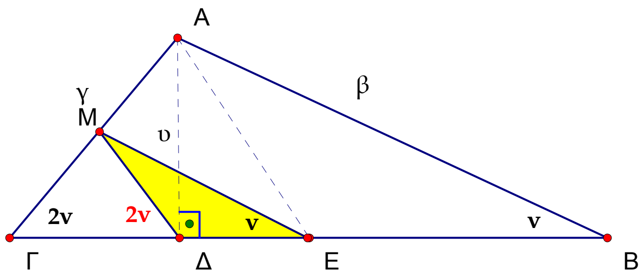
Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α,β,γ και $\widehat{B}=2\widehat{\Gamma}$

Να αποδείξετε ότι: $\beta^2=\gamma\cdot(\gamma+\alpha)$



Λύση

Θεωρώ το ύψος ΑΕ και τη διάμεσο ΑΖ και έστω Μ το μέσον της ΑΒ τότε η αποδεικτέα ισοδυναμεί με την $\beta^2-\gamma^2=\gamma\alpha$ που ισοδυναμεί λόγω του 2^{ου} θεωρήματος διαμέσων με την 2·α· ΕΖ= γα ή 2·ΕΖ=γ ή 2·ΕΖ=2·ΕΜ ή ΕΖ= ΕΜ που ισχύει διότι τριγ ΜΕΖ ισοσκελές.

Πράγματι ΜΕΖ ισοσκελές διότι ΜΖ//ΑΓ (ΜΖ συνδέει μέσα) συνεπώς ΜΖΕ=Γ=ν (1) (εντός -εκτός -αυτά...) ενώ ΒΕΜ επίσης ισοσκελές με συνέπεια ΒΕΜ=Β=2ν.
Είναι όμως ΒΕΜ=ΕΜΖ+ΕΖΓ --- >2ν= ΕΜΖ+ν --- >ΕΜΖ=ν (2)
Από (1) και (2) έπεται το ζητούμενο δηλ. τριγ ΜΕΖ ισοσκελές.

Γιαννόπουλος Παν.

Ή χωρίς 2^{ο} διαμέσων για να το κατεβάσουμε στο γυμνάσιο

$\beta^2=\upsilon^2+\Delta B^2= \upsilon^2+\Gamma\Delta^2-\Gamma\Delta^2+\Delta B^2=\gamma^2+\Delta B^2-\Gamma\Delta^2= \gamma^2+(\Delta B-\Gamma\Delta)(\Delta B+\Gamma\Delta)= \gamma^2+(\Delta B-\Gamma\Delta)\ \alpha=$
$\gamma^2+(\Delta E+EB-\Gamma\Delta)\ \alpha= \gamma^2+(\Delta E+E\Gamma-\Gamma\Delta)\ \alpha= \gamma^2+2\ \Delta E\ \alpha\ =_{(\text{ΜΔΕ ισοσκ})}= \gamma^2+2\ M\Delta\ \alpha= \gamma^2+2\,\frac{\gamma}{2}\ \alpha= \gamma^2+\gamma\alpha$