

**Σημειακοί μετασχηματισμοί
μέσα από το
Cabri-geometryII.
(Θεώρημα Feyerbach. Αλυσίδα του Steiner)**

Δόρτσιος Κώστας, kdortsi@sch.gr, Σχολ. Σύμβ. Μαθ. Δυτ. Μακεδονίας
Αμαραντίδης Σάββας, Μαθηματικός 2^ο ΓΕΛ Κοζάνης

Εισαγωγικά

Είναι γενικά γνωστό ότι στις ημέρες μας η τεχνολογία των υπολογιστών τρέχει με μεγάλη ταχύτητα προσπαθώντας συνεχώς να διευκολύνει την ερευνητική προσπάθεια της επιστήμης αυξάνοντας την ικανότητα εκτέλεσης πολύπλοκων πράξεων από τη μια μεριά αλλά και να διαχειρίζεται όλο και μεγαλύτερο πλήθος δεδομένων ώστε να δημιουργούνται συνθήκες μέσα από τις οποίες ο σημερινός άνθρωπος να μπορεί να μελετά και να ανακαλύπτει τα μυστήρια του κόσμου που τον περιβάλλει.

Αναπόφευκτα η τεχνολογία αυτή επηρεάζει και την εκπαίδευση. Ιδιαίτερα ο χώρος των μαθηματικών είναι εκείνος που μπορεί να διαχειριστεί την τεχνολογία με τον καλύτερο τρόπο και να μετασχηματίσει το διδακτικό περιβάλλον σε μια ευχάριστη και δημιουργική παιχνιδούπολη.

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί η δυνατότητα του λογισμικού Cabri-geometryII στην παρουσίαση των μετασχηματισμών της Γεωμετρίας.

Ειδικότερα θα εφαρμοστεί ο σημειακός μετασχηματισμός της αντιστροφής για την κατανόηση του θεωρήματος του Feyerbach καθώς και της κατασκευής της αλυσίδας του Steiner.

**Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής
(*inversion*)**

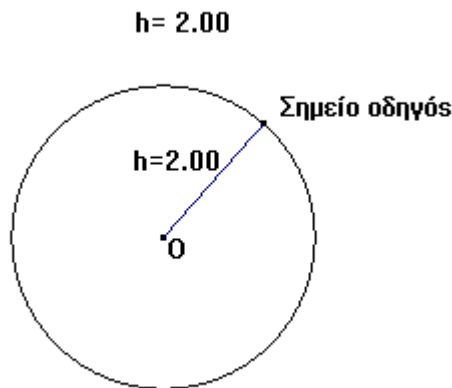
Ο σημειακός μετασχηματισμός της αντιστροφής είναι ο έκτος και ο πλέον σύνθετος από την εξάδα των **κυκλικών μετασχηματισμών** του επιπέδου. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι: η **μεταφορά**, η **στροφή**, η **αξονική συμμετρία**, η **ομοιοθεσία**, η **ομοιότητα** και τέλος η **αντιστροφή**.

Οι μετασχηματισμοί αυτοί αποκαλούνται κυκλικοί από το γεγονός ότι ο κύκλος απεικονίζεται σε κύκλο ή σε ευθεία.

Εργαζόμενοι στο περιβάλλον του Cabri-geometryII εύκολα μπορούμε να προσαρμοστούμε ώστε από τη δυναμικότητα και πλαστικότητα των σχημάτων να κατανοήσουμε τη δομή των μετασχηματισμών αυτών.

- Προετοιμασία του περιβάλλοντος του λογισμικού.

Από την εντολή **αριθμητική επεξεργασία** σημειώνουμε έναν αριθμό για παράδειγμα $h=2.00$. Στη συνέχεια σημειώνουμε ένα σημείο O και με την εντολή **μεταφορά μέτρησης** μεταφέρουμε την τιμή $h=2.00$ στο σημείο αυτό. Με την εμφάνιση ενός δεύτερου σημείου -οδηγού το οποίο δεν ονομάζουμε- και που απέχει από το σημείο O απόσταση $h = 2.00\text{cm}$ κατασκευάζουμε έναν κύκλο $C(O,h)$, ο οποίος θα αποτελεί το βασικό κύκλο του μετασχηματισμού που ζητούμε.(Σχ. 1)

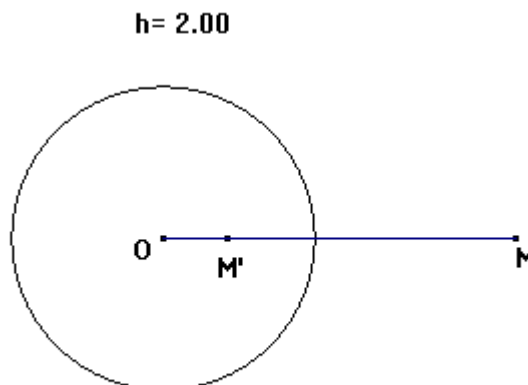


Σχήμα 1

Αφού γίνει η κατασκευή του σχήματος (1), τότε με την εντολή **απόκρυψη**, αποκρύπτουμε την εμφάνιση του σημείου οδηγού καθώς και της αντίστοιχης ακτίνας. Τότε το σχήμα αυτό είναι έτοιμο να μας προσδιορίζει το αντίστροφο οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου.

- Κατασκευή του αντιστρόφου δοθέντος σημείου M .

