Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Α. Μιγαδικοί αριθμοί

1. Πότε δυο μιγαδικοί είναι ίσοι και πότε ένας μιγαδικός είναι ίσος με 0 ;

Απάντηση

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$. Δηλαδή ισχύει:

$$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta .$$

Επειδή $0=0+0i$, έχουμε

$$\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ και } \beta=0 .$$

2. Πώς ορίζονται οι πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς ;

Απάντηση

- Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\boldsymbol{\alpha+\beta i})+(\boldsymbol{\gamma+\delta i})=(\boldsymbol{\alpha+\gamma})+(\boldsymbol{\beta+\delta})\boldsymbol{i} .$$

- Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού $\gamma+\delta i$ από τον $\alpha+\beta i$, επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού $\gamma+\delta i$ είναι ο μιγαδικός $-\gamma-\delta i$, έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha+\beta i)+(-\gamma-\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i .$$

Δηλαδή

$$(\boldsymbol{\alpha+\beta i})-(\boldsymbol{\gamma+\delta i})=(\boldsymbol{\alpha-\gamma})+(\boldsymbol{\beta-\delta})\boldsymbol{i} .$$

- Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=$$
$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i .$$

Δηλαδή είναι :

$$(\boldsymbol{\alpha+\beta i})(\boldsymbol{\gamma+\delta i})=(\boldsymbol{\alpha\gamma-\beta\delta})+(\boldsymbol{\alpha\delta+\beta\gamma})\boldsymbol{i} .$$

- Τέλος, για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i\,.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\boldsymbol{\alpha+\beta i}}{\boldsymbol{\gamma+\delta i}}=\frac{\boldsymbol{\alpha\gamma+\beta\delta}}{\boldsymbol{\gamma^2+\delta^2}}+\frac{\boldsymbol{\beta\gamma-\alpha\delta}}{\boldsymbol{\gamma^2+\delta^2}}\boldsymbol{i}\,.$$

3. Τι ονομάζουμε συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ και τι ιδιότητες έχει ;

Απάντηση

Συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z=\alpha+\beta i$ λέμε τον αριθμό $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

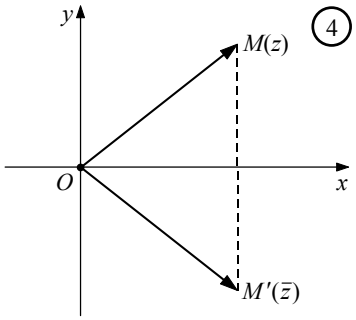
Ο συζυγής του z συμβολίζεται επίσης και με $\overline{\alpha+\beta i}$. Είναι δηλαδή :

$$\overline{\boldsymbol{\alpha+\beta i}}=\boldsymbol{\alpha-\beta i}\ .$$

Επειδή είναι και $\overline{\alpha-\beta i}=\alpha+\beta i$, οι αριθμοί $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

4. Να γράψετε τις ιδιότητες των συζυγών αριθμών και να αποδείξετε ότι $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

Απάντηση



4

• Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $M(\alpha,\beta)$ και $M'(\alpha,-\beta)$ δύο συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

• Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς $z=\alpha+\beta i$ και $\bar{z}=\alpha-\beta i$ μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$\boldsymbol{z+\bar{z}=2\alpha}$$
$$\boldsymbol{z-\bar{z}=2\beta i}\,.$$

• Αν $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$ είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

1. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
2. $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$
3. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
5. $\overline{z_1+z_2+\cdots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_\nu$
6. $\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\cdot\ldots\cdot\bar{z}_\nu$

Θεώρημα

5. Να αποδειχθεί ότι : $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Απόδειξη

Η απόδειξη της ιδιότητας $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ γίνεται ως εξής :

Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, τότε έχουμε :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i}$$

$$= (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

6. Πώς υπολογίζουμε τις δυνάμεις του i ;

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του i, γράφουμε τον εκθέτη v στη μορφή $v = 4\rho + \upsilon$, όπου ρ είναι το πηλίκο και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του v με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^v = i^{4\rho+\upsilon} = i^{4\rho} i^\upsilon = (i^4)^\rho i^\upsilon = 1^\rho i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1 & , \text{αν} \quad \upsilon = 0 \\ i & , \text{αν} \quad \upsilon = 1 \\ -1 & , \text{αν} \quad \upsilon = 2 \\ -i & , \text{αν} \quad \upsilon = 3 \end{cases}$$

$$= (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 .$$

Θεώρημα

7. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ **με** $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$.

