του P είναι οι $x_1, x_2, ..., x_n$, ενώ του Q είναι οι $x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2$. Αν $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots \in \mathbb{R}$ και $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε, ότι $b_1 + b_2 + \cdots b_n \in \mathbb{R}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=18478

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Είναι:

$$P\left(x\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right)$$

και

$$Q\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-{x_i}^2\right)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι:

$$P\left(1\right)=a_1+a_2+\cdots+a_n\in\mathbb{R}$$

και

$$P\left(-1\right)=a_1-a_2+\cdots+(-1)^n a_n\in\mathbb{R}.$$

Άρα, θα είναι:

$$P\left(1\right)=\overline{P\left(1\right)}$$

και

$$P\left(-1\right)=\overline{P\left(-1\right)},$$

δηλαδή

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\bar{x}_i\right)$$

και

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\bar{x}_i\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη, βρίσκουμε ότι

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i^2\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\bar{x}_i^2\right),$$

δηλαδή

$$Q\left(1\right)=\overline{Q\left(1\right)}$$

ή ισοδύναμα

$$b_1+b_2+\cdots+b_n\in\mathbb{R}$$