Αν σημειώσουμε ένα σημείο M σε τυχαία θέση τότε ενεργοποιώντας



Σχήμα 2

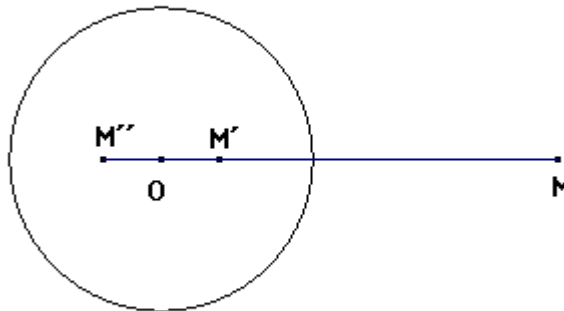
την εντολή **αντιστροφή** από το μενού των μετασχηματισμών και κάνοντας κλικ πρώτα στο σημείο M και μετά πάνω στον κύκλο που κατασκευάσαμε ορίζεται αμέσως η θέση ενός δευτέρου σημείου M' το οποίο θα είναι το αντίστροφο του σημείου M . (Σχ. 2)

- Στοιχεία της αντιστροφής.
 - **Πόλος(ή κέντρο):** Ο πόλος της αντιστροφής που ορίστηκε κατά τον ανωτέρω τρόπο είναι το σημείο O , δηλαδή το κέντρο του κύκλου $C(O,h)$
 - **Δύναμη της αντιστροφής:** Η δύναμη της αντιστροφής είναι το τετράγωνο της ακτίνας του ανωτέρου κύκλου.

$$\text{Δηλαδή: } \mathbf{p} = h^2$$

- **Βασική σχέση:** $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = h^2$ (1)
- Παρατηρήσεις:
 1. Η αντιστροφή που ορίστηκε κατά τον ανωτέρω τρόπο είναι μια θετική αντιστροφή, επειδή έχει θετική δύναμη: $\mathbf{p} = h^2 > 0$.
 2. Σε όλη την έκταση της εργασίας θα ασχοληθούμε με θετική αντιστροφή για το λόγο αυτό στη σχέση (1), αντί των αλγεβρικών τιμών θα θεωρούμε τα μήκη των τμημάτων.
 3. Στην περίπτωση που θελήσουμε την αρνητική αντιστροφή με δύναμη $\mathbf{p} = -h^2 < 0$, τότε για να βρούμε την εικόνα M'' του

$$h = 2.00$$



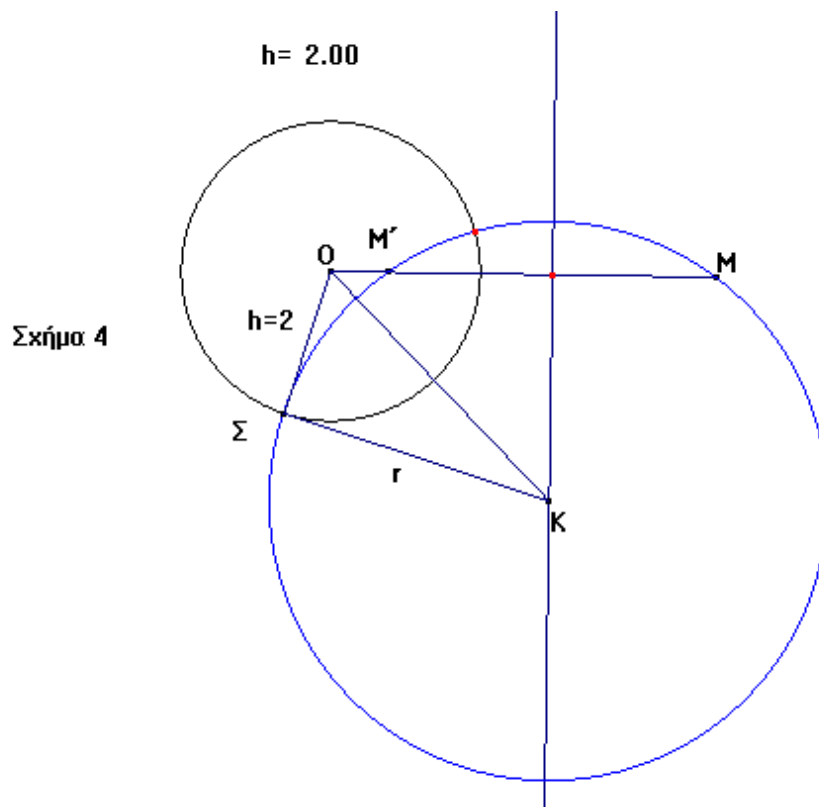
Σχήμα 3

σημείου M θα βρούμε πρώτα την εικόνα M' με τον τρόπο που

περιγράψαμε και στη συνέχεια στο M' θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό της κεντρικής συμμετρίας. (Σχ. 3)

Σ' αυτή την περίπτωση είναι $\overline{OM} \cdot \overline{OM''} = -h^2$

4. Η ερμηνεία της σχέσης (1) στηρίζεται στο γεγονός ότι ο κύκλος $C(O,h)$ τέμνει ορθογώνια κάθε κύκλο που έχει το κέντρο πάνω στη μεσοκάθετη του τμήματος MM' και διέρχεται από τα σημεία M και M' . (Σχ. 4)



- Δυναμικότητα του σχήματος.

Η δυναμικότητα του σχήματος, και αυτό είναι το σημαντικότερο πλεονέκτημα καθώς και η μεγάλη παιδαγωγική αξία του λογισμικού αυτού, εστιάζεται στις ακόλουθες παραμέτρους:

