

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β')**
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

$$\delta) \quad (\sigma\varphi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$$

$$\epsilon) \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g' \text{ είναι} \\ \text{συνεχείς συναρτήσεις στο } [\alpha, \beta]$$

Μονάδες 10

Απάντηση

A1. Θεώρημα μονοτονίας

A2. Ορισμός

A3. Ορισμός

A4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) !!!

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$

Μονάδες 6

Απάντηση

Αποδεικνύουμε ότι ισχύει η ισότητα: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ (σ) (θέλει απόδειξη).

B1. Έχουμε $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 \stackrel{(\sigma)}{\Leftrightarrow} 2|z|^2 + 2 \cdot 1^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 1$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των Z είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

ή

Αν M η εικόνα του Z στο μιγαδικό επίπεδο και $A(1,0)$, $B(-1,0)$ τότε η (1) είναι ισοδύναμη με την $MA^2 + MB^2 = AB^2$. Το AB φαίνεται από το M υπό ορθή γωνία οπότε ο γεωμετρικός τόπος των M είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

B2. Από την (σ) έχουμε:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$$

ή

Αφού οι z_1, z_2 κινούνται στον παραπάνω κύκλο και $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ το τρίγωνο με OAB με A την εικόνα του z_1 και B την εικόνα του z_2 είναι ορθογώνιο στο O . Άρα

$$|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |2\overrightarrow{OM}| = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

B3. Έχουμε $|w - 5\bar{w}| = 12 \stackrel{w=x+yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 5x + 5yi| = 12 \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow |-2x + 3y| = 6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 9y^2} = 6 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (2)$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των W είναι έλλειψη με μήκη αξόνων $2\alpha=6$, $2\beta=4$

Είναι $|w - 5\bar{w}| = 12$ και $|w - 5\bar{w}| \leq |w| + |5\bar{w}| = 6|w|$ Άρα $6|w| \geq 12 \Rightarrow |w| \geq 2$. Αν

$$|w| = 2 \stackrel{w=x+yi}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2 \text{ και από τη (2) έχουμε } x = 0. \text{ Άρα } w = 2i \text{ ή } w = -2i$$

δηλαδή η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι το 2.

Είναι $|w - 5\bar{w}| = 12$ και $|w - 5\bar{w}| \geq ||w| - |5\bar{w}|| = 4|w|$ Άρα $4|w| \leq 12 \Rightarrow |w| \leq 3$ Αν

$|w| = 3 \Leftrightarrow \overset{w=x+yi}{x^2 + y^2 = 9} \Leftrightarrow x^2 = 9 - y^2$ και από τη (2) έχουμε $y = 0$. Άρα $w = 3$ ή $w = -3$ και έτσι η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το 3.

ή

Οι εικόνες των w απέχουν από το κέντρο της έλλειψης περισσότερο απ' ότι οι κορυφές της $B(0,2)$ και $B'(0,-2)$ και λιγότερο απ' ότι οι κορυφές της $A(3,0)$ και $A'(-3,0)$. Συνεπώς το ελάχιστο του $|w|$ είναι 2 και συμβαίνει όταν $w = 2i$ ή $w = -2i$ και το μέγιστο του $|w|$ είναι 3 και συμβαίνει όταν $w = 3$ ή $w = -3$.

ή

$$w = x + yi \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ |w| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9} \\ |w| = \sqrt{x^2 + \frac{36 - 4x^2}{9}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9} \\ |w| = \frac{\sqrt{36 + 5x^2}}{3} = f(x) \end{cases}, x \in [-3, 3]$$

Μελετώντας την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f προκύπτει το μέγιστο και το ελάχιστο του $|w|$

B4. Είναι $2 \leq |w| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -|w| \leq -2$ και $|z| = 1$ άρα

$1 - 3 \leq |z| - |w| \leq 1 - 2 \Rightarrow -2 \leq |z| - |w| \leq -1 \Rightarrow 1 \leq ||z| - |w||$ και εφόσον $||z| - |w|| \leq |z - w|$ θα είναι: $1 \leq |z - w|$. Ακόμα $|z - w| \leq |z| + |w| \leq 1 + 3 = 4$. Άρα $1 \leq |z - w| \leq 4$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1) \ln x - 1$, $x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες 7

Απάντηση

Γ1. Είναι $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x-1}{x}$, $x > 0$.

Για $0 < x < 1$ είναι $\ln x < 0$, $x-1 < 0$ και συνεπώς $f'(x) < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$, $x-1 > 0$ και συνεπώς $f'(x) > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0, 1]$ και έτσι το σύνολο

$$\text{τιμών της στο } (0, 1] \text{ είναι το } f((0, 1]) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ και έτσι το σύνολο

$$\text{τιμών της στο } [1, +\infty) \text{ είναι το } f([1, +\infty)) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty)$$

$$\text{Τελικά } f((0, +\infty)) = [-1, +\infty)$$

Γ2. Είναι

$$x^{x-1} = e^{2013}, x > 0 \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2013 \Leftrightarrow f(x) + 1 = 2013 \Leftrightarrow f(x) = 2102$$

Η εξίσωση $f(x) = 2102$ έχει μία μοναδική ρίζα στο $(0, 1]$, διότι η f είναι γνησίως

$$\text{φθίνουσα και το σύνολο τιμών της είναι το } f((0, 1]) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [-1, +\infty).$$

Η εξίσωση $f(x) = 2102$ έχει μία μοναδική ρίζα στο $[1, +\infty)$, διότι η f είναι γνησίως

$$\text{αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι το } f([1, +\infty)) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, +\infty).$$

Γ3. Έστω η συνάρτηση $h(x) = f'(x) + f(x) - 2012$, $x \in [x_1, x_2]$ η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) < 0$, διότι η f' είναι αρνητική στο $(0, 1]$ όπου βρίσκεται η x_1 .