Απόδειξη

Έστω η εξίσωση $az^2 + \beta z + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in R$ και $\alpha \neq 0$.

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση , με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$, τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z = \frac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$, τότε, επειδή $\frac{\Delta}{4\alpha^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2.$$

Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε το παρακάτω κριτήριο :

Για ένα μιγαδικό αριθμό z ισχύει ότι:

- Ο z είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $z=\bar{z}$
- Ο z είναι φανταστικός, αν και μόνο αν $z=-\bar{z}$.

Απόδειξη

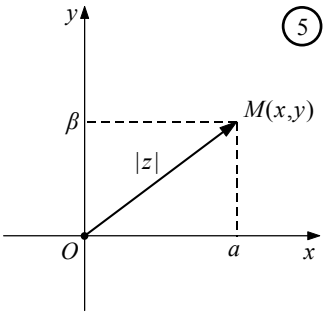
Δες το τετράδιό σου ή να γίνει ξανά στην τάξη.

8. Τι λέμε μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού ;

Απάντηση

Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο. Ορίζουμε ως **μέτρο** του z την απόσταση του M από την αρχή O, δηλαδή

$$|z|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$$



9. Να γράψετε τις ιδιότητες του μέτρου μιγαδικού αριθμού.

Απάντηση

Ισχύει ότι :

- $|z|=|\bar{z}|=|-z|$
- $|z|^2=z\cdot\bar{z}$
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z^\nu|=|z|^\nu$.
- $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Θεώρημα

10. Να αποδείξετε ότι : $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

Απόδειξη

Έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

11.α) Τι εκφράζει γεωμετρικά το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών , δηλαδή ο αριθμός $|z_1 - z_2|$

β) Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$;

γ) Τι παριστάνει η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$;

Απάντηση

α) "Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους".

Δηλαδή:

$$(M_1M_2) = |z_1 - z_2|$$

β) Η εξίσωση

$$|z - z_0| = \rho \text{ , } \rho > 0$$

παριστάνει τον **κύκλο** με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ.

γ) Η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη **μεσοκάθετο** του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Β. Γενικό μέρος των συναρτήσεων

1. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \quad \text{για κάποιο} \quad x \in A\}.$$

Το σύνολο τιμών της f στο A συμβολίζεται με $f(A)$.

2. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

Απάντηση

Γραφική παράσταση της f λέμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, με $x \in A$.

Σχόλια

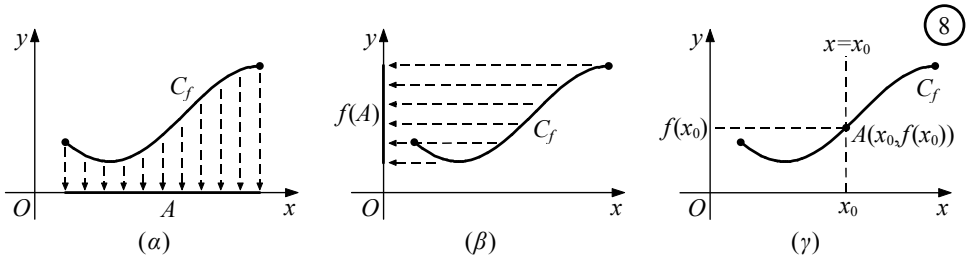
- Η **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

- Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα σημεία της C_f. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.
- ΄Οταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.

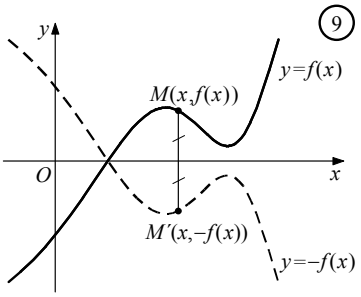
γ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της C_f (Σχ. 8).



- Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $-f$ και $|f|$.

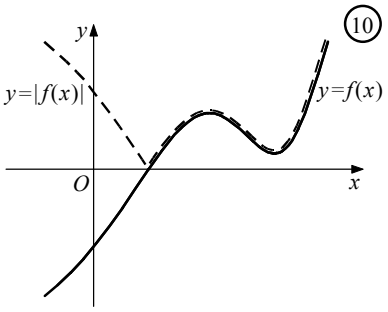
α) Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x,f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. (Σχ. 9).