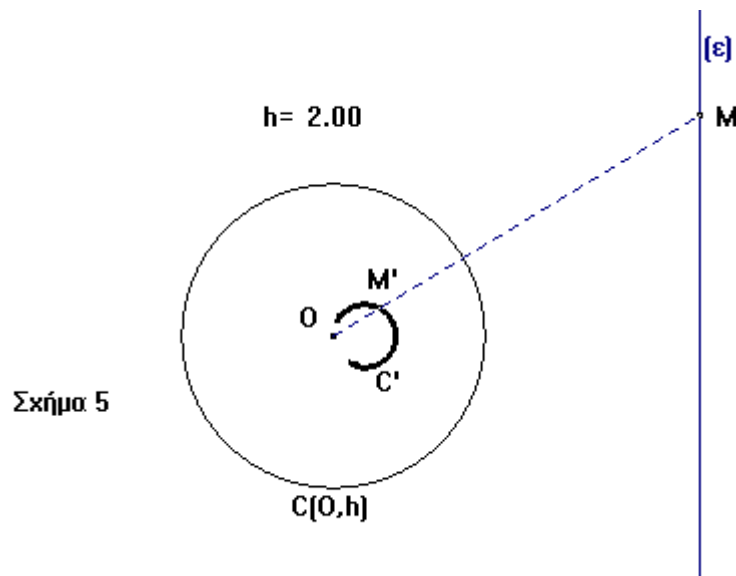
1. Στη μετακίνηση του κέντρου O του κύκλου, δηλαδή του πόλου της αντιστροφής. Με την μετακίνηση αυτή αλλάζουν οι σχετικές θέσεις των σημείων M και M' ενώ παραμένει η δύναμη της αντιστροφής αναλλοίωτη. Η μετακίνηση αυτή γίνεται πολύ απλά με το βέλος επιλογής.

2. Στη μετακίνηση του σημείου M . Η μετακίνηση αυτή που γίνεται πάλι με το βέλος επιλογής, αλλάζει τη θέση του σημείου M και κατά συνέπεια τη θέση του αντιστρόφου σημείου M' .
3. Στην αλλαγή της αριθμητικής επεξεργασίας. Με διπλό κλικ πάνω στην αριθμητική επεξεργασία εμφανίζονται δύο βελάκια – αύξησης ή ελάττωσης- της τιμής h της δύναμης της αντιστροφής. Στην περίπτωση αυτή μεταβάλλεται πάλι η θέση του αντιστρόφου σημείου M' του M .

- Κατασκευή του αντιστρόφου ευθείας

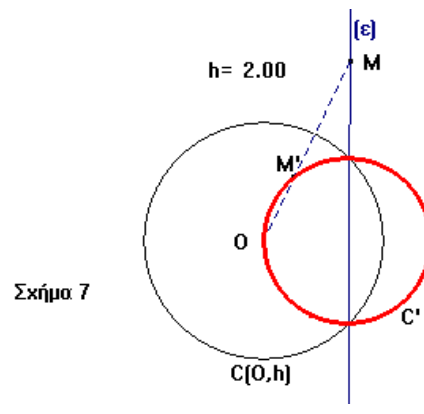
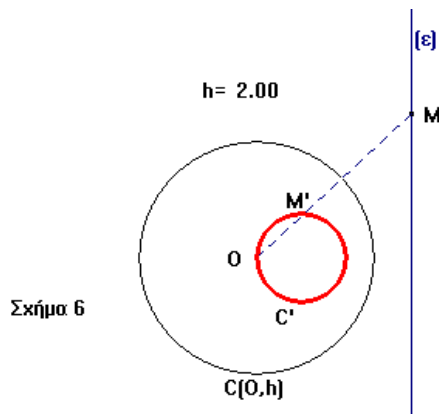
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το αντίστροφο μιας ευθείας (ε) η οποία βρίσκεται σε τυχαία θέση στο επίπεδο όπου έχουμε σχεδιάσει τον κύκλο της αντιστροφής $C(O,h)$.

Λαμβάνουμε ένα σημείο M πάνω στην ευθεία (ε) και στη συνέχεια με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως κατασκευάζουμε το αντίστροφο του σημείου M' . Για να κατασκευάσουμε τώρα την εικόνα των αντίστροφων όλων των σημείων της (ε) θα αναζητήσουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M' όταν μεταβάλλεται το σημείο M . Αυτό το πετυχαίνουμε με τη χρήση της εντολής **γεωμετρικός τόπος** από το μενού των κατασκευών. (Σχ.5)

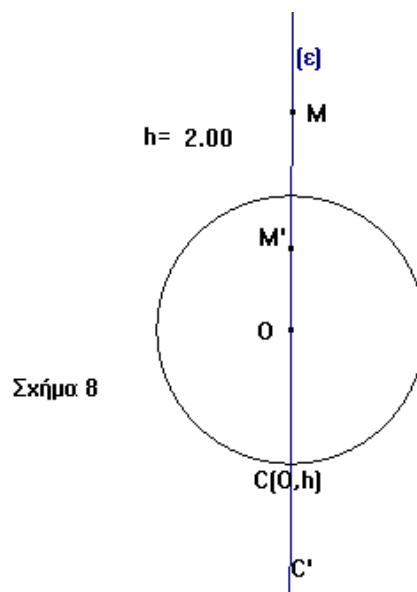


Στο σχήμα 5 φαίνεται ότι το αντίστροφο της ευθείας (ε) είναι ένας κύκλος ο οποίος διέρχεται από τον πόλο O της αντιστροφής. Το πρόγραμμα αναζήτησης του γεωμετρικού τόπου αφήνει ανοιχτό τον

κύκλο C' διότι τα επ' άπειρον σημεία της ευθείας που αντιστρέφονται στο σημείο του πόλου καθώς και τα γειτονικά σ' αυτά δεν επεξεργάζονται από το λογισμικό. Για διευκόλυνση όμως μπορούμε να ολοκληρώσουμε το σχήμα του κύκλου κατασκευάζοντας τον με άλλον τρόπο. Μετακινώντας στη συνέχεια την ευθεία σε διάφορες θέσεις διακρίνουμε τις διάφορες περιπτώσεις. (Σχ. 6 και 7)

