Επαναληπτικές ασκήσεις ΕΠΑΛ

www.mathematica.gr

Σχ. Έτος 2011-12

Περιεχόμενα

1 Επαναληπτικές ασκήσεις Όρια - Συνέχεια **2**

2 Επαναληπτικές ασκήσεις παραγώγων **8**

3 Επαναληπτικες ασκήσεις ολοκληρωμάτων **15**

4 Επαναληπτικές ασκήσεις στατιστικής **19**

1 Επαναληπτικές ασκήσεις ΄Οριa - Συνέχεια

Άσκηση 1.1 .

Να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός α στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $f(x) = 2x - 3\alpha$ όταν $f(0) - f(1) = f(-1)$

ii)$g(x) = \dfrac{2x+\alpha}{-4x+8}, x \neq 2$ όταν $2\lim\limits_{x\to 1} g(x) - 3\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 5$

iii) $h(x) = \begin{cases} -3x + \alpha - 1, & x \leq 0 \\ 3 - 2\ln x, & , x > 0 \end{cases}$, όταν $3h(-2) - 2h(e) = 4\alpha - 5$.

Άσκηση 1.2 .

Να υπολογιστούν τα όρια:

$A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ $\qquad B = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{-x+2} + x}{3 - \sqrt{x^2+5}}$

Άσκηση 1.3 .

Να υπολογιστούν τα όρια:

$A = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3\sqrt{x+2} - 2\sqrt{5x-1}}{4x^3 - 15x - 2}$

$B = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2e^x - 3xe^x + e^x}{x^2 f(x) - xf(x)}$ όπου f συνεχής συνάρτηση , της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1, 2012)$.

Άσκηση 1.4 .

Δίνονται οι συνάρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = \sqrt{x-1} + 3$

α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{f(x) - 1}{x^2 - 5x + 6} \right)$.

γ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2g(x) - 4x}{8 - x^3} \right)$.

δ. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = f(3) - 2g(5) + f(0)$.

Άσκηση 1.5 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \alpha x - 3\alpha}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}, & x < 2 \\ x - \gamma, & x = 2 \\ \dfrac{\beta(\sqrt{x^2+12} - 4)}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$

α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(-1, 1)$, να δείξετε οτι $\alpha = 4$

Για $\alpha = 4$

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

γ. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. δ. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Άσκηση 1.6 .

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

α. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-9}{2x^2-9x+9}\right)$

β. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}\right)$

γ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}\right)$

δ. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-x}\right)$

ε. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+2}-2}\right)$

στ. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{\sqrt{x^2+5}-3}\right)$

ζ. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^4+5x^3+3x^2+1}{x^2+x}\right)$

Άσκηση 1.7 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+x}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\left[\left(\sqrt{x+5}-2\right)f(x)\right]$.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{f(x)}{x^2-4}\right)$.

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}, x\in(1,+\infty)\\ \alpha, \qquad\qquad , x=1\end{cases}$.

δ. Να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Άσκηση 1.8 .

Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f\,(x)=\alpha\ln x+2\beta\mu\varepsilon x>0$ όταν η γραφική παράσταση της $f(x)$ διέρχεται από τα σημεία $(1,6)$ και $(e,-3)$.

β) $g(x)=\begin{cases}\alpha x-2,, x\neq 3\\ \beta^2+2a-1, x=3\end{cases}$

γ) $h(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}-3\alpha, & -2\le x<8\\ \beta\sqrt{x+2}, & x\ge 9\end{cases}$ όταν η γραφική παράσταση της $h(x)$ διέρχεται από τα σημεία $(2,\alpha^2+2)$ και $(9,11\alpha)$.

Άσκηση 1.9 .

Δινεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2+2x+1}-1}{x}, x<0\\ \alpha+\beta \qquad\qquad , x=0\\ x^2+\alpha x-\beta \qquad , x>0\end{cases}$

α. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

β. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

γ. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποιες η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

δ. Για τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = 2f(0) - f(1) + f(-1)$.

Άσκηση 1.10 .

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x < -1 \\ \kappa x + 2\mu & , -1 \le x \le 1 \\ \frac{x^3+6x^2-7x}{x^2-x} & , x > 1 \end{cases}$

όπου κ, μ πραγματικοί αριθμοί. Να υπολογιστούν :

α) Τα όρια $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

β) Τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

γ) Τα κ, μ αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Άσκηση 1.11 .

Με δοσμένο το σχήμα που ακολουθεί :

Α) Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά:

α) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \ldots$

β) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \ldots$

γ) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \ldots$

δ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ldots$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ldots$

στ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \ldots$

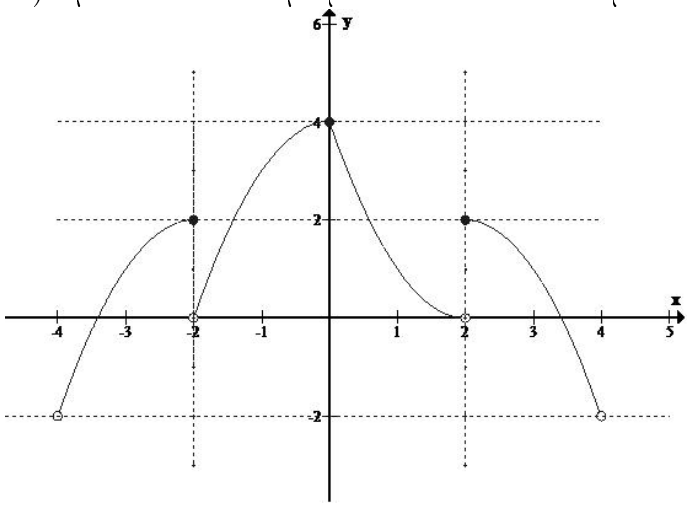
ζ) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \ldots$

η) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \ldots$

Β) Βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι ασυνεχής.