9



β) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. (Σχ. 10).

10



3. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων

α) $f(x)=\alpha x+\beta$ **β)** $f(x)=\alpha x^2,\ \alpha\neq 0$ **γ)** $f(x)=\alpha x^3,\ \alpha\neq 0$

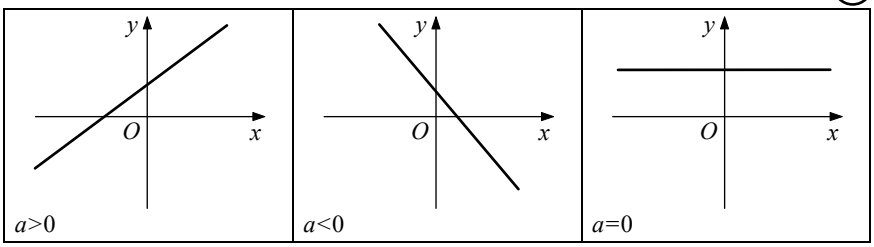
δ) $f(x)=\dfrac{\alpha}{x},\ \alpha\neq 0$ **ε)** $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{|x|}$.

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

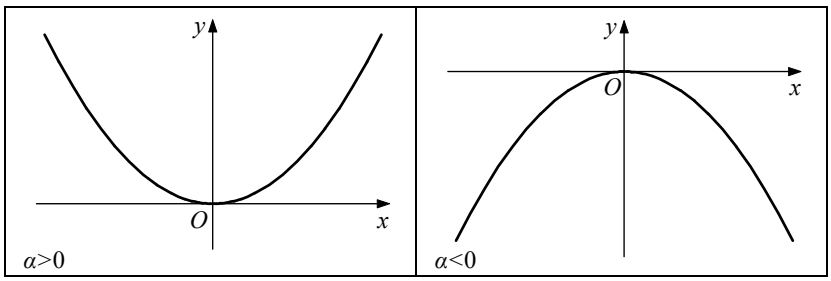
α) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$

11

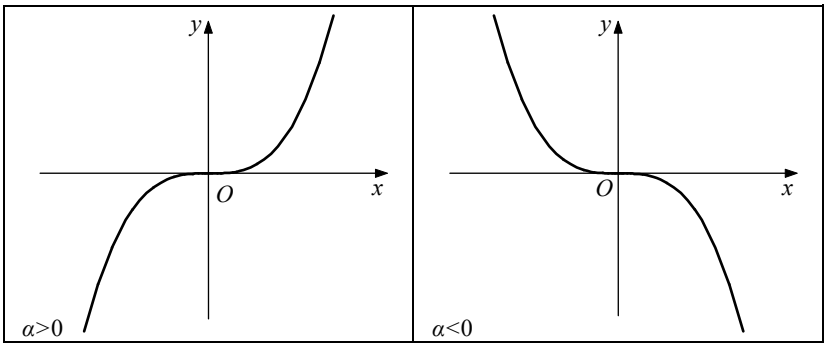


β)Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2,\ \alpha\neq 0$.

12

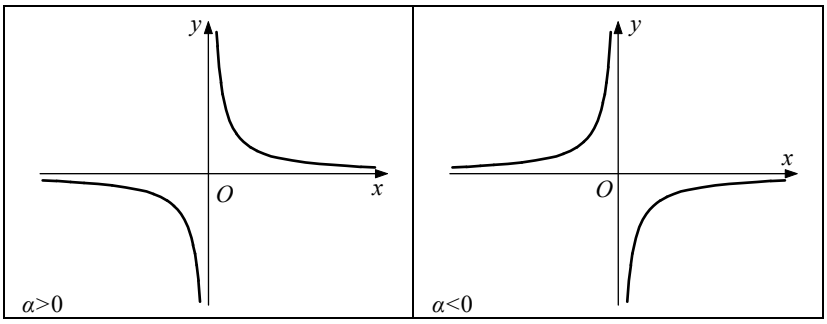


γ) Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3,\ \alpha\neq 0$.



