Μια άσκηση για συζήτηση:
Η παραγωγισιμότητα ΙΙ

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

20 Νοεμβρίου 2007

Περίληψη

Σε προηγούμενο σημείωμα με τίτλο "Μια άσκηση για συζήτηση. Η παραγωγισιμότητα" προτάθηκε μία λύση ενός θέματος που παρουσιάστηκε στο δικτυακό τόπο Mathematica. Με το παρόν σημείωμα παρουσιάζεται μία συντομότερη λύση που την οφείλουμε στον Μπάμπη Στεργίου.

ΑΣΚΗΣΗ 1. *Δίνεται μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x - 1$ για όλα τα x. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΜΠΑΜΠΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥ)

α) Γνωρίζουμε ήδη ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $x \neq \alpha$. Από το ΘΜΤ για την $y = e^x$ υπάρχει $\xi(x)$ ανάμεσα στο $f(x)$ και στο $f(\alpha)$, ώστε

$$e^{f(x)} - e^{f(\alpha)} = e^{\xi(x)} \left(f(x) - f(\alpha)\right)$$

Επειδή:

$$f(x) - f(\alpha) + e^{f(x)} - e^{f(\alpha)} = x - \alpha$$

λόγω της παραπάνω παίρνουμε:

$$[f(x) - f(\alpha)] \left[1 + e^{\xi(x)}\right] = x - \alpha \tag{1}$$

Από αυτή προκύπτει αμέσως ότι:

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq |x - \alpha|$$

σχέση που με το κριτήριο παρεμβολής δίνει τη συνέχεια της f στο τυχαίο α.

β) Η σχέση (1) δίνει

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{1}{1 + e^{\xi(x)}}$$

με το $\xi(x)$ ανάμεσα στα $f(x)$ και $f(\alpha)$.

Αφού η f είναι συνεχής, καθώς το x τείνει στο α, το $\xi(x)$ τείνει στο $f(a)$. Επομένως

$$f'(x) = \frac{1}{1 + e^{f(x)}}$$