“Μια καλή άσκηση για συζήτηση”

«Να δείξετε ότι η f:R→R για την οποία ισχύει
$f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in R$
είναι αυστηρώς αύξουσα.»

(*προταθείσα υπό kostas20000gr*)

*

► **Απόδειξη** (**«Ευθεία»**) (*Παπανδρεόπουλος Γιάννης*): Είναι προφανές ότι ισχύει η πρόταση «***Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα $\Leftrightarrow$ για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει: λ=$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\succ 0$***» (Δες στο: «*Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου – Ανάλυση*» *υπό Παντελίδη Γ. κ.λπ.- ΟΕΔΒ, 1994*, σελ. 32).

Θα δείξουμε πρώτα ότι η f είναι «1-1». Πράγματι: Αν $f(x_2)=f(x_1)$, τότε και $e^{f(x_2)}=e^{f(x_1)}$ οπότε $f(x_2)+e^{f(x_2)}=f(x_1)+e^{f(x_1)}\Leftrightarrow x_2-1=x_1-1\Leftrightarrow x_1=x_2$. Άρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει: $x_1\neq x_2\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ (1).

Είναι τώρα για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$: λ=$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$=

$$\frac{x_2-1-e^{f(x_2)}-x_1+1+e^{f(x_1)}}{x_2-x_1}=1-\frac{e^{f(x_2)}-e^{f(x_1)}}{x_2-x_1}\overset{(1)}{=}1-\frac{e^{f(x_2)}-e^{f(x_1)}}{f(x_2)-f(x_1)}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$\Leftrightarrow$λ=1-λλ_{ef}, όπου $\lambda_{ef}=\dfrac{e^{f(x_2)}-e^{f(x_1)}}{f(x_2)-f(x_1)}=\dfrac{e^{y_2}-e^{y_1}}{y_2-y_1}\succ 0$ (*αφού e^x: γνησίως αύξουσα*)

$\Leftrightarrow(1+\lambda_{ef})\lambda=1\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{1}{1+\lambda_{ef}}\succ 0$ $\Leftrightarrow$***η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.***■

► **Εύρεση του συνόλου τιμών της f και του τύπου της αντιστρόφου** (*επέκταση της ανωτέρω άσκησης υπό nicspyros*) (***Παπανδρεόπουλος Γιάννης***): Θεωρούμε την *παραμετρική* εξίσωση $f(x)=y$ (2), ***όπου y: παράμετρος***. Αν για κάποια τιμή της y η (2) έχει λύση (*ως προς x*), *αυτή θα είναι μοναδική* και θα ισχύει: $y+e^y=x-1\Leftrightarrow x=y+e^y+1$ (3). Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}$: $f(y+e^y+1)=y$, δηλ. ότι ***η εξίσωση (2) έχει λύση για κάθε $y\in\mathbb{R}$, και μάλιστα η λύση δίνεται από την σχέση (3).***

Πράγματι, έστω $f(y+e^y+1)=z$ (4). Εξ υποθέσεως θα είναι: $z+e^z=y+e^y$ $\Leftrightarrow e^z-e^y=-(z-y)$ (5). Αν $z\neq y$, (5) $\Leftrightarrow\dfrac{e^z-e^y}{z-y}=-1$: *Άτοπο, αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα*. Άρα (5) $\Leftrightarrow z=y$ (6) (κάτι που θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε και λόγω της γνήσιας μονοτονίας της $\sigma(x)=x+e^x$ - δεδομένου ότι $\sigma'(x)\succ 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ - οπότε: $\sigma(z)=\sigma(y)\Leftrightarrow z=y$). Από (4) και (6) προκύπτει το ζητούμενο, οπότε ***το σύνολο τιμών της f είναι ολόκληρο το*** $\mathbb{R}$ και για κάθε $y\in\mathbb{R}$: $f(x)=y\Leftrightarrow x=y+e^y+1=f^{-1}(y)$.■