

ΘΕΜΑ 1

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ

❶ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

❷ Αν η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) τότε η f είναι πάντα συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

❸ Αν f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$

❹ Αν η f με πεδίο ορισμού το A είναι συνεχής στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$.

❺ Αν υπάρχει το όριο στο x_0 μιας συνάρτησης τότε αυτό είναι μοναδικό.

B. Να αντιστοιχίσετε τα όρια της πρώτης στήλης με τα αποτελέσματα της δεύτερης στήλης (πιθανόν κάποια όρια να έχουν ίδιο αποτέλεσμα)

❶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x + 3)$

❷ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \eta \mu \frac{1}{x})$

❸ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{|x|}$

❹ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 4x}{\eta \mu 5x}$

❺ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

❻ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 5x + 6| + |x - 2| - 1}{x^2 - 9}$

❼ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2007^x + 2008^x}{2009^x + 1}$

❽ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - x)$

A) 1

B) 0

Γ) $+\infty$

Δ) $-\infty$

E) δεν υπάρχει

Z) $\frac{1}{6}$

H) $-\frac{1}{2}$

Θ) $\frac{4}{5}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(2\alpha x)}{x}, & x < 0 \\ \alpha^2 + 1, & x = 0 \\ (x^2\eta\mu\frac{1}{x}) - \beta, & x > 0 \end{cases}$

❶ Να δείξετε ότι i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2\alpha x)}{x} = 2\alpha$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2\eta\mu\frac{1}{x}) = 0$

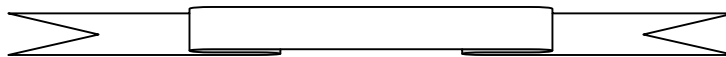
❷ Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

❸ Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$ να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-a} + \frac{\ln x}{x+\beta} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$

ΘΕΜΑ 3

A. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 και συνεχής στο \mathbb{R} και ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+1}{x-2} = 4$, να υπολογίσετε το $f^{-1}(-1)$.



B. Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = x^3 + x + \ln x - 1$, $x \in (0, 1]$

❶ Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα

❷ Να βρείτε το σύνολο τιμών της g .

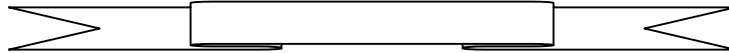
❸ Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να είναι $g(x_0) = \frac{2008}{2009}$

❹ Να λύσετε την εξίσωση $g(x^{2007}) + g(x^{2008}) + g(x^{2009}) = 3$

Χ. Κ Α Ρ Δ Α Σ Η Σ

ΘΕΜΑ 4

A. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) + x = \alpha\beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha < 1 < \beta$.
Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$



B. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w όπου $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και τα όρια $L_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\alpha x^2 - (2\beta + 6) \cdot x + \alpha - \beta}{x^2 - 5x + 4}$, $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - |w| \cdot x \right)$

τα οποία υπάρχουν και επιπλέον $L_1 \in \mathbb{R}$, $L_2 \in \mathbb{R}$

❶ Να δείξετε ότι η εικόνα του z κινείται στην ευθεία $y = x - 2$ ενώ η εικόνα του w κινείται στον μοναδιαίο κύκλο

❷ Να υπολογίσετε το όριο $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2a^x + \beta^{x+1}}{\beta^x + a^x}$ όπου a, β οι

πραγματικοί της εκφώνησης με επιπλέον περιορισμό $a, \beta > 0$

ΘΕΜΑ ☠

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 4008x + 2009 = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$a \cdot f\left(\frac{2a + \beta}{3}\right) + \frac{a + \beta}{2} \cdot f\left(\frac{a + \beta}{2}\right) + \beta \cdot f\left(\frac{a + 2\beta}{3}\right) = 2004 f(\xi)$$