Μια άσκηση για συζήτηση: Η παραγωγισιμότητα

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

19 Νοεμβρίου 2007

Περίληψη

Στο δικτυακό τόπο Mathematica [1] ο Κώστας Τηλέγραφος (kostas20000gr) έθεσε με μία άσκηση μερικά ερωτήματα για την συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x - 1$. Το μέλος nicspyros προσέθεσε μερικά ακόμη ερωτήματα. Μεταξύ άλλων και το να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Στο παρόν σημείωμα επιχειρείται μία απάντηση στο ερώτημα της παραγωγισιμότητας χρησιμοποιώντας αποκλειστικά γνώσεις του σχολικού βιβλίου.

Άσκηση 1. *Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x - 1$ για όλα τα x. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.*

Απόδειξη *Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής.* Επιλέγουμε ένα x_0. Από τις σχέσεις

$$f(x) + e^{f(x)} = x - 1$$

$$f(x_0) + e^{f(x_0)} = x_0 - 1$$

βρίσκουμε ότι:

$$f(x) - f(x_0) + (e^{f(x)} - e^{f(x_0)}) = x - x_0 \tag{1}$$

Λόγω της μονοτονίας της e^x οι αριθμοί $f(x) - f(x_0)$, $e^{f(x)} - e^{f(x_0)}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Λόγω της (1) το πρόσημο αυτό είναι ίδιο με του $x - x_0$ (παρεπιπτόντως με την παρατήρηση αυτή έχουμε δείξει και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα). Αρα αν μεν είναι $x > x_0$ θα ισχύει

$$0 < f(x) - f(x_0) < f(x) - f(x_0) + e^{f(x)} - e^{f(x_0)} = x - x_0 \tag{2}$$

ενώ αν είναι $x < x_0$ θα ισχύει

$$x - x_0 = f(x) - f(x_0) + e^{f(x)} - e^{f(x_0)} < f(x) - f(x_0) < 0 \tag{3}$$

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

Από τις (2), (3) συνάγουμε ότι τα πλευρικά όρια στο x_0 της διαφοράς $f(x) - f(x_0)$ είναι 0 και επομένως η f είναι συνεχής.
Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Για x διάφορο του x_0 θα είναι και $f(x)$ διάφορο του $f(x_0)$. Επειδή η παράγωγος της e^x είναι γνησίως αύξουσα θα υπάρχει *μοναδικός* αριθμός στο διάστημα με άκρα $f(x_0), f(x)$ που ικανοποιεί το θεώρημα μέσης τιμής. Ας τον συμβολίσουμε με $s(x)$. Ορίζεται έτσι η συνάρτηση s που σε κάθε x διάφορο του x_0 αντιστοιχεί το $s(x)$. Επειδή το $s(x)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(x_0), f(x)$ και η $f(x)$ είναι συνεχής θα είναι και η $s(x)$ συνεχής στο x_0 και το όριο της στο x_0 είναι $f(x_0)$. Θα είναι βέβαια:

$$e^{f(x)} - e^{f(x_0)} = e^{s(x)} \left(f\left(x\right) - f\left(x_0\right)\right) \tag{4}$$

Λόγω της (4) η (1) γράφεται

$$f(x) - f(x_0) + e^{s(x)}(f(x) - f(x_0)) = x - x_0$$

και αν διαιρέσουμε με $x - x_0$ βρίσκουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + e^{s(x)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

οπότε:

$$\frac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \frac{1}{1 + e^{s(x)}} \tag{5}$$

Από την (5) συνάγουμε ότι το όριο του $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ στο x_0 υπάρχει και είναι ίσο με $\frac{1}{1+e^{f(x_0)}}$. Άρα η fείναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'\left(x\right) = \frac{1}{1+e^{f(x)}}$