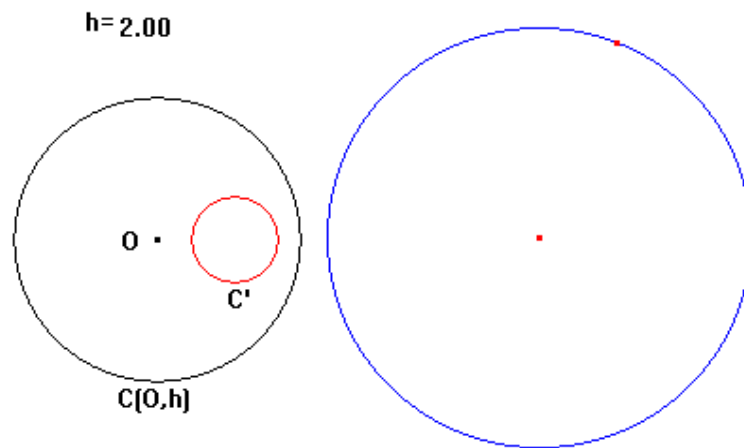


Όταν η ευθεία διέρχεται από τον πόλο O τότε η αντίστροφή της συμπίπτει με τον εαυτό της. (Σχ.8)

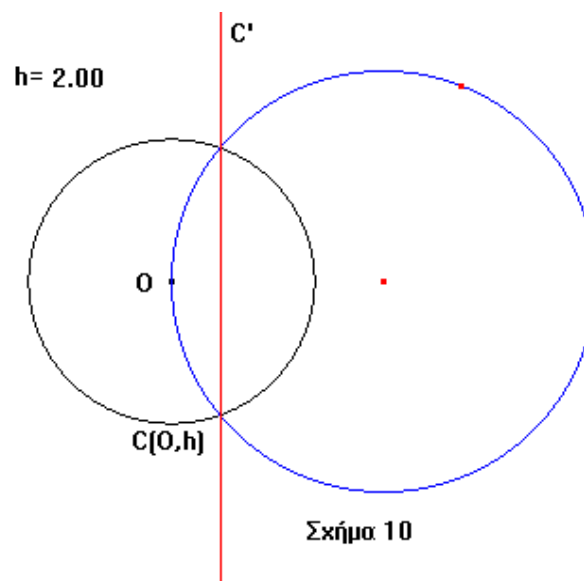


- Κατασκευή αντιστρόφου κύκλου

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε το αντίστροφο ενός κύκλου και να διακρίνουμε ότι γενικά η εικόνα αυτή



Σχήμα 9



Σχήμα 10

είναι κύκλος (Σχ.9) εκτός της περίπτωσης που ο κύκλος διέρχεται από τον πόλο της αντιστροφής οπότε στην περίπτωση αυτή το αντίστροφο του κύκλου γίνεται ευθεία.(Σχ.10)

Παίζοντας με τις διάφορες αυτές περιπτώσεις διαπιστώνουμε ότι:

Θεώρημα I. Το αντίστροφο κύκλου που τέμνει ορθογώνια το βασικό κύκλο $C(O,h)$ ταυτίζεται με τον εαυτό του.

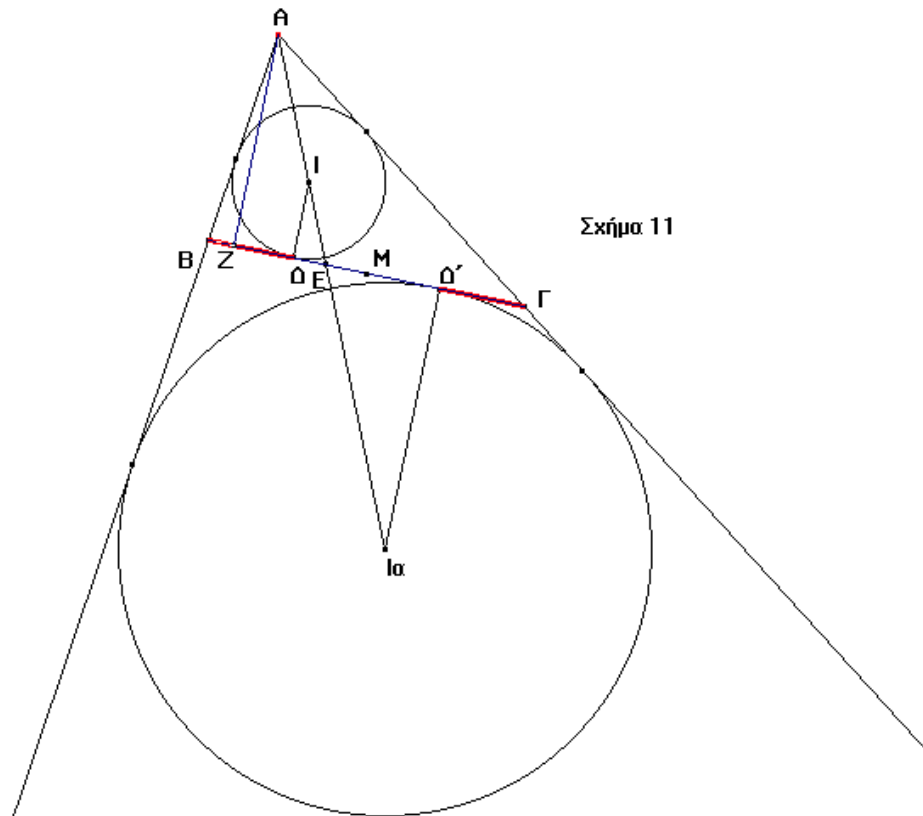
Θεώρημα του Feuerbach

Ο κύκλος του Euler (ή ο κύκλος των εννέα σημείων) ενός τριγώνου $AB\Gamma$ εφάπτεται στον εγγεγραμμένο καθώς και στους τρεις παρεγγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου αυτού.

Επεξεργασία:

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία του μετασχηματισμού της αντιστροφής.

Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ στο περιβάλλον του Cabri-geometry II. Εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε τον εγγεγραμμένο καθώς και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο στη γωνία A . (Σχ. 11)



Πριν ακόμα τοποθετήσουμε τον κύκλο του Euler στο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τις AZ , $I\Delta$ και $I_a\Delta'$ καθέτους προς την $B\Gamma$ και παρατηρούμε ότι:

- Η τετράδα των σημείων A, E, I, I_a είναι **αρμονική**.
- Η τετράδα των σημείων Z, E, Δ, Δ' είναι κι αυτή **αρμονική** διότι είναι προβολή της πρώτης πάνω στην ευθεία που ορίζει η πλευρά $B\Gamma$.

Κι ακόμα:

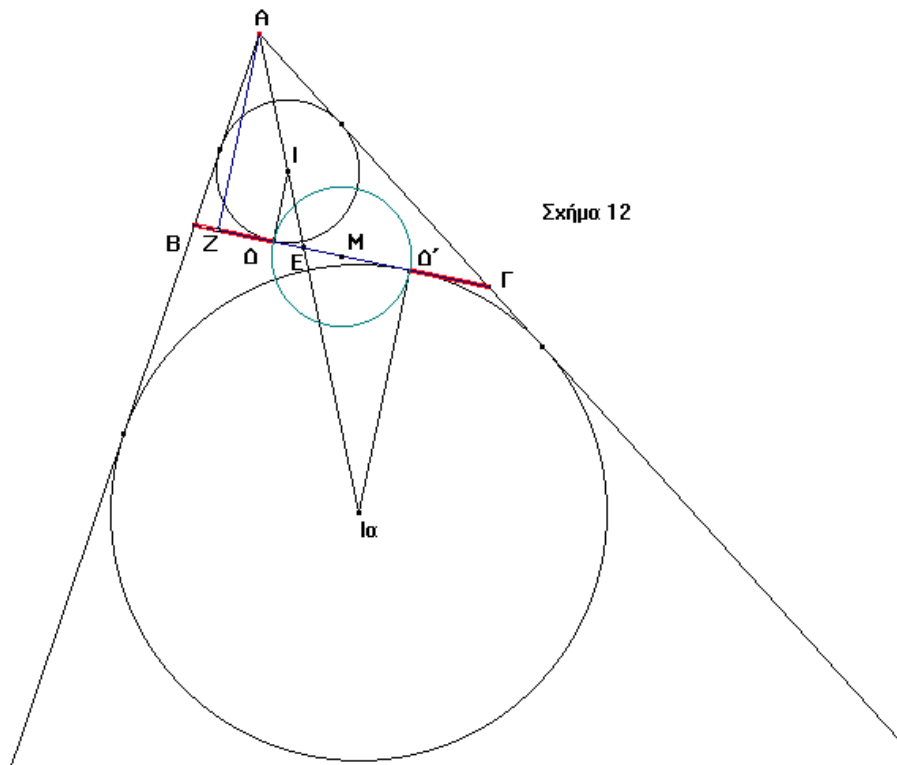
- $B\Delta = \Delta\Gamma = \tau - \beta$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$.
- Το μέσο M του $B\Gamma$ είναι και μέσο του $\Delta\Delta'$.

Τέλος ισχύει:

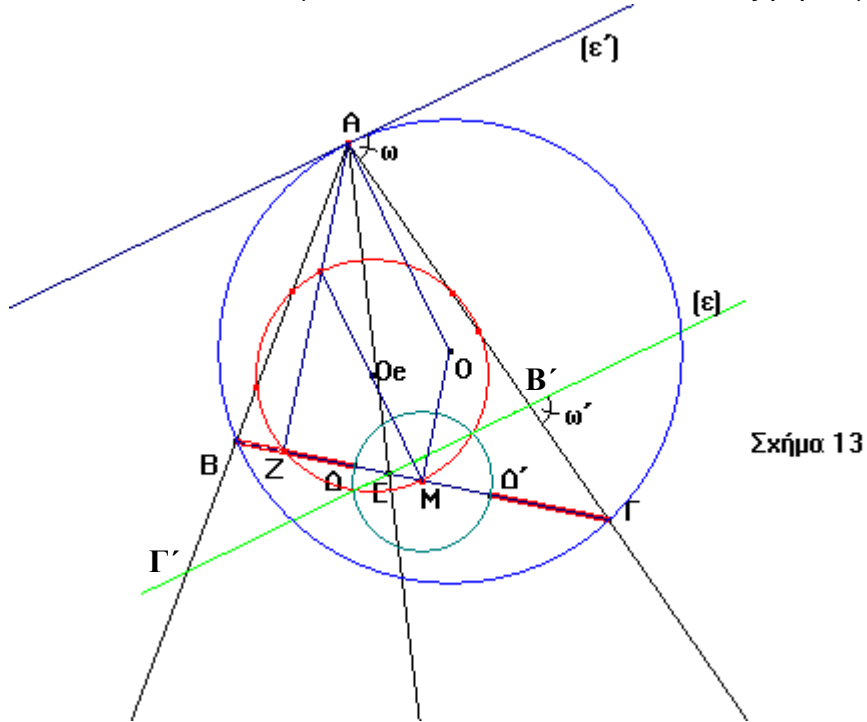
$$\text{➤ } (M\Delta)^2 = (M\Delta')^2 = (MZ)(ME) \quad (2)$$

Θεωρώ στη συνέχεια την αντιστροφή με πόλο το σημείο M και δύναμη τον αριθμό $(M\Delta)^2$.