Γ) Βρείτε τα διαστήματα που η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι συνεχής.

Δ) Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.



Άσκηση 1.12 .

΄Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2-\beta x+3 & x<-1 \\ 3\alpha-6 & x=-1 \\ \frac{x^2+\beta}{2+x} & x>-1 \end{cases}$ με $\alpha,\beta\in R$

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

iv. Για $\alpha=-2$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=-1$.

Άσκηση 1.13 .

΄Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{\alpha\sqrt{x+3}-2}{2x-2} & -3\le x<1 \\ \frac{5\alpha}{8}+2\beta & x=1 \\ \frac{2x^2-3x+1}{x^2-x} & x>1 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

δ) Για $\alpha=8$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

ε) Για $\alpha=8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=f(-2)-f^2(2)$.

Άσκηση 1.14 .

΄Εστω οι συναρτήσεις : $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\le k \\ 4x-1 & x>k \end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases} f(x)-k^2 & x\neq 2 \\ -4k^3-3k & x=2 \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to k^+} f(x)$.

γ) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό k ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_1=k$.

Για $k=-1$: δ) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

ε) να εξετάσετε εαν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_2=2$.

Άσκηση 1.15 .

΄Εστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} 3ae^{x-5}-2x & x\le 5 \\ 2\ln(x-4)+3\beta+2\alpha & x>5 \end{cases}$ και

$g(x)=\begin{cases} \alpha\ln(x^2+e)+2011^x & x\neq 0 \\ 3-\beta & x=0 \end{cases}$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$.

iii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

iv. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση f στο $x_1 = 5$ και η συνάρτηση g στο $x_2 = 0$.

v. Για $\alpha = 4$ και $\beta = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$K = 2f(0) - 3f(e+4) - g^2(0) - 2012$.

Άσκηση 1.16 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 + 3x}, & x > 3 \\ \\ \lambda^2 x - 11 & x \leq 3 \end{cases}$

α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

γ. Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο β. ερώτημα να υπόλογίσετε το $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - (\lambda^2+2)x + 5}{x - 5}$.

Άσκηση 1.17 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x - 10}{x + 1 - \sqrt{x+7}}, & x > 2 \\ \\ \alpha x^2 - 5x + 4\alpha, & x \leq 2 \end{cases}$

α. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha \in R$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R.

γ. Για $\alpha = 2$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right)$.

Άσκηση 1.18 .

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ και $g(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$.

α. Να προσδιορίσετε τα πεδία ορισμού των f και g.

β. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού και τον τύπο για την συνάρτηση $h(x) = f^2(x) \cdot g(x)$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$.

δ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}} \left(\dfrac{f(x) - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} \right)$.

Άσκηση 1.19 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 3-\alpha x^2, & \alpha\nu\ |x|<1 \\ 5x^2, & \alpha\nu\ x=1 \ \ \acute{\eta}\ \ x=-1 \\ \frac{\beta}{|x|}, & \alpha\nu\ |x|>1 \end{cases}$

α.Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$.

β.Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

γ. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R.

δ. Για $\alpha=-2$ και $\beta=5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f(0)+f(2)-4f(\frac{1}{2})$.

Άσκηση 1.20 .

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\left(x\right)=\sqrt{5x+10}, x\geq -2$ και $g\left(x\right)=x^2+3$. i. Να αποδείξετε ότι $f\left(3+h\right)=\sqrt{5h+25}, h\geq -5$ και $g\left(3+h\right)=h^2+6h+12$. ii. Να υπολογίσετε τα όρια:

$A=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{h}$

$B=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g\left(3+h\right)-g\left(3\right)}{h}$

$C=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{g\left(3+h\right)-g\left(3\right)}$

$D=\lim\limits_{h\to -1}\dfrac{f\left(3+h\right)-f\left(2\right)}{3h+g(0)}$.

2 Επαναληπτικές ασκήσεις παραγώγων

Άσκηση 2.1 *Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:.*

$$f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x} + x^2 e^x \eta\mu x - x^3 ln x - 2012$$
$$g(x) = \left(4x^2 + 3x - 2\right)\left(2x^2 - 5x + 2\right) - e^4$$
$$h(x) = \frac{x^2 + 3x}{5x^2 - 20} - x ln 5$$
$$k(x) = \frac{x^2 - 3x}{e^x} - \sqrt{3}$$

Άσκηση 2.2 *Να εξετάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα :.*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - \sqrt{2}$$
$$g(x) = x^2 e^x - \ln 3$$
$$h(x) = \frac{\ln x}{x}$$
$$s(x) = e^x - x$$

Άσκηση 2.3 *Δίνεται η συνάρτηση: .*

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3, x \in R$

α. Να βρεθούν f' και f''

β. Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{\sqrt{x+2} - 2} \kappa\alpha\iota \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

γ. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f

Άσκηση 2.4 *Δίνεται η συνάρτηση .*

$f(x) = -2x^3 + \alpha x^2 + 12x + 1, \alpha \in R, x \in R$

α. Αν $f'(-2) = f'(1)$, να δείξετε οτι $\alpha = -3$

Για $\alpha = -3$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τοπικά ακρότατα.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f'(x)}{6}, & x \geq 1 \\ \\ \kappa x + \lambda \ , x < 1 \end{cases}$

γ. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in R$ για τις οποίες η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0 = 1$

Άσκηση 2.5 *Δίνεται η συνάρτηση .*

$f(x) = \alpha \ln x - x^2$ με $f'(4) = -6$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in R$

γ. Για $\alpha = 8$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ. Για $\alpha = 8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f(1) + f(e)$

Άσκηση 2.6 *Δίνεται η συνάρτηση.*

$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 3\beta x + 2, x \in R$

α. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in R$,αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται απο το σημείο $M(1,1)$ και παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $x = 3$

