Η Άσκηση (αριθμητικός μέσος σε γεωμετρική πρόοδο)

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε γεωμετρική πρόοδο με ν (το πλήθος) θετικούς όρους, ο μέσος αριθμητικός του πρώτου και του τελευταίου όρου είναι μεγαλύτερος του μέσου αριθμητικού όλων των όρων της προόδου.

Ας δούμε τη λύση (βασισμένη στη σκέψη του Αλέξανδρου Συγγελάκη)

Έστω $\alpha, \alpha\lambda, \alpha\lambda^2, \ldots, \alpha\lambda^{\nu-1}$ η πρόοδος, $\alpha>0$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{\alpha+\alpha\lambda^{\nu-1}}{2} > \frac{\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\ldots+\alpha\lambda^{\nu-1}}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha\left(1+\lambda^{\nu-1}\right)}{2} > \frac{\alpha\left(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{\nu-1}\right)}{\nu} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1+\lambda^{\nu-1}}{2} > \frac{1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{\nu-1}}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\nu+\nu\lambda^{\nu-1} > 2+2\lambda+2\lambda^2+\ldots+2\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$(\nu-2)\lambda^{\nu-1}+\nu-2 > 2\lambda+2\lambda^2+\ldots+2\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$\left[(\nu-2)\lambda^{\nu-1}-\lambda-\lambda^2-\ldots-\lambda^{\nu-1}\right]-\left[\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{\nu-2}-(\nu-2)\right]>0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\nu\lambda^{\nu-1}-2\lambda^{\nu-1}-\lambda-\lambda^2-\ldots-\lambda^{\nu-1}\right]-\left[\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{\nu-2}-(\nu-2)\right]>0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(\lambda^{\nu-1}-\lambda\right)+\left(\lambda^{\nu-1}-\lambda^2\right)+\ldots+\left(\lambda^{\nu-1}-\lambda^{\nu-2}\right)\right]-\left[\left(\lambda^{\nu-2}-1\right)+\left(\lambda^{\nu-3}-1\right)+\ldots+(\lambda-1)\right]>0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\lambda\left(\lambda^{\nu-2}-1\right)+\lambda^2\left(\lambda^{\nu-3}-1\right)+\ldots+\lambda^{\nu-1}(\lambda-1)\right]-\left[\left(\lambda^{\nu-2}-1\right)+\left(\lambda^{\nu-3}-1\right)+\ldots+(\lambda-1)\right]>0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda^{\nu-2}-1\right)(\lambda-1)+\left(\lambda^{\nu-3}-1\right)(\lambda^2-1)+\ldots+(\lambda-1)\left(\lambda^{\nu-2}-1\right)>0.$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής είτε $\lambda>1$, είτε $0<\lambda<1$.

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης, Μαθηματικός
Κιλκίς 44 Άλιμος,
e-mail: raik2151@gmail.com