Η αντιστροφή αυτή θα έχει ως βασικό κύκλο τον $C(M, M\Delta)$. (Σχ. 12) ο οποίος θα τέμνει ορθογώνια τον εγγεγραμμένο και παρεγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα I τα αντίστροφα των κύκλων αυτών θα είναι οι ίδιοι οι κύκλοι αυτοί. (Σχ.12)



Το αντίστροφο του κύκλου του Euler κατά την αντιστροφή $C(M, MA)$
 Αν κατασκευάσουμε τον κύκλο του Euler και αναζητήσουμε την



Σχήμα 13

εικόνα του κύκλου αυτού κατά την ανωτέρω κατασκευή τότε σύμφωνα με το σχήμα 13 θα παρατηρήσουμε τα εξής:

- Η εικόνα του κύκλου αυτού θα είναι η ευθεία (ε) γιατί ο κύκλος διέρχεται από τον πόλο της αντιστροφής.
- Η ευθεία (ε) θα διέρχεται από το σημείο E διότι το σημείο E θα είναι το αντίστροφο του σημείου Z, όπως προκύπτει από τη σχέση (2).
- $(\varepsilon) \parallel (\varepsilon')$ γιατί είναι κάθετες στις παράλληλες OA και MOe
- $\gamma\omega\mu(\omega) = \gamma\omega\mu(\omega')$

Άρα:

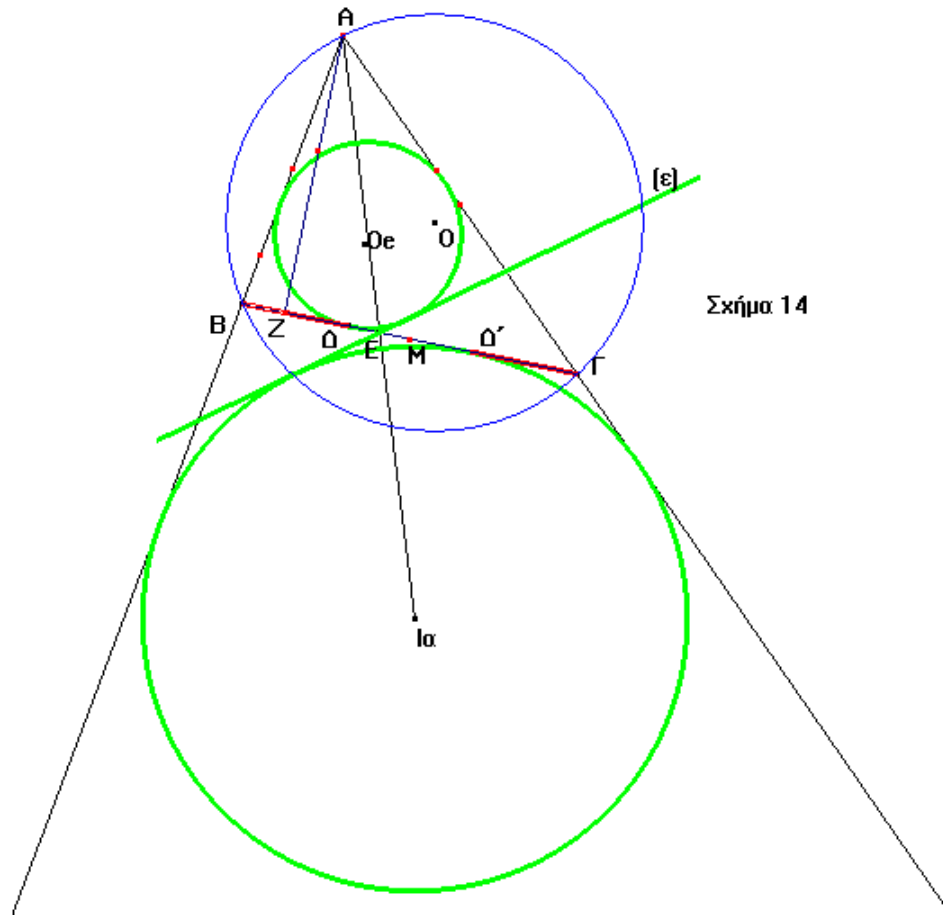
Η (ε) είναι συμμετρική του φορέα της $B\Gamma$ ως προς άξονα συμμετρίας τον AI_a .

Η τελευταία πρόταση αποδεικνύεται συγκρίνοντας τα τρίγωνα AEG και AEG' καθώς επίσης και τα AEB και AEB' .

Συνολική θεώρηση των τριών αντίστροφων σχημάτων

Στο σχήμα 14 εμφανίζονται με παχιά γραμμή τα αντίστροφα σχήματα, δηλαδή οι δύο κύκλοι που είναι οι αντίστροφες εικόνες του εγγεγραμμένου και παρεγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$ καθώς και η ευθεία (ε) η οποία είναι το αντίστροφο του κύκλου του Euler. Η ευθεία αυτή (ε) , ως συμμετρική της $B\Gamma$ ως προς την διχοτόμο AI_α η οποία είναι διάκεντρος των δύο κύκλων, θα είναι η δεύτερη εσωτερική εφαπτομένη των δύο αυτών κύκλων.

Το σημείο βέβαια E θα αποτελεί το εσωτερικό κέντρο ομοιότητας των δύο αυτών κύκλων.