β. Για $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Για $\alpha = 5$ και $\beta = 1$,να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = f(0) + 2f(2) - f(3)$

δ. Για $\alpha = 5$ και $\beta = 1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-1}{\sqrt{x}-1}$

Άσκηση 2.7 *Δίνεται η συνάρτηση .*

$f(x) = \alpha e^x - \beta x + 5, x \in R$ και $\alpha, \beta \in R$.Αν η γραφική παράσταση διέρχεται της f διέρχεται από το σημείο $A(0,7)$ και $f'(0) = 1$

α. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in R$

β. Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει $f''(x) - f'(x) = 1$

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

δ. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\kappa \in R$ για τις οποίες ισχύει $\kappa^2 f''(x) - 3\kappa f'(x) + 2f''(x) = 3\kappa$

Άσκηση 2.8 *Να υπολογίσετε την παράγωγο των συναρτήσεων:.*

$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) - \log 2012$ με $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \eta\mu^3 x - \ln x^4$ με $x > 0$

$h(x) = \sqrt{2e^x + 3x}$ με $x \geq 0$

$k(x) = x^2 e^{-x} - e^{3x^2-5x+1}$ με $x \in \mathbb{R}$

$l(x) = (2e^x + 1)^{1006} - 5^e$ με $x \in \mathbb{R}$

$m(x) = e^{\sqrt{x}}\sigma\upsilon\nu 3x + \sqrt[3]{2}$ με $x > 0$

Άσκηση 2.9 *Δίνεται η συνάρτηση .*

$f(x) = \alpha\eta\mu^2 x + \beta\sigma\upsilon\nu^2 x, x \in (0, \dfrac{\pi}{2}) \kappa\alpha\iota \alpha, \beta \in R$. Αν η γραφική παράσταση της f διερχεται από το σημείο $A(\dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{1}{2})$ και $f'(\dfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$, τότε:

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$

β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = -1$, να δείξετε οτι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \dfrac{\pi}{2})$

γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f'(\dfrac{\pi}{4}) + f(\dfrac{\pi}{4}) - f'(\dfrac{\pi}{3})$

Άσκηση 2.10 *Δίνεται η συνάρτηση .*

$f(x) = \ln(\dfrac{\ln x}{x})$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β. Να μελετήθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Αν $\alpha > \beta > e$ να δείξετε οτι $\alpha^\beta < \beta^\alpha$

δ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2^{\sqrt{3}}$ και 3

Άσκηση 2.11 *Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση .*

$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+e^3$ όταν:

i. $x\in\mathbb{R}$

ii.$x\in\mathbb{R}^*$

iii. $x\geq 0$

iv.$x\geq 2$ v. $x<6$ vi.$-1\leq x\leq 6$ vii. $-4<x<5$

Άσκηση 2.12 *Δίνεται η συνάρτηση .*

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=-e^{\eta\mu x}$.

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$

ii. Να λυθεί η ανίσωση $f(2x+3)<f(3x+2)$

iii. Να αποδείξετε ότι $f\left(x^2+2x\right)\leq f(3x-1)$

iv. Να αποδείξετε ότι $f''(x)-συνxf'(x)=0$

Άσκηση 2.13 *Δίνεται η συνάρτηση .*

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$

ii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\ln 3}{3}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{e}$ όταν $x\in[e,3]$

iii. Να αποδείξετε ότι $x^2f'(x)+xf(x)=1$ όταν $x>0$

Άσκηση 2.14 *Έστω η συνάρτηση .*

$f(x)=e^x+3x$

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση

ii. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-5)$ και $f(2)$

iii. Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2}+3x^2<e^x+3x$

iv. Να αποδείξετε ότι $e^{3000}+9000<e^{4000}+12000$

v. Να λυθεί η ανίσωση $e^x+3x\leq e+3$

Άσκηση 2.15 *Η συνάρτηση .*

$f(x)=x\ln x-\alpha x$ με $\alpha\in R$ παρουσιάζει ακρότατο για $x=1$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

ii. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$

iii. Να αποδείξετε ότι $x\ln x-x\geq -1$ όταν $x>0$

iv. Να αποδείξετε ότι $2010\ln 2010-2010<2011\ln 2011-2011$

Άσκηση 2.16 *Θεωρούμε την συνάρτηση .*

$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+2011$ με $\alpha\in R$

i. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)$

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq 2011$ όταν $x\in(-\infty,1]$

iii. Να αποδείξετε ότι $f(2008)<f(2009)$

iv. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(-e)$ και $f(-\pi)$

Άσκηση 2.17 .

Δίνεται ορθή γωνία $\widehat{xOy}$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10μ. Τα άκρα του οποίου A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα $u = 2m/s$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $s(t) = ut, t \in [0, 5]$, όπου t ο χρόνος σε sec

α. Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου OAB ως συνάρτηση του t

β.Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του $E(t)$, τη χρονική στιγμή που το μήκος του OA είναι $6m$

Άσκηση 2.18 .

Α. Να αποδείξετε οτι από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο $50m$, το μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Β. Να αποδείξετε οτι από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν $400m^2$, τη μικρότερη περίμετρο έχει το τετράγωνο.

Γ. Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα $10cm$, να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές του ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν. $Κατσίποδας \quad Δημήτρης$

Άσκηση 2.19 .

Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς κελσίου, ως συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες δίνεται από την σχέση $\theta(t) = -t^3 + 9t^2 - 10t + c, 0 \leq t \leq 8$

α. Να προσδιορίσετε την τιμή της σταθεράς c, αν γνωρίζετε οτι την χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία ήταν $16C^0$

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας στο τέλος της τέταρτης ώρας

γ. Να βρείτε την ώρα με το μέγιστο ρυθμό μεταβολής.

