Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη).

1.	Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $\alpha,\beta \in A$ τέτοιοι ώστε $\alpha = \beta$ ισχύει πάντα $f(\alpha) = f(\beta)$;	**Σ - Λ**
2.	Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ ισχύει πάντα $\alpha = \beta$;	**Σ - Λ**
3.	Αν $f(x)\cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$;	**Σ - Λ**
4.	Αν δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και το ίδιο σύνολο τιμών τότε είναι ίσες;	**Σ - Λ**
5.	Αν η συνάρτηση f είναι 1–1 και για τις συναρτήσεις $g: A \to \mathbb{R}$, $h: A \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(g(x)) = f(h(x))$ για κάθε $x \in A$ τότε $g = h$;	**Σ - Λ**
6.	Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιττή τότε $f(0) = 0$;	**Σ - Λ**
7.	Μια άρτια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι 1–1.	**Σ - Λ**
8.	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\lvert f \rvert$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x.	**Σ - Λ**
9.	Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι άρτια και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιττή τότε η $f \circ g$ είναι περιττή;	**Σ - Λ**
10.	Αν η συνάρτηση $f + g$ είναι σταθερή τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι πάντα σταθερές.	**Σ - Λ**
11.	Αν $M(\alpha,\beta) \in C_f$ τότε $M(\alpha,-\beta) \in C_{-f}$.	**Σ - Λ**
12.	Αν $\lvert f(x_1) - f(x_2) \rvert \geq \lvert x_1 - x_2 \rvert$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι «1–1».	**Σ - Λ**
13.	Έστω $f: R \to R$. Αν $f(e) < f(\pi)$ τότε η f δεν μπορεί να είναι ↘.	**Σ - Λ**

14.	Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g\circ f$ είναι 1–1 τότε η f είναι 1–1;	**Σ - Λ**
15.	Αν οι συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ είναι 1–1 τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι 1–1;	**Σ - Λ**
16.	Αν οι συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ είναι 1–1 τότε και η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι 1–1;	**Σ - Λ**
17.	Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $h=f\circ g$ είναι 1–1 τότε η συνάρτηση g είναι οπωσδήποτε 1–1.	**Σ - Λ**
18.	Αν $\lvert f(x)\rvert\le f(x_0)$ για κάθε $x\in D_f$ η f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.	**Σ - Λ**
19.	Αν η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$, $B(3,5)$ τότε η f είναι ↘.	**Σ - Λ**
20.	Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R τότε $f(f(x_1))<f(f(x_2))$ για κάθε $x_1<x_2$.	**Σ - Λ**
21.	**Αν η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ για το οποίο $f(\alpha)=0$, τότε $f(\alpha-1)\cdot f(\alpha+1)<0$.**	**Σ - Λ**
22.	**Αν η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι συνάρτηση 1-1 και υπάρχει σημείο $\alpha\in A$ για το οποίο ισχύει $f(\alpha)=0$ τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq\alpha$.**	**Σ - Λ**
23.	**Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το A, σύνολο τιμών το $f(A)$ και είναι αντιστρέψιμη στο A, τότε $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=x$, για κάθε $x\in A$.**	**Σ - Λ**
24.	**Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+2i$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln\lvert z+e\rvert$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για κάθε τιμή του z.**	**Σ - Λ**
25.	**Έστω οι συναρτήσεις f,g. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις: f^{-1}, g^{-1}, $f\circ g$ και $(f\circ g)^{-1}$, τότε ισχύει $(f\circ g)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.**	

Θεωρητικά θέματα και απλές ασκήσεις

(Απαντήστε αναλυτικά)

Θέμα 1

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $y=f(x)$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $A\neq\varnothing$ και σύνολο τιμών το $f(A)$, καθώς και η συνάρτηση g με τύπο $y=g(x)$, πεδίο ορισμού το $B\neq\varnothing$ και σύνολο τιμών το $g(B)$.

Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λάθος (Λ).

1. Αν $f=g$ τότε $f(A)=g(B)$. Σ – Λ
2. Αν $A=B$ και $f(A)=g(B)$ τότε $f=g$. Σ – Λ
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x\in A\cap B$. Σ – Λ
4. Αν ισχύει $B\cap f(A)\neq\varnothing$ τότε ορίζεται η $g\circ f$. Σ – Λ
5. Αν $f(x)=\sqrt{x^2}$ και $g(x)=x$, τότε $f=g$. Σ – Λ
6. Αν f γνήσια αύξουσα στο A τότε $f(2)>f(3)$. Σ – Λ
7. Αν f γνήσια φθίνουσα στο A και $f(\alpha)>f(\beta)$ τότε $\alpha<\beta$. Σ – Λ
8. Αν f γνήσια φθίνουσα στο A και $f(\alpha)=0$ τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\neq\alpha$. Σ – Λ
9. Αν f γνήσια αύξουσα στο A και $f(\alpha)=0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x>\alpha$. Σ – Λ
10. Αν f γνήσια φθίνουσα στο A και $f(\alpha)=0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x>\alpha$. Σ – Λ

Θέμα 2

Έστω μια συνάρτηση f με τύπο $y=f(x)$ και πεδίο ορισμού το A. Αν με C_f συμβολίσουμε την γραφική της παράσταση, τότε δώστε μια συνθήκη για να ισχύουν τα εξής:

i. Η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα των τετμημένων $x'x$.

ii. Η γραφική παράσταση C_f βρίσκεται αριστερά του άξονα των τεταγμένων $y'y$.

iii. Η γραφική παράσταση C_f κόβει τον άξονα των τετμημένων $x'x$.

iv. Η γραφική παράσταση C_f κόβει τον άξονα των τεταγμένων $y'y$.

Θέμα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους αντίστοιχα

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\leq 1\\ -x+3, & x\geq 2\end{cases}\quad\text{και}\quad g(x)=\begin{cases}x^3-1, & x\geq 3\\ 2x+4, & x\leq 2\end{cases}.$$

A. Υπολογίστε τους αριθμούς:

i. $f(-1)$, $f(2)$, $f(e)$, $f(e^{-1})$.

ii. $g(-1)$, $g(3)$, $g(e)$, $g(e^{-1})$.

iii. $(f\circ g)(-1)$, $(g\circ f)(-1)$.

iv. $(f+g)(0)$, $(f-g)(2)$, $(\sqrt{f})(1)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$.

Β. Εξετάστε αν ορίζονται τα ακόλουθα:

$\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$, $\left(\frac{g}{f}\right)(3)$, $(f\circ g)(\sqrt{5})$.

Θέμα 4

Έστω η πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Απαντήστε σύντομα στις παρακάτω ερωτήσεις.

α. Πότε η f είναι αντιστρέψιμη ;

β. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} ;

γ. Τι γνωρίζετε για τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} ;

δ. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο Α, αναφέρατε τι γνωρίζετε για τη μονοτονία της f^{-1}.

Θέμα 5

Έστω η πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, η οποία είναι γνησίως μονότονη στο Α.

Οι παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστές ή λάθος.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα Σ αν αυτή είναι σωστή , ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι λάθος.

α. Αν $1,2\in A$ ώστε $f(1)=2$ και $f(2)=1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$ στο σημείο $(1,1)$, τότε και η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την $y=x$ στο ίδιο σημείο.

γ. Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε x που ανήκει στο Α τότε η f^{-1} δεν ορίζεται στο 0.

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης, Μαθηματικός,

Κιλκίς 44 Άλιμος,

e-mail: raik2151@gmail.com