Άσκηση

Έστω $\alpha<\beta<\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma=7$ και $\alpha\beta\gamma=9$

Να βρείτε το σύνολο τιμών για κάθε μια από τις μεταβλητές α, β, γ.

Απάντηση (Κ. Σερίφης)

Είναι $\beta+\gamma=7-\alpha$ και $\beta\gamma = 9/\alpha$. Συνεπώς οι β, γ είναι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2-(7-\alpha)\chi+9/\alpha = 0$ και με δεδομένο ότι $\beta<\gamma$ το β θα είναι η μικρότερη και το γ η μεγαλύτερη ρίζα της.

Πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης να είναι θετική.

Είναι $\Delta = f(a) = (7-a)^2 - \frac{36}{a} =$

$\frac{a^3-14a^2+49a-36}{a} = \frac{(a-1)(a-4)(a-9)}{a} > 0$

$a < 0$ ή $1 < \alpha < 4$ ή $\alpha > 9$

Ακόμη $\beta = \frac{7-\alpha-\sqrt{f(\alpha)}}{2}$, $\gamma = \frac{7-\alpha+\sqrt{f(\alpha)}}{2}$

Θα πρέπει $\beta>\alpha$ το οποίο μας οδηγεί στην ανίσωση:

$f(a) < (7-3a)^2$ με $\alpha<7/3 \Leftrightarrow$

$\frac{(\alpha+1)(-2\alpha+3)(\alpha-3)}{\alpha} < 0$, $\alpha<7/3$

και η οποία έχει λύσεις

$\alpha<-1$, $0<\alpha<3/2$.

Τελικά, θα είναι

$\alpha<-1$ ή $1<\alpha<3/2$ και οι τιμές των β, γ αυτές που θα προκύψουν από τις συναρτήσεις:
$\beta = \frac{7-\alpha-\sqrt{f(\alpha)}}{2}$, $\gamma = \frac{7-\alpha+\sqrt{f(\alpha)}}{2}$