Άσκηση 2.20 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \beta & , x \leq 2 \\ & \mu\varepsilon \quad \alpha, \beta \in R \\ 2\alpha x^3 + 11\alpha & , x > 2 \end{cases}$

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

γ. Για $\alpha = \dfrac{1}{3}$ και $\beta = 1$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

Άσκηση 2.21 .

Δινεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x, x \in R$

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Δινεται επίσης η συνάρτηση $g(x)=\alpha\ln x+x^2-\beta x, x>0 με \alpha,\beta\in R$

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$, ώστε η συνάρτηση g να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις ίδιες θέσεις με την συνάρτηση f

γ. Για $\alpha=12$ και $\beta=10$, να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

δ. Για $\alpha=12$ και $\beta=10$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{xg'(x)}{\sqrt{x+6}-3}$

Άσκηση 2.22 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+ax^2-9x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2,5)$ της και ο ρυθμός μεταβολής της στο σημείο αυτό είναι ίσος με 15, να αποδείξετε ότι α=β=3.

β. Για α=β=3, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -2}\frac{f'(x)+9}{x^2-4}$

γ. Για α=β=3, να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)=f'(x)+10$

Άσκηση 2.23 .

Δινεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε : $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$

α. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β. Να βρεθεί μία παράγουσα της συνάρτησης f.

Άσκηση 2.24 .

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^{-3}}+\frac{1}{x^{-2}}-\frac{1}{x^{-1}}+e^{ax}, a\varepsilon R$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο A(1,2)

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού a.

iii. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f'(-x)-f'(x)+f(x)+f(-x)=2$.

Άσκηση 2.25 .

i. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{\alpha x^2}{2}+4x+2012$ να είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

ii.Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2012$ στο όποιο ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται μέγιστος.

iii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το ελάχιστο της $f(x)=x^2-2\lambda x+2\lambda+2012$ να γίνεται μέγιστο.

Άσκηση 2.26 .

Θεωρούμε την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ που παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $(1, 2012)$, την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $g(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2012, 51)$ καθώς και τις συναρτήσεις $h(x) = g(f(x))$ με $x \in \mathbb{R}$ και $k(x) = f(x)lnx$ με $x > 0$. Να υπολογίσετε τις τιμές:

i. $f(1)$ και $f'(1)$.

ii. $h(1)$ και $k(1)$.

iii. $h'(1)$ και $k'(1)$.

iv. $k''(1)$.

Άσκηση 2.27 .

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = f^2(x)$, $h(x) = e^x f(3x)$

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - f(x)}{f(x)}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $g''(x) + 4g(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να αποδείξετε ότι $h''(x) - 2h'(x) + 10h(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv. Να βρείτε την παράγουσα της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 2.28 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} + \beta$ με $\alpha, \beta \in R$.

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$, αν γνωρίζετε οτι $f(0) = 1$ και $f'(0) = -1$.

Για $\alpha = -1$ και $\beta = 0$

β. Να λυθεί η εξίσωση $\kappa^2 f''(x) + 2\kappa f'(x) + f(x) = 0$.

γ. Από σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f , με $x > 0$, φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους θετικούς ημιάξονες ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου M, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο.

δ. Να βρεθεί η παράγουσα F της f που διέρχεται από το σημείο $K(0, 2012)$.

Άσκηση 2.29 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \alpha x^2 + \beta x + \dfrac{1}{3}$, με $\alpha, \beta \in R$.

α. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$, να δείξετε οτι $\alpha = -\dfrac{5}{2}$ και $\beta = 6$.

Για $\alpha = -\dfrac{5}{2}$ και $\beta = 6$

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

γ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{\sqrt{x+2} - 2}$.

δ. Να βρεθεί η παράγουσα F της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Άσκηση 2.30 .

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} - x + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $e^{\alpha x} - x + 3 \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(0, 4)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

iii. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f.

iv. Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x + 1$.

v. Να συγκριθούν οι τιμές της f για $x_1 = \dfrac{8}{9}$ και $x_2 = \dfrac{7}{8}$.

3 Επαναληπτικες ασκήσεις ολοκληρωμάτων

Άσκηση 3.1 *Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα : .*

$$\int_0^1 \left(x^3+\sin x+\cos x\right)dx \qquad \int_1^e \frac{x^2+x+1}{x}dx \qquad \int_1^2 3x\sqrt{x}dx$$

$$\int_1^e \left(e^x-\frac{3}{x}+\cos(2x)\right)dx \qquad \int_0^1 \frac{x^3+8}{x+2}dx \qquad \int_0^1 \frac{x+3}{x+1}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx \qquad \int_0^1 xe^x dx \qquad \int_0^1 x\sin x dx$$

$$\int_0^1 e^x \sin x dx \qquad \int_1^e x^2 e^x dx \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$$

$$\int_1^e x\ln x dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)dx \qquad \int_0^1 e^x\cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)dx \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx \qquad \int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx$$

$$\int_1^e \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x}}dx \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2012}dx \qquad \int_{-1}^2 (3x-2)(5x+1)\,dx$$

$$\int_3^2 \frac{3x^2-2x-6}{3x^2}dx \qquad \int_1^e \ln x dx \qquad \int_1^2 x^3\ln x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sigma\upsilon\nu x dx$$

Άσκηση 3.2 .

Θεωρούμε την δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=2e^x$ για την οποία ισχύει $f'(0)=5$ και $\int_0^1 f(x)\,dx=3$.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=f''(0)+\int_0^1 f(x)\,dx$

ii. Να βρείτε την συνάρτηση $f'(x)$

iii. Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 xf''(x)\,dx$

Άσκηση 3.3 .

θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=e^{x^2-4x}-3$ και $f(x)=2(x-2)e^{x^2-4x}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι παράγουσα της $f(x)$

ii. Να βρείτε την παράγουσα της $f(x)$ που διέρχεται από το σημείο $(0,1-e)$

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^0 2f(x)\,dx$

iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^2 (3-g''(x))\,dx$

v. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 e^x(g(x)+f(x))\,dx$

Άσκηση 3.4 .