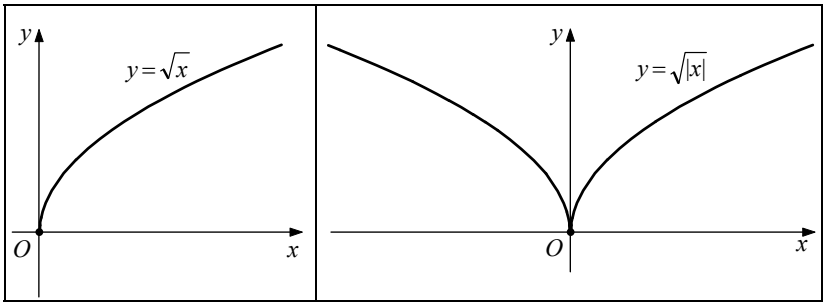
13

δ) Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$.



14

ε) Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.



15

4. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :

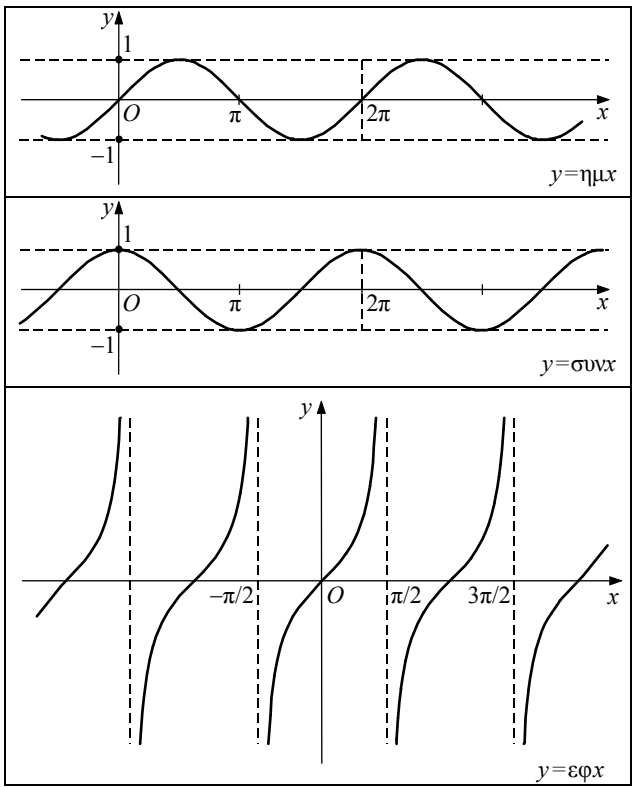
α) $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$

β) $f(x)=\alpha^x$, $0<\alpha\neq 1$ γ) $f(x)=\log_\alpha x$, $0<\alpha\neq 1$

Απάντηση

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται παρακάτω :

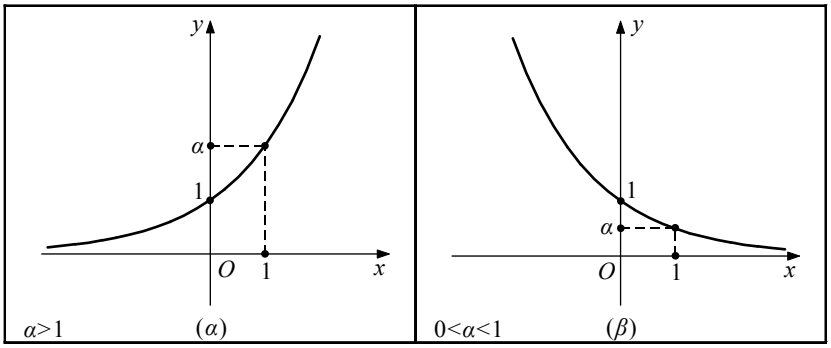
α) Οι τριγωνικές συναρτήσεις : $f(x)=\eta\mu x$, $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$



16

Υπενθυμίζουμε ότι, οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο $T=2\pi$, ενώ η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$.

β) Η εκθετική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\alpha^x}$, $\boldsymbol{0<\alpha\neq 1}$.



