

Επαναληπτικές ασκήσεις ΕΠΑΛ

www.mathematica.gr

Σχ. Έτος 2011-12

Άσκηση 0.1 Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{3} - \frac{3}{x} + x^2 e^x \eta \mu x - x^3 \ln x - 2012 \\g(x) &= (4x^2 + 3x - 2)(2x^2 - 5x + 2) - e^4 \\h(x) &= \frac{x^2 + 3x}{5x^2 - 20} - x \ln 5 \\k(x) &= \frac{x^2 - 3x}{e^x} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

Άσκηση 0.2 Να εξετάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
∴

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - \sqrt{2} \\g(x) &= x^2 e^x - \ln 3 \\h(x) &= \frac{\ln x}{x} \\s(x) &= e^x - x\end{aligned}$$

Άσκηση 0.3 Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3, x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρεθούν f' και f''

β. Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+2}-2}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

γ. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f

Άσκηση 0.4 Δίνεται η συνάρτηση.

$$f(x) = -2x^3 + \alpha x^2 + 12x + 1, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

α. Αν $f'(-2) = f'(1)$, να δείξετε ότι $\alpha = -3$

Για $\alpha = -3$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τοπικά ακρότατα.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f'(x)}{6}, & x \geq 1 \\ \kappa x + \lambda, & x < 1 \end{cases}$

γ. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 1$

Άσκηση 0.5 Δίνεται η συνάρτηση .

$$f(x) = \alpha \ln x - x^2 \text{ με } f'(4) = -6$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

γ. Για $\alpha = 8$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Για $\alpha = 8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(1) + f(e)$

Άσκηση 0.6 Δίνεται η συνάρτηση.

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 3\beta x + 2, x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$ και παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x = 3$

β. Για $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Για $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = f(0) + 2f(2) - f(3)$

δ. Για $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$

Άσκηση 0.7 Δίνεται η συνάρτηση .

$f(x) = \alpha e^x - \beta x + 5, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση διέρχεται της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 7)$ και $f'(0) = 1$

α. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) - f'(x) = 1$

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

δ. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\kappa^2 f''(x) - 3\kappa f'(x) + 2f''(x) = 3\kappa$

Άσκηση 0.8 Να υπολογίσετε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) - \log 2012 \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \eta \mu^3 x - \ln x^4 \text{ με } x > 0$$

$$h(x) = \sqrt{2e^x + 3x} \text{ με } x \geq 0$$

$$k(x) = x^2 e^{-x} - e^{3x^2 - 5x + 1} \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

$$l(x) = (2e^x + 1)^{1006} - 5^e \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

$$m(x) = e^{\sqrt{x}} \sigma \nu 3x + \sqrt[3]{2} \text{ με } x > 0$$

Άσκηση 0.9 Δίνεται η συνάρτηση .

$f(x) = \alpha \eta \mu^2 x + \beta \sigma \nu \nu^2 x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{2})$ και $f'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$, τότε:

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{\pi}{2})$

γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f'(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4}) - f'(\frac{\pi}{3})$

Άσκηση 0.10 Δίνεται η συνάρτηση .

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Αν $\alpha > \beta > e$ να δείξετε ότι $\alpha^\beta < \beta^\alpha$

δ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2^{\sqrt{3}}$ και 3

Άσκηση 0.11 Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση .

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + e^3 \text{ όταν:}$$

i. $x \in \mathbb{R}$

ii. $x \in \mathbb{R}^*$

iii. $x \geq 0$

iv. $x \geq 2$ v. $x < 6$ vi. $-1 \leq x \leq 6$ vii. $-4 < x < 5$

Άσκηση 0.12 Δίνεται η συνάρτηση .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με παράγωγο } f'(x) = -e^{\eta\mu x} .$$

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(2x+3) < f(3x+2)$

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x^2+2x) \leq f(3x-1)$

iv. Να αποδείξετε ότι $f''(x) - \sigma\upsilon\nu x f'(x) = 0$

Άσκηση 0.13 Δίνεται η συνάρτηση .

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$

ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{\ln 3}{3} \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$ όταν $x \in [e, 3]$

iii. Να αποδείξετε ότι $x^2 f'(x) + x f(x) = 1$ όταν $x > 0$

Άσκηση 0.14 Έστω η συνάρτηση .

$$f(x) = e^x + 3x$$

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

ii. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-5)$ και $f(2)$

iii. Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2} + 3x^2 < e^x + 3x$

iv. Να αποδείξετε ότι $e^{3000} + 9000 < e^{4000} + 12000$

v. Να λυθεί η ανίσωση $e^x + 3x \leq e + 3$

Άσκηση 0.15 Η συνάρτηση .

$f(x) = x \ln x - \alpha x$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο για $x = 1$.

- Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$
- Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$
- Να αποδείξετε ότι $x \ln x - x \geq -1$ όταν $x > 0$
- Να αποδείξετε ότι $2010 \ln 2010 - 2010 < 2011 \ln 2011 - 2011$

Άσκηση 0.16 Θεωρούμε την συνάρτηση .

$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2011$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

- Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 2011$ όταν $x \in (-\infty, 1]$
- Να αποδείξετε ότι $f(2008) < f(2009)$
- Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-e)$ και $f(-\pi)$

Άσκηση 0.17 .

Δίνεται ορθή γωνία \widehat{xOy} και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10μ . Τα άκρα του οποίου A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $u = 2m/s$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $s(t) = ut, t \in [0, 5]$, όπου t ο χρόνος σε sec

- Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του t
- Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$, τη χρονική στιγμή που το μήκος του OA είναι $6m$

Άσκηση 0.18 .

A. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο $50m$, το μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

B. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν $400m^2$, τη μικρότερη περίμετρο έχει το τετράγωνο.

Γ. Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα $10cm$, να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν. Κατσιποδης Δημήτρης

Άσκηση 0.19 .

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου, ως συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες δίνεται από την σχέση $\theta(t) = -t^3 + 9t^2 - 10t + c, 0 \leq t \leq 8$

- Να προσδιορίσετε την τιμή της σταθεράς c , αν γνωρίζετε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία ήταν $16C^0$
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας στο τέλος της τέταρτης ώρας
- Να βρείτε την ώρα με το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

Άσκηση 0.20 .

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \beta & , x \leq 2 \\ 2\alpha x^3 + 11\alpha & , x > 2 \end{cases} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

γ. Για $\alpha = \frac{1}{3}$ και $\beta = 1$ να υπολογίσετε το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

Άσκηση 0.21 .

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x, x \in \mathbb{R}$$

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

$$\text{Δίνεται επίσης η συνάρτηση } g(x) = \alpha \ln x + x^2 - \beta x, x > 0 \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση g να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις ίδιες θέσεις με την συνάρτηση f

γ. Για $\alpha = 12$ και $\beta = 10$, να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

δ. Για $\alpha = 12$ και $\beta = 10$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xg'(x)}{\sqrt{x+6}-3}$

Άσκηση 0.22 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2, 5)$ της και ο ρυθμός μεταβολής της στο σημείο αυτό είναι ίσος με 15, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 3$.

β. Για $\alpha = \beta = 3$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)+9}{x^2-4}$

γ. Για $\alpha = \beta = 3$, να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = f'(x) + 10$

Άσκηση 0.23 .

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε : $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β. Να βρεθεί μία παράγουσα της συνάρτησης f .