Αν για την $f(x)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\int_1^4 f(x)\,dx=2$ και $\int_0^4 f(x)\,dx=-1$

:

i. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 f(x)\,dx$ και $\int_0^1 (3f(x)-e^x)\,dx$

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 xf'(x)\,dx=f(1)+3$

iii. Θεωρούμε την παράγουσα g της f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=2g(4)+3g(1)-\int_{g(1)}^{g(4)} 2012dx$

Άσκηση 3.5 .

Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο R και ισχύουν $\int_1^4 f(x)dx=-1$, $\int_1^5 f(x)dx=2$, $\int_4^5 g(x)dx=1$,

να υπολογίσετε την τιμή των ορισμένων ολοκληρωμάτων :

α. $\int_4^1 f(x)dx$ β. $\int_4^5 f(x)dx$ γ. $\int_4^5 3g(x)dx$ δ. $\int_4^5 (2f(x)+3g(x))\,dx$

ε. $\int_4^5 (2f(x)-2x)\,dx$ στ. $\int_4^5 \left(g(x)+\frac{1}{x}\right)dx$ ζ. $\int_4^5 (g(x)+e^x-1)\,dx$

Άσκηση 3.6 .

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:R\to R$, για την οποία γνωρίζουμε $f'(x)=6x, x\in R$ και $\int_1^2 f(x)dx=12$ β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \left(3x^2f(x)-5f(x)\right)dx$

γ. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-8}{x^2+x}$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^3-x}$

Άσκηση 3.7 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ. Να συγκριθούν οι αριθμοί $f\left(\dfrac{1}{e}\right)$ και $f\left(\dfrac{2}{e}\right)$

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{\ln^2 x}\right)dx$

Άσκηση 3.8 .

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση C_f της : α) $f(x)=3x^2+2x+1$ και τις ευθείες $x=0, x=1$.

β)$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ και τις ευθείες $x=1, x=2$

γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ και τις ευθείες $x=1, x=2$

δ) $f(x)=xe^{-x}$ και τις ευθείες $x=0, x=1$.

Άσκηση 3.9 .

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση C_f :

1) $f(x)=x^2-4$

2) $f(x)=x^3-x$

3) $f(x)=x(e^x-e)$

4) $f(x)=x^3+1$ και την ευθεία $x=0$

5) $f(x)=\ln x$ και την ευθεία $x=\dfrac{1}{e}$

6) $f(x)=x^2-1$ και την ευθεία $x=2$

7) $f(x)=x^2-x$ και την ευθεία $x=-1$

Άσκηση 3.10 .

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f :

1) $f(x)=x^2$ και την ευθεία $y=1$

2) $f(x)=\dfrac{2}{x}$ και την ευθεία $y=-x+3$.

Άσκηση 3.11 .

Να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση C_f και C_g των συναρτήσεων :

1) $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^2$

2) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$

Άσκηση 3.12 .

Εμβαδόν χωρίου (όλες οι περιπτώσεις)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 12x^3 - 12x^2$ και $g(x) = 12x^3 - 12x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωριου που περικλείεται μεταξύ:

α. της C_f και του άξονα x'x.

β. της C_f, του άξονα x'x, του άξονα y'y και της ευθείας $x = 2$.

γ. C_g και του άξονα x'x.

δ. C_f και της C_g.

ε. C_f, της C_g, της ευθείας $x = -1$ και της ευθείας $x = 2$, όπου C_f είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$

Άσκηση 3.13 .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & x < 0 \\ 2e^x & x \geq 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε οτι f είναι συνεχής στο $x_o = 0$.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{1} f(x)dx$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 1$.

δ. Να βρείτε την μέση τιμή και την διάμεσο των τιμών $f(-1), f(0), f(1), f'(-1), f'(1)$.

4 Επαναληπτικές ασκήσεις στατιστικής

Άσκηση 4.1 .

Σε ένα δείγμα 5 παρατηρήσεων με μέση τιμή $\bar{x} = 11$ οι τέσσερις παρατηρήσεις είναι οι $8, 12, 14$ και 11. α. Να αποδείξετε ότι η παρατήρηση που λείπει είναι ο αριθμός 10. β. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή του δείγματος. γ. Να αποδείξετε ότι το δείγμα έχει τυπική απόκλιση $S = 2$. δ. Να εξετάσετε εάν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Άσκηση 4.2 .

Ο βαθμός πρόσβασης του απολυτηρίου 50 μαθητών της Γ΄λυκείου αναγράφεται στον παρακάτω ελλιπή πίνακα.

Κλάσεις	x_i	n_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$n_i x_i$
[10,12)		5			
[12,14)					
[14,16)			40		
[16,18)			20		
[18,20)					
Σύνολο	-	50		-	

Αν x_i το κέντρο κλάσης και $\nu_2 = 4\nu_5$, τότε:

α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

β. Να βρεθεί η μέση τιμή

γ. Το πλήθος των μαθητών που πήραν τουλάχιστον 16

δ. Το ποσοστό των μαθητών που είχαν βαθμό μικρότερο από 14

Άσκηση 4.3 .

Δίνονται οι παρατηρήσεις $2, 6, 7, 3, 7, x$ με μέση τιμή 6.

α. Να αποδειχθεί ότι $x = 11$.

β. Να βρεθει η διάμεσος δ, η επικρατούσα τιμή M_0 και το εύρος R του δείγματος.

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $3R - 2\delta - M_0 = M_0$ για τα παραπάνω μεγέθη. δ. Αν όλες οι τιμές που είναι μικρότερες της μέσης τιμής αυξηθούν και γίνουν ίσες με την μέση τιμή, να υπολογιστει η μέση τιμή του νέου δείγματος.

