1 Μια καλή άσκηση για συζήτηση

Να δείξετε ότι η f:R→R για την οποία ισχύει

$f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για κάθε χ του R είναι αυστηρώς αύξουσα.

Απάντηση

Σχόλιο:

Με επαγωγή σε άτοπο θα αποδεικνυόταν αν η f αυστηρώς μονότονη.

Έστω $g(x)=x+e^x+1$ στο R.

Είναι $g'(x)=e^x+1>0$ άρα η g αυστηρώς αύξουσα στο R.

Ακόμη $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

Άρα η g^{-1} υπάρχει , και έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το R.

Είναι
$$f(x)+e^{f(x)}=x-1$$
$$f(x)+e^{f(x)}+1=x$$
$$g(f(x))=x$$
$$g^{-1}(g(f(x)))=g^{-1}(x)$$
$$f(x)=g^{-1}(x)$$

Επειδή η g αυστηρώς αύξουσα θα είναι και η g^{-1} αυστηρώς αύξουσα δηλαδή η f αυστηρώς αύξουσα.

2 Άσκηση

Αν για την f:R→R ισχύει

$f^5(x)+f^3(x)+f(x)=2x+1$ για κάθε χ του R

α. Να δείξετε ότι η f γν. μονότονη.

β. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

3 Άσκηση

Να δείξετε ότι η f:R→R για την οποία ισχύει

$f^{\nu}(x)+kf^{\mu}(x)=x-1$ για κάθε χ του R είναι αυστηρώς αύξουσα, με ν, μ περιττοί φυσικοί .

ΓΕΝΙΚΑ:

Για κάθε τρεις πραγματικές συναρτήσεις f,g,h έχουμε ότι αν

1. g, h γν. αύξουσες και
2. (g o f) = h

τότε η f είναι γν. αύξουσα.

Δημήτρης dement

ΑΣΚΗΣΗ

Για κάθε τρεις πραγματικές συναρτήσεις f,g,h έχουμε ότι

1. f, h γνησίως αύξουσες
2. (g o f) = h
3. Το το σύνολο τιμών της f συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της g.

Δείξτε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

Μαυρογιάννης