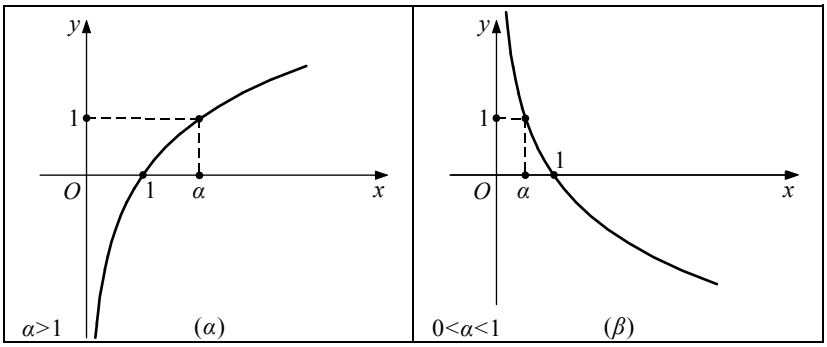
17

Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

- Αν $\boldsymbol{\alpha>1}$, τότε: $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2$
- Αν $\boldsymbol{0<\alpha<1}$, τότε: $\alpha^{x_1}<\alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2$.

γ) Η λογαριθμική συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)=\log_\alpha x}$, $\boldsymbol{0<\alpha\neq 1}$



(18)

Ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι:

1) $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$

2) $\log_\alpha \alpha^x = x$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x$

3) $\log_\alpha \alpha = 1$ και $\log_\alpha 1 = 0$

4) $\log_\alpha (x_1 x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

5) $\log_\alpha \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$

6) $\log_\alpha x_1^k = \kappa \log_\alpha x_1$

7) Αν $\alpha > 1$, τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, ενώ αν $0 < \alpha < 1$, τότε

$$\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 .$$

8) $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$, αφού $\alpha = e^{\ln \alpha}$.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f , g λέγονται ίσες ;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

6. Πώς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης , αφαίρεσης , γινομένου και πηλίκου δύο συναρτήσεων f , g ;

Απάντηση

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Το πεδίο ορισμού των $f+g$, $f-g$ και fg είναι η τομή $A\cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο

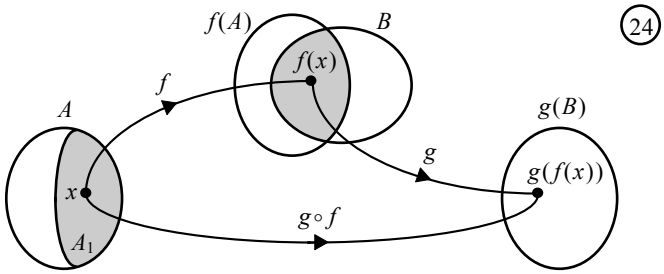
$$\{x \mid x\in A \quad \text{και} \quad x\in B\,, \quad \text{με} \quad g(x)\neq 0\}\,.$$

7. Τι λέμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g;

Απάντηση

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x)=g(f(x))\,.$$



Σχόλια

α) Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A \mid f(x)\in B\}\,.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται ,αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

β) ● Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι gof και fog, τότε αυτές *δεν είναι υποχρεωτικά* ίσες.

• Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει

$$ho(gof)=(hog)of\,.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ;

Απάντηση

• Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f(x_1)<f(x_2)$$

• Η συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα *διάστημα* Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A$$

• Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο**, το $f(x_0)$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \quad .$$

10. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1-1$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται **συνάρτηση 1–1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{Αν} \quad x_1 \ne x_2, \quad \text{τότε} \quad f(x_1) \ne f(x_2).$$

Σχόλια

α) Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι **συνάρτηση 1–1**, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν} \quad f(x_1) = f(x_2), \quad \text{τότε} \quad x_1 = x_2.$$

Είναι φανερό από τον ορισμό της συνάρτησης ότι ισχύει η ισοδυναμία :

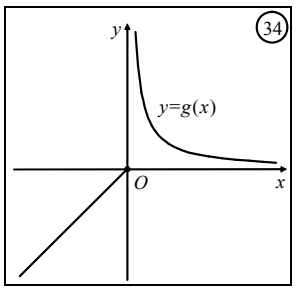
$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

β) Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

- Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι συνάρτηση "1–1".Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή συναρτήσεις που είναι $1-1$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ (Σχ. 34).είναι $1-1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.



11. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A αντιστρέφεται και πώς ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση $f:A\to R$ αντιστρέφεται, αν και μόνο αν είναι $1-1$.Η αντίστροφη συνάρτηση της f που συμβολίζεται με f^{-1} ορίζεται από τη σχέση :

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

Σχόλια

α) Ισχύει ότι :

$$f^{-1}(f(x))=x,\quad x\in A \qquad \text{και} \qquad f(f^{-1}(y))=y,\quad y\in f(A).$$

β) Η αντίστροφη της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f .