Άσκηση 4.4 .

Δίνονται οι αριθμοί: $4, 5, 7, 9, 8, 5, 4$.

α. Να βρεθεί η διάμεσό τους.

β. Ποιος αριθμός a πρέπει να προστεθεί σε καθέναν από τους παραπάνω ώστε η μέση τιμή τους να γίνει 9;

γ. Να αποδειχθεί ότι όποιος (ίδιος) αριθμός a και αν προστεθει σε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς, η διακύμανσή τους παραμένει σταθερή.

Άσκηση 4.5 .

Οι αριθμοί $6, 7, 12, 8, a, b(με a < b)$ έχουν μέση τιμή 8. Αν είναι γνωστό ότι υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές.

α. Να αποδειχθεί ότι: $a = 7, b = 8$.

β. Για $a = 7, b = 8$:

i. να υπολογισθεί η διάμεσος των αριθμών.

ii. να βρεθεί η διακύμανσή τους.

Άσκηση 4.6 .

α. Σε μια επιχείρηση εργάζονται 50 υπάλληλοι, οι οποίοι έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 1.120 ευρώ. Από τους 50 εργαζόμενους, οι 20 είναι γυναίκες και οι 30 άντρες. Αν ο μέσος μηνιαίος μισθός των γυναικών είναι 1000 ευρώ , να βρεθεί ο μέσος μηνιαίος μισθός των αντρών.

β.Αν η ίδια επιχείρηση, τους καλοκαιρινούς μήνες προσελάβε εποχιακό προσωπικό, με μέσο μισθό αυτών 800?. Αν ο μέσος μισθός της επιχείρησης είναι τώρα 1000 ευρώ , να βρεθεί πόσα άτομα προσέλαβε η επιχείρηση για την καλοκαιρινή περίοδο.

Άσκηση 4.7 .

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατονομής συχνοτήτων

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i %	$n_i\ x_i$	$n_i\ (x_i\text{-}\overline{x})^2$
0		2				
1		8				
2		13				
3		17				
4						
Σύνολο	20	-		-		

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

β. Να βρεθεί η διάμεσος.

γ. Να βρεθεί η μέση τιμή.

δ. Να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που οι τιμές τους είναι το πολύ ίσες με 2.

ε. Να βρεθεί η διακύμανση.

στ. Να διαπιστωθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Άσκηση 4.8 .

Οι βαθμοί των 50 μαθητών της Γ τάξης ενός ΕΠΑΛ παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

$κλάσεις$	x_i	n_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[0,4)				10
[4,8)		7		
[8,12)			0,26	
[12,16)				85
[16,20)				
$Σύνολο$	-	50		-

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

β. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

γ. Να βρεθεί η διάμεσος.

δ. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που είχε βαθμό τουλάχιστον 12.

ε. Να βρεθεί η μέση τιμή.

Άσκηση 4.9 .

Κατά την αρχή της σχολικής χρονιάς οι 50 μαθητές της τρίτης τάξης ενός Λυκείου ρωτήθηκαν σχετικά με τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν την περίοδο των θερινών διακοπών. Σύμφωνα με τις απαντήσεις που δόθηκαν, συντάχθηκε ο παρακάτω πίνακας:

Αριθμός βιβλίων	0	1	2	3	4
Αριθμός μαθητών	$\alpha+4$	$5\alpha+8$	4α	$\alpha-1$	2α

α. Να υπολογιστεί η τιμή του α. Στη συνέχεια για α=3 να βρεθούν :

β. Η μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

γ. Η διάμεσος του αριθμού των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές.

δ. Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον 3 βιβλία.

ε. Τι ποσοστό των μαθητών διάβασε το πολύ 1 βιβλίο.

Άσκηση 4.10 .

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων σε κλάσεις ίσου πλάτους (όπου x_i το κέντρο κάθε κλάσης)

Κλάσεις	x_i	n_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
[,)	6				6		
[,)		6		15			
[,)						0,5	
[,)	18						
[,)			0,2				
Σύνολο	-				-	-	-

α) Να αποδειχθεί ότι οι κλάσεις έχουν πλάτος $c = 4$.

β) Να αποδειχθεί ότι το δείγμα έχει μέγεθος $\nu = 40$.

γ) Να συμπληρωθεί ο πίνακας.

δ) Να βρεθεί η διάμεσος.

ε) Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή.

Άσκηση 4.11 .

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την διάρκεια ζωής δύο τύπων λυχνίων Α και Β, σε χιλιάδες ώρες :

A	12	14	23	30	36
B	12	13	16	22	32

Μια λυχνία τύπου Α κοστίζει 67,5 ευρώ α. Ποιός τύπος λυχνίας πρέπει να προτιμηθεί, αν μια λυχνία τύπου Β κοστίζει σε ευρώ : i. 52,8 , ii. 55,72, iii. 58,7. Να αιτιολογηθεί η επιλογή.

β. Ποιού τύπου λυχνίες παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς την διάρκεια λειτουργίας τους.

Άσκηση 4.12 .

Το παρακάτω δείγμα μαθητών έχει μέσο όρο απουσιών $\overline{x} = 4$ απουσίες σε διάστημα μιας εβδομάδας.

Απουσίες x_i	Μαθητές ν_i	$x_i\ \nu_i$
2	2α+2	
4	6-α	
5	α+2	
6	3α-2	
Σύνολο		

α. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α.

Για $\alpha = 2$, να βρεθούν :

β. η επικρατούσα τιμή του δείγματος

γ. η διάμεσος του δείγματος

δ. ο μέσος όρος απουσιών αν στο δείγμα προστεθεί ο Μάκης που δεν απουσιάζει ποτέ από τα μαθήματα

Άσκηση 4.13 .

