Η χαρά της γενίκευσης. Ι

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

6 Δεκεμβρίου 2007

Περίληψη

Κάποιες ασκήσεις που τέθηκαν στο δικτυακό τόπο Mathematica[1] εξετάζονται από μία κάπως γενικότερη οπτική.

Από τον Κώστα Τηλέγραφο (kostas20000gr) προτάθηκαν οι παρακάτω ασκήσεις:

Ασκηση 1. *(Κώστας Τηλέγραφος) Να δείξετε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.*

Ασκηση 2. *(Κώστας Τηλέγραφος) Να βρεθεί το πεδίο τιμών της $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αν ισχύει $f^3(x)+2f(x)=3-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.*

Το μέλος nicspyros προσέθεσε στην πρώτη μερικά ακόμη ερωτήματα. Στη σχετική συζήτηση οι ασκήσεις αυτές λύθηκαν από αρκετά μέλη μεταξύ των οποιών και ο Γιάννης Παπανδρεόπουλος που συνέταξε για την πρώτη επιμελημένες λύσεις. Η επόμενη άσκηση συγκεντρώνει μερικά κύρια χαρακτηριστικά αυτών και άλλων ασκήσεων. Το τελευταίο ερώτημα της δεν απευθύνεται σε μαθητές. Στο ερώτημα αυτό ο Κώστας Σερίφης έστειλε μία πολύ αναλυτική απάντηση.

Ασκηση 3. *Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g(f(x)=x$ για όλα τα x. Έστω ακόμη ότι η g είναι γνησίως μονότονη.*

1. *Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$.*
2. *Να αποδείξετε ότι είναι $f^{-1}=g$.*
3. *Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.*
4. *Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη με ίδιο είδος μονοτονίας με της g.*
5. *Να αποδείξετε ότι οι g, f είναι συνεχείς.*

Αποδειξη.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε αριθμός y είναι τιμή της g. Εισάγουμε το y στη σχέση $g(f(x)=x$ στη θέση του x και βρίσκουμε $g(f(y)=y$. Άρα το y είναι εικόνα του $f(y)$ μέσω της g.

[1] http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA

2. Η f είναι 1-1 διότι αν υποτεθεί ότι $f(x_1) = f(x_2)$ θα είναι $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Επομένως $x_1 = x_2$. Άρα η f είναι αντιστρέψιμη. Αλλά και η g είναι αντιστρέψιμη αφού είναι γνησίως μονότονη. Μάλιστα το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το $\mathbb{R}$ αφού το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$. Αν στη σχέση $g(f(x)) = x$ αντικαταστήσουμε στο β′ μέλος όπου x το $g\left(g^{-1}(x)\right)$ θα βρούμε $g(f(x)) = g\left(g^{-1}(x)\right)$ που σημαίνει (η g είναι 1-1) ότι $f(x) = g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις f και g^{-1} είναι ίσες. Άρα το αυτό θα συμβαίνει και με τις αντίστροφές τους. Άρα $f^{-1} = g$.

3. Το σύνολο τιμών της f συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της f^{-1} δηλαδή το πεδίο ορισμού της g δηλαδή το $\mathbb{R}$.

4. Η απόδειξη συνίσταται στο να αποδείξουμε ότι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας που είναι τυπική και γνωστή: Ας υποθέσουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα (η περίπτωση όπου η g είναι γνησίως φθίνουσα είναι παρόμοια). Θεωρούμε $x_1 < x_2$ από το πεδίο ορισμού της f δηλαδή από το $\mathbb{R}$. Θέλουμε $f(x_1) < f(x_2)$. Αν αυτό δεν ισχύει τότε

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \text{ή} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

   Αν εφαρμόσουμε την g στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $x_1 = x_2$ και στη δεύτερη $x_1 > x_2$ (άτοπο). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

5. Αποδεικνύουμε την συνέχεια της g. Η συνέχεια της f αποδεικνύεται ανάλογα. Η ιδέα της απόδειξης περιέχεται σε ένα γενικότερο αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο κάθε συνάρτηση που απεικονίζει διάστημα σε διάστημα και είναι γνησίως μονότονη είναι συνεχής: Θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ και ένα διάστημα (A, B) που περιέχει το $g(x_0)$. Τα A, B είναι τιμές της g που αντιστοιχούν σε κάποια α, β. Θα είναι βέβαια $\alpha < x_0 < \beta$ και προφανώς για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι $g(x) \in (A, B)$. Επομένως για κάθε περιοχή U του $g(x_0)$ υπάρχει περιοχή V του x_0 έτσι ώστε $g(V) \subseteq U$. Άρα η g είναι συνεχής.