Είναι $h(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) > 0$ διότι η f' είναι θετική στο $[1, +\infty)$ όπου βρίσκεται η x_2 .

Από θεώρημα Bolzano έπεται το ζητούμενο.

ή

εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ για τη συνάρτηση

$$h(x) = (f(x) - 2012)e^x$$

Γ4. Είναι $g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\ln x \geq 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$, αφού $(x-1)$, $\ln x$ είναι ομόσημοι αριθμοί για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$.

Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^e (x-1)\ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x\right)(\ln x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right) dx = \frac{e^2}{2} - e - \left[\left(\frac{x^2}{4} - x\right)\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e + \frac{1}{4} - 1 = \frac{e^2 - 3}{4} \tau.μ. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t) dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot |f(t)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \ln \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, \quad x > 0$$

όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x > 0 \text{ (μονάδες 4).}$$

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Μονάδες 4

Απάντηση

Δ1. Έστω $h(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}, \quad x \in (0, +\infty)$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$$h'(x) = f(x^2-x+1)(2x-1) - \frac{1-2x}{e}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Από την δοσμένη ανισότητα προκύπτει ότι: $h(x) \geq h(1), \quad x \in (0, +\infty)$, δηλαδή η συνάρτηση παρουσιάζει στο 1 ολικό ελάχιστο οπότε από Fermat ισχύει: $h'(1) = 0 \Rightarrow$

$$f(1) = -\frac{1}{e}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Έτσι, θα πρέπει να διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Όμως $f(1) = -\frac{1}{e}$ και συνεπώς $f(x) < 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

ή

για το πρόσημο της συνάρτησης f μπορούμε να ακολουθήσουμε και την εξής διαδικασία:

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Έτσι, θα πρέπει να διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Έστω ότι $f(x) > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Από την ανισότητα $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ και για $x = \frac{1}{2}$ προκύπτει ότι $\int_{\frac{3}{4}}^1 f(t)dt \leq -\frac{1}{4e}$

το οποίο είναι άτοπο διότι η f είναι θετική στο διάστημα $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ και έτσι θα έπρεπε

$\int_{\frac{3}{4}}^1 f(t)dt > 0$. Άρα πρέπει $f(x) < 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Έστω $g(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e, \quad x \in (0, +\infty)$. Ισχύει: $\ln x - x = g(x) \cdot f(x), \quad x \in (0, +\infty)$ (1).

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και $g(x) \neq 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$, αφού το πρώτο μέλος της ισότητας (1) είναι αρνητικό: $\ln x \leq x - 1 < x, \quad x \in (0, +\infty)$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για την g έχουμε: $g'(x) = \frac{\ln x - x^{(1)}}{f(x)} = g(x) \Rightarrow g(x) = ce^x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$

Όμως $g(1) = e$ οπότε $g(x) = e^x, \quad \forall x \in (0, +\infty)$ και $f(x) = e^{-x}(\ln x - x), \quad x > 0$

Δ2. Έστω $\frac{1}{f(x)} = y, \quad x > 0$ Είναι $y < 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x - x} = 0$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty - 0 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$

Το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta \mu y}{y^2} - \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta \mu y - y}{y^2} \right)^{0/0} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{(\eta \mu y - y)'}{(y^2)'} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sigma \upsilon \nu y - 1}{2y} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Δ3. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $F'(x) = f(x)$, $x > 0$ και

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) = -e^{-x}\left(\ln x - x + 1 - \frac{1}{x}\right) > 0, \quad x > 0,$$

διότι $\ln x - x + 1 \leq 0$, $-\frac{1}{x} < 0$, $\forall x > 0$.

Άρα η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $x_1 \in (x, 2x)$, $x_2 \in (2x, 3x)$ τέτοια ώστε:

$$F'(x_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x} \text{ και } F'(x_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}.$$

Όμως η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$,

$$\text{οπότε } F'(x_1) < F'(x_2) \Rightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \Rightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x)$$

Δ4. Έστω $G(x) = 2F(x) - F(3\beta) - F(\beta)$, $x \in [\beta, 2\beta]$ Για την G ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Bolzano αφού είναι συνεχής και $G(\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$, αφού η F είναι γνησίως φθίνουσα και $G(2\beta) = 2F(2\beta) - F(3\beta) - F(\beta) < 0$ από το **Δ3**.

Άρα θα υπάρξει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε: $G(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$

Το ξ είναι μοναδικό αφού η G είναι γνησίως φθίνουσα.

$$G'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0, \quad x \in [\beta, 2\beta]$$

Κώστας Σερίφης