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το πολύγωνο των αθροιστικών συχνοτήτων των ετών εργασίας ,των εργαζομένων σε μια εταιρεία. Από τα δεδομένα το πολυγώνου να βρεθούν:

α. Πόσους εργάζομενους απασχολεί η εταιρεία.

β. Να κατασκευαστεί πίνακας κατανομής με τις στήλες των $\nu_i, N_i, f_i, F_i\%$

γ. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος εργασίας, των εργαζόμενων στην εταιρεία.

δ. Να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της %

ε. Να βρεθεί η διάμεσος.

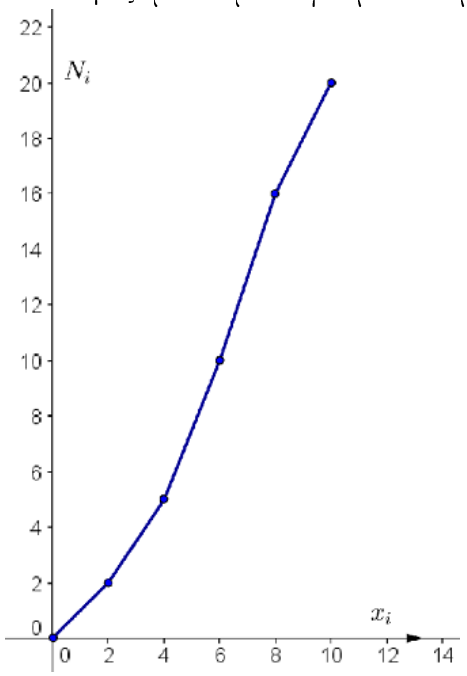
στ. Να βρεθεί το ποσοστό των εργαζομένων του εργάζονται 6 ή περισσότερα χρονια στην εταιρεία.

ζ. Να βρεθεί ο μέσος μισθός των εργαζομένων, αν είναι γνωστά :

• Οι εργαζόμενοι με λιγότερα απο 4 έτη εργασίας έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 1300 ευρώ.

• Οι εργαζόμενοι που εργάζονται 4 ή περισσότερα χρόνια, αλλά λιγότερα απο 8 χρονια έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 1600 ευρώ.

• Οι εγαζόμενοι με 8 ή περισσότερα χρόνια έχουν μέσο μηνιαίο μισθό 1800 ευρώ.



Άσκηση 4.14 .

Δίνεται στον παρακάτω πίνακα ένα ομαδοποιημένο δείγμα τιμών.

Κλάσεις [-)	n_i
0 - 2	1
2 - 4	2
4 - 6	1
6 - 8	4

α. Να υπολογιστεί η διάμεσος δ.

β. Να αποδειχθεί ότι έχει μέση τιμή $\overline{x} = 5$.

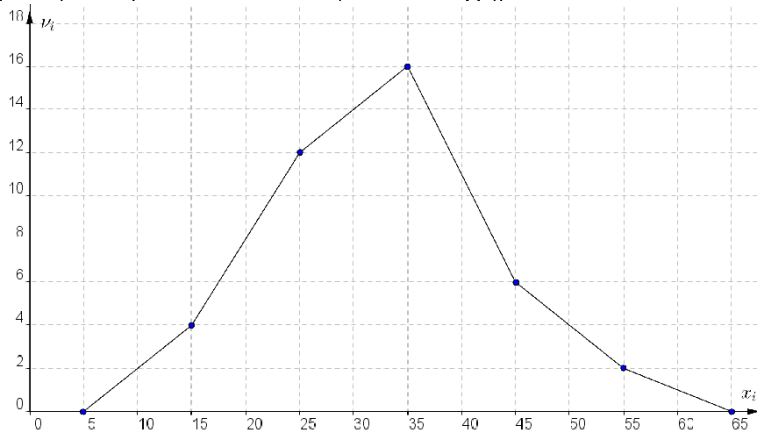
γ. Να αποδειχθεί ότι έχει διακύμανση $S^2 = \overline{x}$.

δ. Να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι : $2,24^2 \cong 5$

Άσκηση 4.15 .

Εξετάσαμε τους πελάτες μιας καφετέριας σχετικά με το χρόνο (σε λεπτά) παραμονής τους σε αυτή.Τα αποτελέσματα ομαδοποιήθηκαν σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους και το πολύγωνο των συχνοτήτων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



α. Να προσδιοριστούν οι κλάσεις και να κατασκευαστεί το ιστόγραμμα συχνότητων.

β. Να κατασκευαστεί πίνακας κατανομής συχνοτήτων με τις στήλες $\nu_i, N_i, f_i, F_i\%$

γ. Να βρεθεί η μέση τιμή.

δ. Να βρεθεί το ποσοστό των πελατών που μένουν στην καφετέρια χρόνο λιγότερο των 30 λεπτών.

Άσκηση 4.16 .

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων των βαθμών εξετάσεων φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής σε μια σχολή ΤΕΙ.

Κλάσεις [-)	Φοιτητές ν_i
1,5 - 2,5	10
2,5 - 3,5	30
3,5 - 4,5	10
4,5 - 5,5	10
5,5 - 6,5	20

α) Να αποδειχθεί ότι $M_o < \delta$ όπου M_o, δ η επικρατούσα τιμή και η διάμεσος του δείγματος αντίστοιχα.

β) Να αποδειχθεί ότι $S^2 = \frac{\overline{x}}{2}$ όπου $\S^2, \overline{x}$ η διασπορά και η μέση τιμή του δείγματος αντίστοιχα.

γ) Να εξετασθεί αν το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.

δ) Αν ο καθηγητής για να βοηθήσει κάποιους φοιτητές κάνει τους βαθμούς από 4 έως 5 ίσους με 5, να βρείτε το πλήθος των μαθητών που πέρασαν το μάθημα

Δίνεται ότι $1,41^2 \cong 2$ και πως στις σχολές βάση θεωρείται το 5 και άριστα το 10.