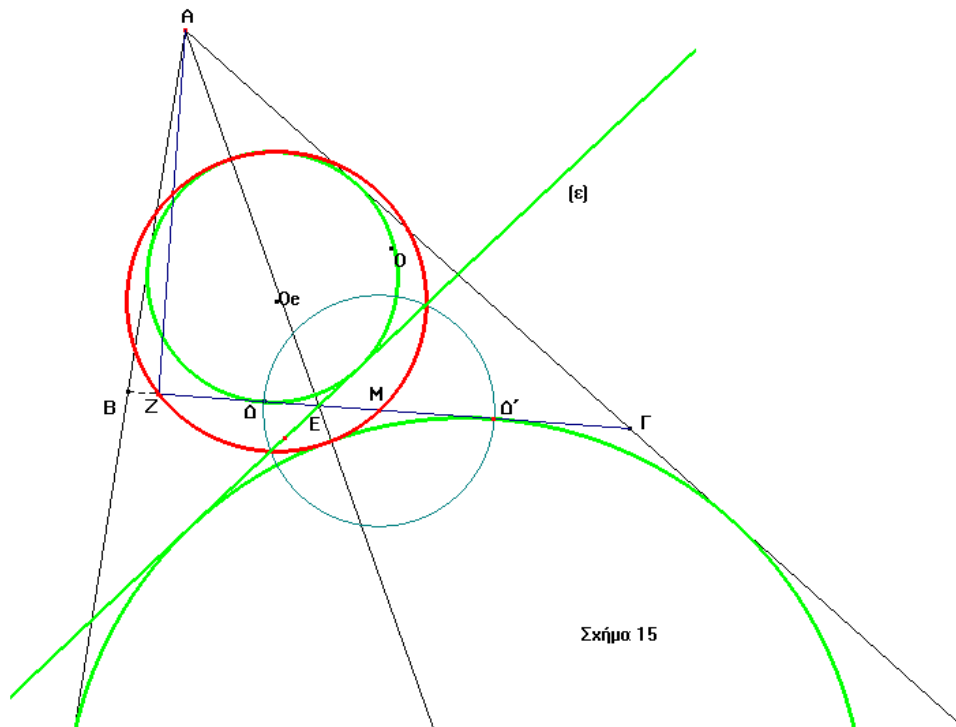
Σχήμα 14

Συμπέρασμα:

Τα σημεία στα οποία η (ε) εφάπτεται στους δύο κύκλους ως εσωτερική εφαπτομένη είναι τα σημεία στα οποία εφάπτονται τα αρχικά σχήματα που αντιστρέψαμε διότι η αντιστροφή είναι μια αντιστοιχία 1-1.

Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν πάρουμε ένα μεταβλητό σημείο στον κύκλο του Euler και σημειώσουμε το αντίστροφό του. Τότε θα διαπιστώσουμε ότι η εικόνα του σημείου επαφής του κύκλου αυτού με τον εγγεγραμμένο κύκλο βρίσκεται στο σημεία επαφής της (ε) με τον ίδιο κύκλο ο οποίος όπως αναφέραμε είναι το αντίστροφο του εαυτού του. Το ίδιο συμβαίνει και με το σημείο επαφής με τον παρεγγεγραμμένο κύκλο. (Σχ. 15)

Τελειώνοντας μπορούμε να πούμε ότι το πρόγραμμα θα μπορούσε να μας υπολογίσει πολλά ακόμα στοιχεία από το πρόβλημα. Όπως για παράδειγμα να βρούμε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής.



Η αλυσίδα του Steiner

Έστω κύκλος $C(O,R)$ και στο εσωτερικό του ένας άλλος $C(K,r)$.
Αν υπάρχει μια ακολουθία κύκλων:

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \text{ όπου } n \in N \text{ και } n \geq 3, (1)$$

έτσι ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους διαδοχικά καθώς επίσης και με τους αρχικούς $C(O,R)$ και $C(K,r)$, τότε όπως και να κατασκευασθεί ο

πρώτος κύκλος τους ακολουθίας (1) η αλυσίδα των κύκλων (1) θα κλείνει.

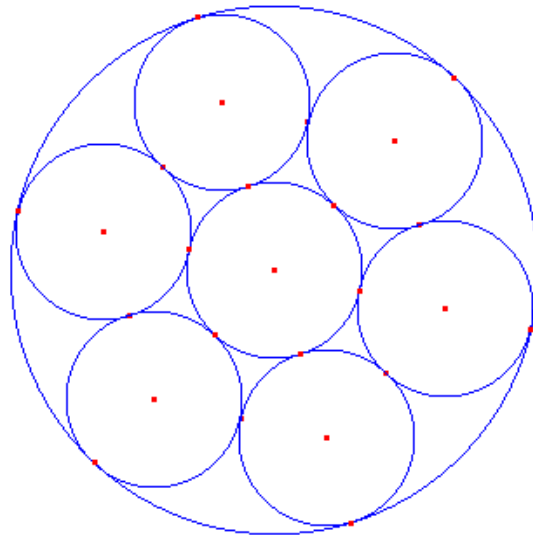
Η πρόταση αυτή έχει ενδιαφέρον και πολλές προεκτάσεις. Στην παρούσα εργασία θα αρκεσθούμε στην κατασκευή του σχήματος με τη βοήθεια της αντιστροφής.

Η αντιστροφή ως γνωστόν μπορεί και μετακινεί έναν κύκλο από μια θέση και τον οδηγεί σε κάποια άλλη ενώ ταυτόχρονα αλλάζει και το μήκος της ακτίνας του.

Αν τώρα εφαρμόσουμε κάποια αντιστροφή κατάλληλα επιλεγμένη στο σύνολο των κύκλων της αλυσίδας του Steiner τότε ο εσωτερικός κύκλος $C(K,r)$ και η ακολουθία των κύκλων (1) θα διαταχθούν στο εσωτερικό του κύκλου $C(O,R)$ με απλούστερο τρόπο. Ο κύκλος $C(K,r)$ θα είναι ομόκεντρος του μεγάλου και οι υπόλοιποι της αλυσίδας θα είναι ίσοι με τα κέντρα τους τοποθετημένα σε ομόκεντρο κύκλο με τον αρχικό. Άρα αμέσως προκύπτει η κατασκευή.

