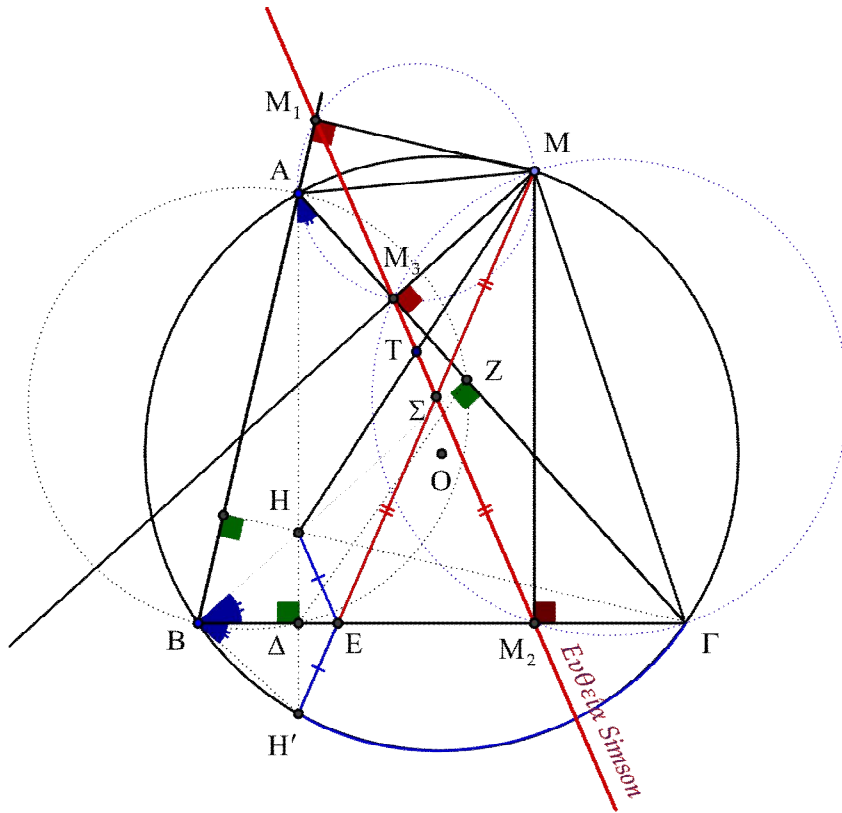


ΑΦΙΕΡΩΜΕΝΟ ΣΤΟΝ ΚΑΤΑΠΛΗΚΤΙΚΑ ΑΝΕΡΧΟΜΕΝΟ ΓΡΗΓΟΡΗ

Η ευθεία Simson του σημείου M διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα MH όπου H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.



Απόδειξη

Έστω H' το σημείο στο οποίο το ύψος AD του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλο. Θα δείξω ότι τα σημεία H και H' είναι συμμετρικά ως προς την $B\Gamma$. Πράγματι έχουμε:

$$\widehat{H'BG} \stackrel{\text{εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο}}{=} \widehat{H'AG} \\ \text{από το εγγράψιμο τετράπλευρο ABΔZ} \\ \text{(οι κορυφές του Δ και Z βλέπουν την} \\ \text{πλευρά του AB υπό ίσες (ορθές γωνίες))} \\ = \widehat{ABH}$$

Άρα στο τρίγωνο BHH' το BD είναι ύψος και διχοτόμος άρα θα είναι και μεσοκάθετος δηλαδή τα σημεία H και H' είναι συμμετρικά ως προς την $B\Gamma$ οπότε η $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος HH' . Αν E είναι το σημείο τομής της MH' με την $B\Gamma$ και T το σημείο τομής της MH με την

ευθεία του Simson τότε θα έχουμε: το τρίγωνο HEH' είναι ισοσκελές (αφού το E ανήκει στη μεσοκάθετη του HH' και συνεπώς $\widehat{EHH'} = \widehat{EH'H} = \hat{\phi}$): (1). Αλλά

$$\widehat{EH'H} \stackrel{\text{εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο } \widehat{AM}}{=} \widehat{MGA} \stackrel{\text{από το εγγράψιμο τετράπλευρο } M\Gamma M_2 M_3 \\ \text{(οι δύο κορυφές του } M_2, M_3 \text{ βλέπουν την πλευρά} \\ \text{του } M\Gamma \text{ υπό ίσες (ορθές γωνίες))}}{=} \widehat{MM_2 M_3} \Rightarrow \widehat{EH'H} = \widehat{MM_2 M_3} = \hat{\phi} : (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε $\widehat{EHH'} = \widehat{MM_2 M_3} = \hat{\phi}$: (3) Επίσης ισχύει:

$$\widehat{EHH'} \stackrel{\text{εντός εναλλάξ στις παράλληλες } AH' \text{ και } MM_2 \\ \text{(κάθετες στην ίδια ευθεία } B\Gamma)}{=} \widehat{M_2 ME} = \hat{\phi} : (4) . \text{ Από τις παραπάνω σχέσεις γίνεται}$$

φανερό ότι και το τρίγωνο $M_2 \Sigma M$ είναι ισοσκελές και όμοιο του ισοσκελούς HEH' κατά συνέπεια ισχύει $\widehat{E\Sigma M_2} = \widehat{\Sigma EH} = 2\hat{\phi}$ και επειδή οι γωνίες αυτές κατέχουν θέση εντός εναλλάξ στις ευθείες HE και ΣT θα ισχύει: $\overline{HE // \Sigma T}$: (5). Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο $MM_2 E$ επειδή $M_2 \Sigma M$ είναι ισοσκελές εύκολα (γωνιακά) αποδεικνύεται ότι και το τρίγωνο $M_2 \Sigma E$ είναι ισοσκελές με αποτέλεσμα τελικά το Σ να είναι το μέσο της ME .

Τέλος από το τρίγωνο MHE ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ το μέσο της } ME \\ \Sigma T // HE \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{T \text{ το μέσο της } MH}$$