

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρχουν m και M τέτοια ώστε να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Προφανώς ισχύει $\alpha \leq \frac{2\alpha + \beta}{3} \leq \beta$, $\alpha \leq \frac{\alpha + 2\beta}{3} \leq \beta$ και $\alpha \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \beta$

$$\text{Επομένως } m \leq f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) \leq M \Rightarrow \alpha \cdot m \leq \alpha \cdot f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) \leq \alpha \cdot M \quad (1)$$

$$m \leq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq M \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot m \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot M \quad (2)$$

$$m \leq f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) \leq M \Rightarrow \beta \cdot m \leq \beta \cdot f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) \leq \beta \cdot M \quad (3)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1), (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{3(\alpha + \beta)}{2} m \leq \alpha \cdot f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) + \frac{\alpha + \beta}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \beta f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) \leq \frac{3(\alpha + \beta)}{2} M$$

$$2004m \leq \alpha \cdot f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) + \frac{\alpha + \beta}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \beta f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) \leq 2004M$$

$$m \leq \frac{\alpha \cdot f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) + \frac{\alpha + \beta}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \beta f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{2004} \leq M$$

Άρα υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\frac{\alpha \cdot f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) + \frac{\alpha + \beta}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \beta f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{2004} = f(\xi), \text{ δηλ}$$

$$\alpha \cdot f\left(\frac{2\alpha + \beta}{3}\right) + \frac{\alpha + \beta}{2} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \beta f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) = 2004f(\xi)$$