γ) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Γ. Όρια συναρτήσεων

1. Ποια πρόταση συνδέει το όριο της f στο x_o και τα πλευρικά όρια της f στο x_o;

Απάντηση

Ισχύει ότι :

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

Παρατηρήσεις στο όριο

α) Ισχύει ότι :

(α)	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-\ell)=0$
(β)	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

β) Τους αριθμούς $\ell_1=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\ell_2=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ τους λέμε **πλευρικά όρια** της f στο x_0 και συγκεκριμένα το ℓ_1 **αριστερό όριο** της f στο x_0, ενώ το ℓ_2 **δεξιό όριο** της f στο x_0.

γ) — Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0, πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε "κοντά στο x_0", δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta) \quad \text{ή} \quad (\alpha, x_0) \quad \text{ή} \quad (x_0, \beta).$$

— Το x_0 μπορεί να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (Σχ. 39α, 39β) ή να μην ανήκει σ' αυτό .

— Η τιμή της f στο x_0, όταν υπάρχει, μπορεί να είναι ίση με το όριό της στο x_0 (Σχ. 39α) ή διαφορετική από αυτό.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει κοντά στο x_o μια ιδιότητα P;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι έχει **κοντά στο x_0** μια ιδιότητα P, όταν ισχύει μια από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

α) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ και στο σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα P.

β) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (x_0, β).

γ) Η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β), έχει σ' αυτό την ιδιότητα P, αλλά δεν ορίζεται σε σύνολο της μορφής (α, x_0).

3. Να γράψετε τις ιδιότητες των ορίων ορίου στο x_0 .

Απάντηση

Για το όριο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α) Θεώρημα 1ο

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

β) Θεώρημα 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

γ) Θεώρημα 3ο

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\kappa f(x)) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, για κάθε σταθερά $\kappa \in \mathrm{R}$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ **4.** $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$ **6.** $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \ge 0$ κοντά στο x_0.

δ) Θεώρημα 4ο

— Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathrm{R}$.Είναι τότε :

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$$

—Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathrm{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Θα είναι τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad \textbf{όπου } Q(x_0) \neq 0$$

ε) Θεώρημα 5ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$,

τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Κριτήριο παρεμβολής.

στ) Ισχύει ότι

- $|\eta\mu x| \le |x|$, για κάθε $x \in R$.Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

4 . Πώς υπολογίζουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο x_o .

Απάντηση

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0,δηλαδή το $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x))$, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

Αν $g(x) \ne u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u).$$

5 . Να γράψετε τις ιδιότητες του άπειρου ορίου στο x_o .

Απάντηση

Όπως στην περίπτωση των πεπερασμένων ορίων έτσι και για τα άπειρα όρια συναρτήσεων, που ορίζονται σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=-\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

στ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

ζ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$. η) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$.

θ) i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty$, $\nu\in\mathrm{N}^*$

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$, $\nu\in\mathrm{N}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty$, $\nu\in\mathrm{N}$.

ι) Για το άθροισμα και το γινόμενο ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα :

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (όριο αθροίσματος)

Αν στο $x_0\in\circ$						
το όριο της f είναι:	$\alpha\in\mathrm{R}$	$\alpha\in\mathrm{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
τότε το όριο της $f+g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (όριο γινομένου)

Αν στο $x_0\in\mathrm{R}$,										
το όριο της f είναι:	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
και το όριο της g είναι:	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f\cdot g$ είναι:	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Σχόλιο

Οι παρακάτω μορφές λέγονται **απροσδιόριστες** μορφές :

$$(+\infty)+(-\infty)\ ,\ 0\cdot(\pm\infty)\ ,\ (+\infty)-(+\infty),\ (-\infty)-(-\infty)\ ,\ \frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

6 . Να γράψετε τις ιδιότητες για το όριο στο άπειρο .

Απάντηση

α) Για τον υπολογισμό του ορίου στο $+\infty$ ή $-\infty$ ενός μεγάλου αριθμού συναρτήσεων χρειαζόμαστε τα παρακάτω βασικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\nu} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\quad \nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\nu} = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^{\nu}} = 0$, $\quad \nu \in \mathbb{N}^*$.

β) Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$, με $\alpha_{\nu} \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} (\alpha_{\nu}x^{\nu}) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha_{\nu}x^{\nu})$$

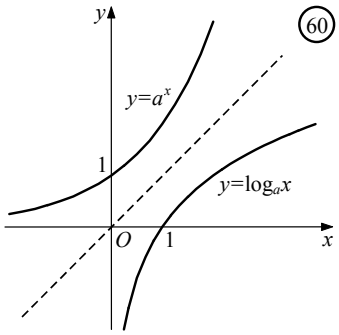
γ) Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_{\nu}x^{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_{\kappa}x^{\kappa} + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_{\nu} \neq 0$, $\beta_{\kappa} \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_{\nu}x^{\nu}}{\beta_{\kappa}x^{\kappa}}\right)$$

δ) Για το όριο **εκθετικής - λογαριθμικής** συνάρτησης ισχύει ότι

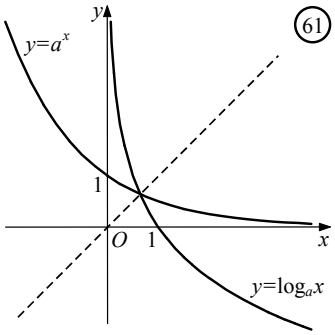
- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to0} \log_{\alpha} x = -\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = +\infty$



- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
$\lim\limits_{x\to0} \log_{\alpha} x = +\infty$,	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{\alpha} x = -\infty$



Σχόλια

- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$.
- Για να αναζητήσουμε το όριο μιας συνάρτησης f στο $-\infty$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.
- Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και
— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Η θεωρία στα Μαθηματικά κατεύθυνσης :

Ορισμοί – Ιδιότητες - Προτάσεις – Θεωρήματα – Αποδείξεις

Δ. Συνέχεια συνάρτησης

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της , όταν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Σχόλια

α) Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

i) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή

ii) Υπάρχει το όριό της στο x_0, αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της, $f(x_0)$, στο σημείο x_0.

β) Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέγεται, **συνεχής συνάρτηση**.

γ) — **Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση *P* είναι συνεχής**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

— **Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{P}{Q}$ είναι συνεχής**, αφού για κάθε x_0 του πεδίου ορισμού της ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=\eta\mu x$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς**, αφού για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0 .$$

— **Οι συναρτήσεις $f(x)=a^x$ και $g(x)=\log_a x$, $0<a\neq 1$ είναι συνεχείς**.

2. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων .

Απάντηση

Για τη συνέχεια και τις πράξεις συναρτήσεων ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

$$f+g,\quad c\cdot f,\ \text{όπου}\ \ c\in\mathbb{R},\quad f\cdot g,\quad \frac{f}{g},\quad |f|\ \text{και}\ \sqrt[\nu]{f}$$

με την προϋπόθεση ότι ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0.

2. Να διατυπώσετε πρόταση που αφορά τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης .

Απάντηση

Για τη συνέχεια σύνθετης συνάρτησης ισχύει το παρακάτω θεώρημα :

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$

Απάντηση

- Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β)**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).
- Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$**, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)\qquad\text{και}\qquad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$$

Σχόλιο

Ανάλογοι ορισμοί διατυπώνονται για διαστήματα της μορφής $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$.

4. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Σχόλια

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Θεώρημα

5. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών .

Απάντηση

Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών είναι το παρακάτω :

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\eta$$

Απόδειξη

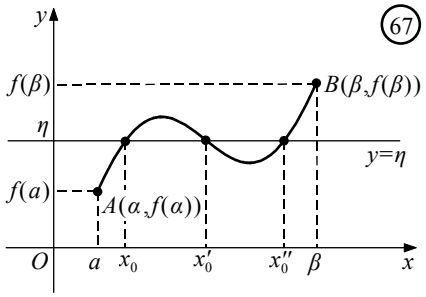
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού

$g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.



Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$. ■

Σχόλια

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** και **συνεχής** σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου

$$A=\lim_{x\to\alpha^+}f(x) \quad \text{και} \quad B=\lim_{x\to\beta^-}f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι **γνησίως φθίνουσα** και **συνεχής** στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A) .

6. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής .

Απάντηση

Το θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής διατυπώνεται ως εξής :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\boldsymbol{m \le f(x) \le M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \boldsymbol{x \in [\alpha, \beta]}.$$

Σχόλιο

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $\boldsymbol{[m, M]}$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της.