Κατασκευή

Θεωρώντας τον αρχικό κύκλο $C(O,R)$, κατασκευάζουμε πρώτα τον εσωτερικό κύκλο με δεδομένη ακτίνα και με κέντρο το κέντρο του αρχικού κύκλου και στη συνέχεια τους έξι κύκλους της αλυσίδας με κέντρα στις



$R= 4.00$

$r= 1.3334$

Σχήμα 16

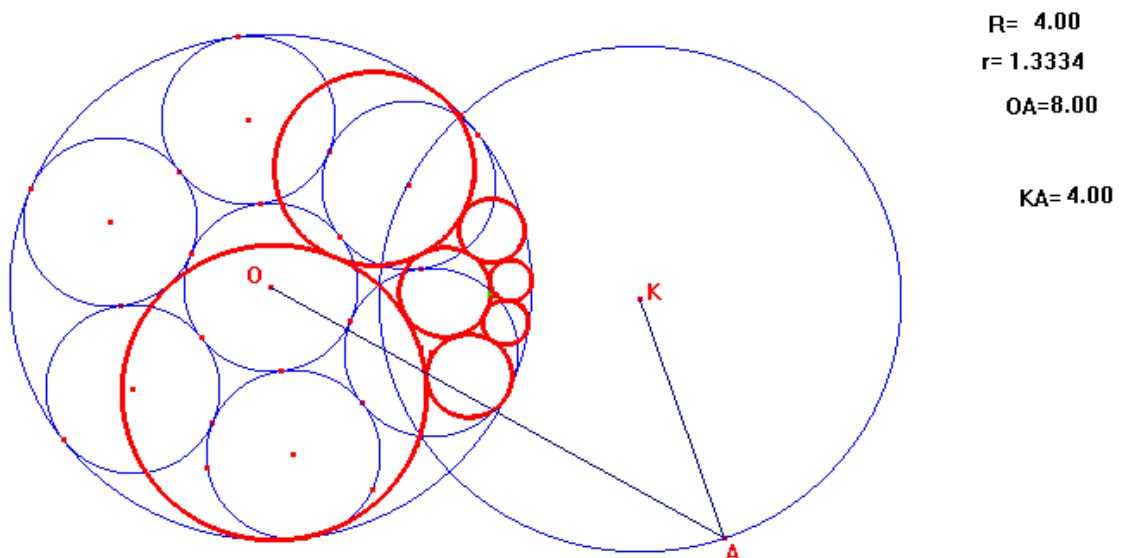
κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου.(Σχ.16)

Η κατασκευή των έξι αυτών κύκλων επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της εντολής κανονικό πολύγωνο και στη συνέχεια με κατάλληλη επιλογή των στοιχείων R και r των αριθμητικών επεξεργασιών.

Στο σχήμα 16 έχει επιλεγεί το κανονικό εξάγωνο, θα μπορούσαμε όμως να θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο ανάλογα με πόσους κύκλους θα θέλαμε να περιέχει η αλυσίδα μας. Βέβαια το λογισμικό αυτό κατασκευάζει οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο πράγμα που είναι αδύνατο με χάρακα και διαβήτη.

Η εφαρμογή της αντιστροφής

Επιλέγουμε με ελεγχόμενα στοιχεία (Πόλο και δύναμη) μια αντιστροφή με την απαίτηση να διατηρεί ο αρχικός κύκλος $C(O,R)$ σταθερή θέση. Αυτό γίνεται αν ο βασικός κύκλος της αντιστροφής τέμνει ορθογώνια τον κύκλο αυτό. Στο σχήμα 17 φαίνεται η εφαρμογή μιας τέτοιας αντιστροφής. Αν μεταβάλλουμε τώρα τα στοιχεία της αντιστροφής



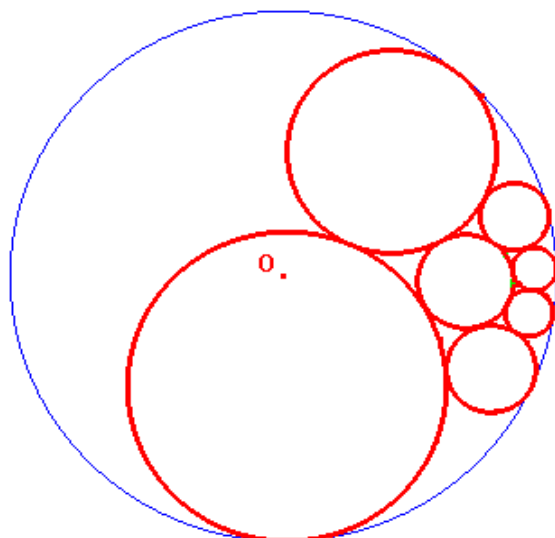
Σχήμα 17

αυτής θα δούμε θεαματικά αποτελέσματα.

Επίλογος

Πολλές ακόμα ιδιότητες των δύο αυτών προτάσεων θα μπορούσαν να αναπαρασταθούν με πολύ δυναμικό τρόπο στο περιβάλλον του λογισμικού αυτού. Εκείνο που έχει μεγάλη παιδευτική αξία είναι ο

δυναμικός τρόπος με τον οποίο εμφανίζονται οι συσχετίσεις των



Σχήμα 18

γεωμετρικών και αριθμητικών στοιχείων.

Εκείνο που απομένει είναι να κατανοήσει ο εκπαιδευτικός της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπ/σης ώστε σιγά – σιγά να το εισάγει στην καθημερινότητά του.

Βιβλιογραφία

1. Τσίντσιφας Γεώργιος. *Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί. (Σημειώσεις)*
2. Τσίντσιφας Γεώργιος. *Γεωμετρία. Θεωρία και Ασκήσεις.*
3. Σπ. Γ. Κανέλλου. *Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ'Ε'ΣΤ'Γυμνασίου. Θετικής Κατευθύνσεως. (ΟΕΔΒ, 1975)*
4. Γιάννη Ντάνη. *Γεωμετρία Ι.*
5. Α. Πάλλα. *Μεγάλη Γεωμετρία.*
6. Γ. Σ. Σταυριανίδου. *Γεωμετρία. ΣΤ' Έκδοσις. Θεσσαλονίκη 1972.*