Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Β. Γενικό μέρος των συναρτήσεων

1. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α ;

Απάντηση

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο} \quad x \in A\}.$$

Το σύνολο τιμών της f στο Α συμβολίζεται με $f(A)$.

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α ;

Απάντηση

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, με $x \in A$.

Σχόλια

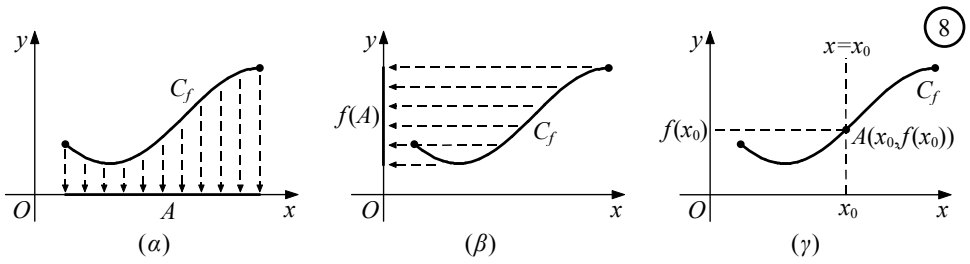
- Η **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

- Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
- ΄Οταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

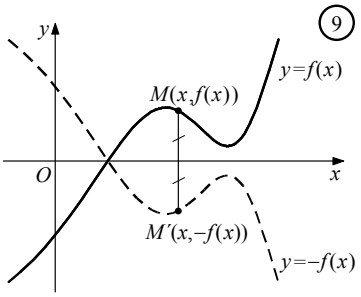
β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).

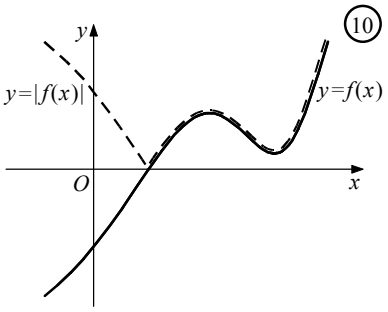


- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).



3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

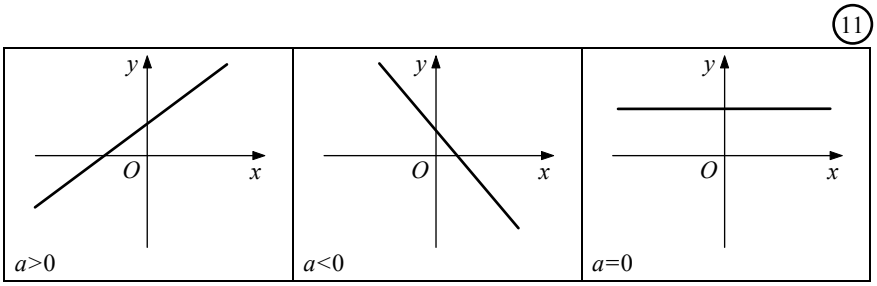
α) $f(x)=\alpha x+\beta$ β) $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$ γ) $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$

δ) $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$ ε) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.

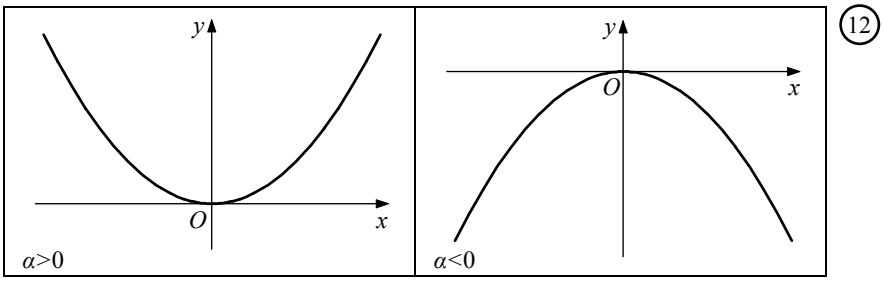
Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

