

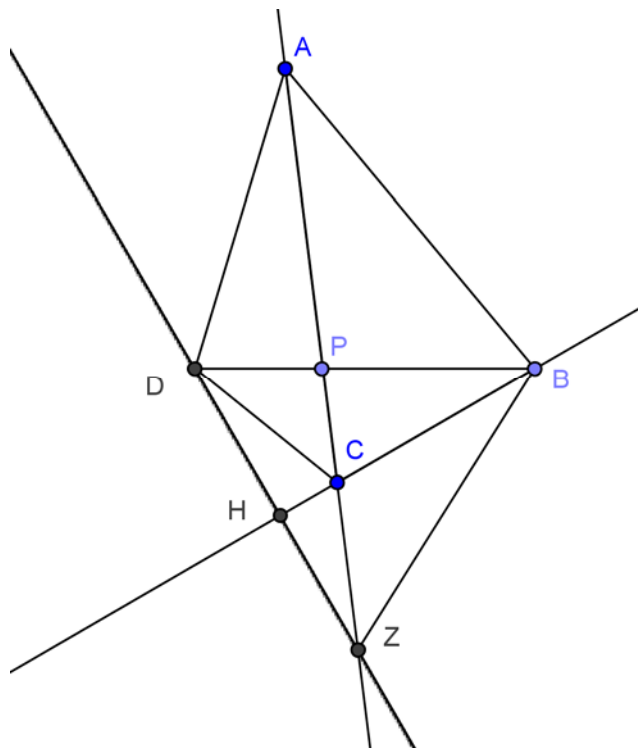
ΑΠΟ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ

Το ABCD είναι ένα κυρτό τετράπλευρο με $\angle BAC=30^\circ$, $\angle CAD=20^\circ$, $\angle ABD=50^\circ$, και $\angle DBC=30^\circ$. Αν οι διαγώνιές του τέμνονται στο P, να δειχτεί ότι: $PC=PD$.

(4ο Θέμα, 15ης Βραζιλιάνικης Μαθηματικής Ολυμπιάδας, 1993 - περιοδικό "Το φ", τεύχος 3, Νοέμβριος 2006, σελ. 180)

Λεωνίδας Θαρραλίδης

ΛΥΣΗ



Τα τρίγωνα ADP , ADB είναι ισοσκελή με $AD=DB=AP$.

Επίσης είναι η γωνία $\angle ACB=70^\circ$ και η $\angle ADB=80^\circ$.

Το τμήμα DC δεν είναι κάθετο στην CB , γιατί αν ήταν $DC \perp CB$ τότε η $\angle DCA=20^\circ = \angle DAP$ και $AD=DB=2DC$ από το ορθογώνιο DCB.

Φέρνω $DH \perp CB$ η οποία τέμνει την AC στο Z . Άρα η

γωνία $\angle HDB=60^\circ$ και $\angle ADZ=140^\circ$, άρα και η $\angle DZA=20^\circ$, δηλαδή το τρίγωνο ADZ ισοσκελές με $AD=DZ=DB$. Στο τρίγωνο DHB είναι $DB=2DH$, άρα το H είναι μέσο του DZ. Οπότε είναι και $DC=CZ$, άρα το τρίγωνο DCZ ισοσκελές , άρα η $\angle CDZ=\angle DZA=20^\circ$, δηλ. η $\angle PDC=\angle DCP=40^\circ$, άρα το τρίγωνο DCP είναι ισοσκελές , δηλ. $PD=PC$.

Αθ. Μπεληγιάννης -- Ιούνιος 2009