Άσκηση 4.17 .

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ταχύτητες 400 οδηγών αυτοκινήτων ομαδοποιημένες σε κλάσεις που κατέγραψε ένα περιπολικό της τροχαίας σε διάστημα ενός μηνά σε σημείο του δρόμου με ανώτατο επιτρεπόμενο όριο ταχύτητας τα 110 χιλιόμετρα την ώρα.

Ταχύτητα [-)	Οδηγοί ν_i	
80 - 100	$136 - 12\alpha$	
100 - 120	200	
120 - 140	$20\ \alpha + 10$	
140 - 160	$10\alpha - 4$	
160 - 180	$\alpha + 1$	

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\alpha = 3$.

β) Να βρεθεί το ποσοστό των οδηγών που έκαναν παράβαση.

γ) Η τροχαία συμπεριφέρεται στους παραβάτες ως εξής: Όσοι καταγράφονται να κινούνται με ταχύτητα από 110 έως 120 χιλιόμετρα την ώρα με παρατήρηση, όσοι κινούνται με ταχύτητα από 120 έως 140 χιλιόμετρα την ώρα με πρόστιμο 100 ευρώ, όσοι κινούνται με ταχύτητα από 140 έως 160 χιλιόμετρα την ώρα με πρόστιμο 200 ευρώ και όσοι κινούνται με ταχύτητα από 160 έως 180 χιλιόμετρα την ώρα με αφαίρεση πινακίδων και πρόστιμο 500 ευρώ.

Αν στους παραπάνω παραβάτες, 3 οδηγοί κινούμενοι με ταχύτητες 157, 144 και 166 χιλιόμετρα την ώρα απαλλαγούν για διαφόρους λόγους, να βρείτε τα έσοδα από τις εισπράξεις των προστίμων, θεωρώντας ότι όλα τα υπόλοιπα πρόστιμα θα πληρωθούν κανονικά.

Άσκηση 4.18 .

Εξετάσαμε ένα δείγμα συνδρομητών κινητής τηλεφωνίας σχετικά με τον αριθμό των κλήσεων που πραγματοποίησαν κατά τη διάρκεια μιας ημέρας και προέκυψαν τα παρακάτω:

• Οι συνδρομητές πραγματοποίησαν $0, 1, 2, 3, \dot{\eta}\ \ 4$ κλήσεις.

•10 συνδρομητές πραγματοποίησαν 1 μόνο κλήση.

• Οι συνδρομητές που πραγματοποίησαν 2 κλήσεις είναι τετραπλάσιοι από εκείνους που δεν πραγματοποίησαν κλήση.

• Το πολύ 2 κλήσεις πραγματοποίησαν 30 συνδρομητές.

• Η γωνία του κυκλικού διαγράμματος που αντιστοιχεί στην τιμή $x_1 = 0$, είναι 36^0

• Το ποσοστό των συνδρομητών που πραγματοποίησαν 4 κλήσεις είναι 10%

α. Να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος v και να κατασκευαστεί πίνακας κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων f_i καθώς και όλων των αντίστοιχων αθροιστικών συχνοτήτων.

β. Να βρεθούν η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή του δείγματος των κλήσεων.

γ. Να βρεθούν ο μέσος αριθμός κλήσεων που πραγματοποίησαν οι συνδρομητές.

Άσκηση 4.19 .

Η κατανομή του βάρους (σε κιλά) των 270 μαθητών ενός σχολείου παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Βάρος	Κέντρο κλάσης x_i	Μαθητές v_i
[54,60)		18
[60,66)		46
[66,72)		71
[72,78)		73
[78,84)		α
[84,90)		20
Σύνολο	-	270

α. Να βρεθεί το α.

β. Να αποδειχθεί ότι το μέσο βάρος των μαθητών είναι 72 κιλά.

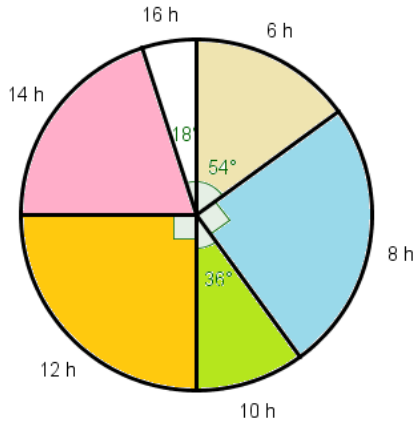
γ. Πόσοι μαθητές είχαν βάρος τουλάχιστον 72 κιλά.

δ. Τι ποσοστό των μαθητών είχε βάρος μικρότερο από 66 κιλά;

ε. Αν καθένα από τα 150 κορίτσια του σχολείου χάσει 3 κιλά και καθένα από τα αγόρια του σχολείου πάρει 1,5 κιλό , ποιό θα είναι το νέο μέσο βάρος των μαθητών;

Άσκηση 4.20 .

Οι ώρες μελέτης 60 φοιτητών στη βιβλιοθήκη ανά εβδομάδα δίνονται από το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.



α) Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων.

Ώρες μελέτης x_i	Φοιτητές v_i	Γωνία ω_i	$x_i v_i$
6			
8			
10			
12			
14			
16			
Σύνολο	60	360^o	

β) Να υπολογιστεί η διάμεσος και η μέση τιμή του δείγματος.

γ) Στην περίοδο των εξετάσεων, κάθε μαθητής που διάβαζε μέχρι και 10 ώρες αυξάνει το εβδομαδιαίο διάβασμά του κατά 3 ώρες, ενώ οι υπόλοιποι κατά 2 ώρες. Ποία θα είναι τότε η διάμεσος και ποια η μέση τιμή;

Καλή επανάληψη,
καλή επιτυχία.