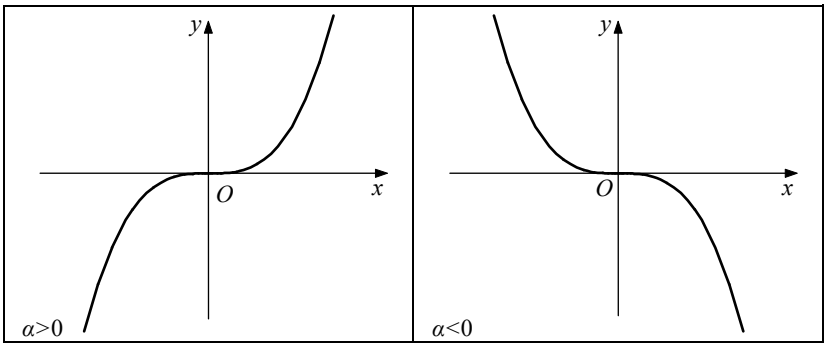
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$



β)Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$.

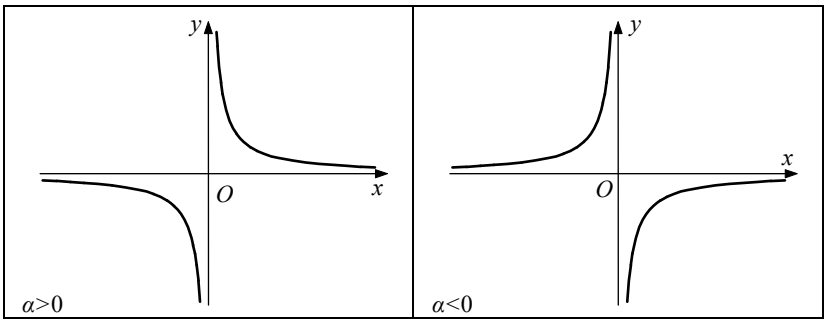


γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$.



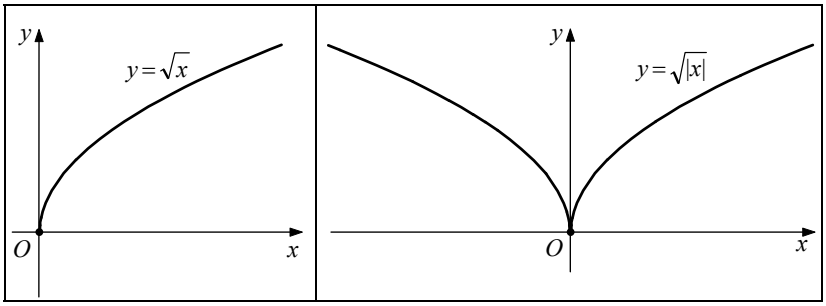
(13)

δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$.



(14)

ε) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.



(15)

4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

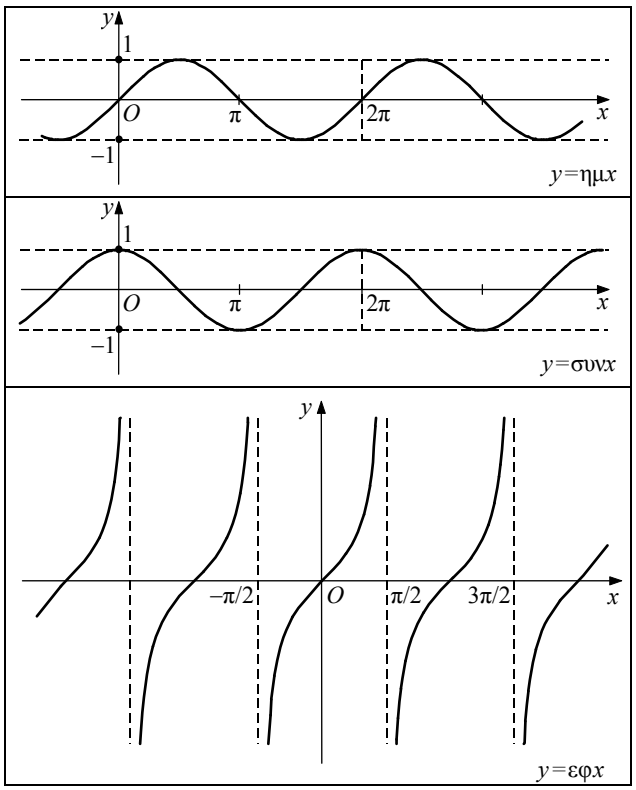
α) $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$

β) $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$ γ) $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

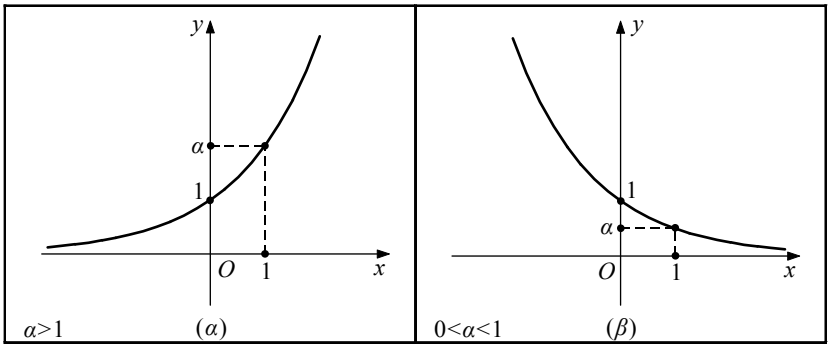
α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$



16

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\alpha^x}$, $\boldsymbol{0<\alpha\neq 1}$.



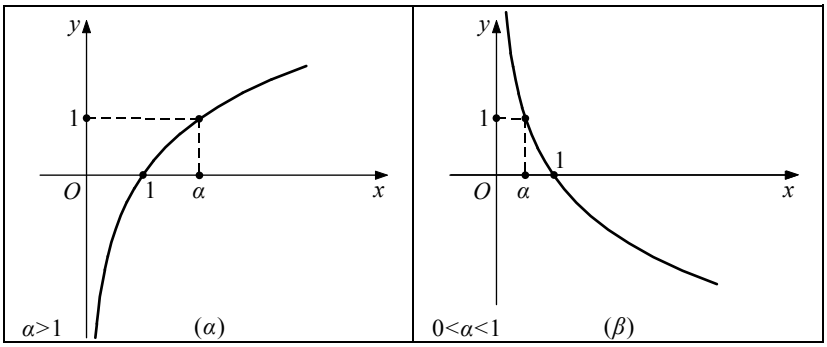
17

Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $\boldsymbol{\alpha>1}$, τότε: $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2$
- Αν $\boldsymbol{0<\alpha<1}$, τότε: $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\log_\alpha x}$, $\boldsymbol{0<\alpha\neq 1}$



(18)

Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7) Αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$, τότε

$$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 .$$

8) $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln \alpha}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f , g λέγονται ίσες ;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f , g ;

Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

$$\{x \mid x\in A \quad \text{και} \quad x\in B, \quad \text{με} \quad g(x)\neq 0\}.$$

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x)).$$

Σχόλια

α) Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A \mid f(x)\in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται ,αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) ● Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

• Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof)=(hog)of.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση

• Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f(x_1)<f(x_2)$$

• Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f(x_1)>f(x_2)$$

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $\mathrm{x_o} \in \mathrm{A}$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad .$$

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1-1$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathrm{A} \to \mathrm{R}$ λέγεται **συνάρτηση 1−1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{Αν} \quad x_1 \ne x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \ne f(x_2).$$

Σχόλια

α) Μια συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathrm{A} \to \mathrm{R}$ είναι **συνάρτηση 1−1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε} \quad x_1 = x_2 .$$

Είναι φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης ότι ισχύει η ισοδυναμία :

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2) \Leftrightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$$

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1−1". Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathrm{A} \to \mathrm{R}$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$. Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση :

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{y} \Leftrightarrow \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}) = \mathrm{x}$$

Σχόλια

α) Ισχύει ότι :

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \qquad \text{και} \qquad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A).$$

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.