Εικοσιδωδεκάεδρον

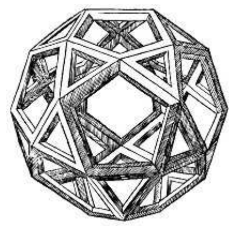
Μαθηματικό Δελτίο

Τεύχος 9ο

Απρίλιος 2012

www.mathematica.gr

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr.
Η επιλογή και η φροντίδα του περιεχομένου γίνεται από τους Επιμελητές του http://www.mathematica.gr.
Μετατροπές σε LATEX: *Φωτεινή Καλδή, Αναστάσης Κοτρώνης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος* , Σχήματα: *Μιχάλης Νάννος, Χρήστος Τσιφάκης* Σελιδοποίηση: *Αναστάσης Κοτρώνης, Νίκος Μαυρογιάννης*, Εξώφυλλο: *Γρηγόρης Κωστάκος*. Στοιχειοθετείται με το LATEX.



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0,0,\pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{\varphi}{2},\pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή:http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Κάποιος αγόρασε* 100 *κιλά πατάτες, γνωρίζοντας ότι αποτελούνται κατά* 99% *από νερό. Τις άφησε στον ήλιο για μια βδομάδα και υπολόγισε ότι τώρα αποτελούνται κατά* 98% *από νερό. Πόσο ζυγίζουν τώρα οι πατάτες·*

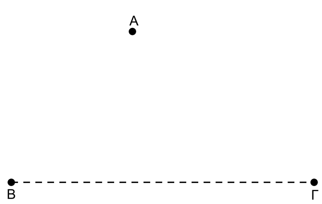
ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος)*

Ένας αριθμός (φυσικός) με δέκα ή λιγότερα ψηφία λέγεται αυτοβιογραφικός αν το πρώτο του ψηφίο (από αριστερά) δηλώνει των αριθμό των «μηδενικών» που περιέχει, το δεύτερο ψηφίο δηλώνει τον αριθμό των «μονάδων» που περιέχει κ.ο.κ. Για παράδειγμα τέτοιος αριθμός είναι ο 6210001000.

Να βρεθεί ο μικρότερος αυτοβιογραφικός αριθμός.

Μαθηματικά Α′ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Κάπου ανάμεσα στις πόλεις* B, Γ *θα τοποθετηθεί ηλεκτρικός σταθμός που θα εξυπηρετεί τις πόλεις* B, Γ *καθώς και την μικρότερη* A. *Που θα τοποθετηθεί ο ηλεκτρικός σταθμός ώστε να χρειάζεται συνολικά το μικρότερο δυνατόν μήκος καλωδίου που να συνδέει κάθε μία από τις πόλεις με τον σταθμό;*



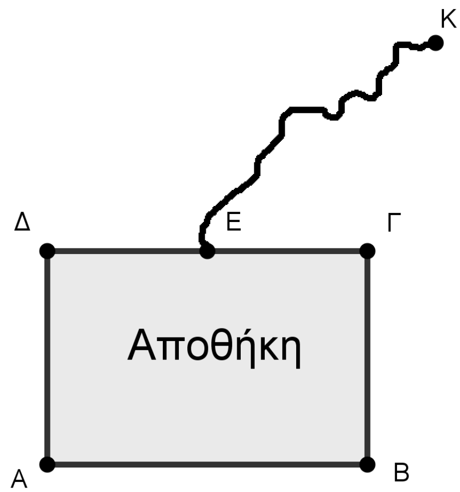
ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός*

$$A = 6^{2006} + 3^{2003} + 18^{2001} + 9^{2005}$$

είναι πολλαπλάσιο του 30.

Μαθηματικά Β′ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο Παύλος Μαραγκουδάκης) Ο κ. Μανώλης έχει μια αποθήκη ΑΒ˙ όπως φαίνεται στο σχήμα με μήκος* $6m$ *και πλάτος* $4m$. *Μια κατσικούλα είναι δεμένη στην άκρη ενός σχοινιού μήκους* $9m$ *όπως φαίνεται στο σχήμα.*



(α) Να γραμμοσκιάσετε την περιοχή στην οποία η κατσικούλα μπορεί να βοσκήσει.
(β) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής αυτής.

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο KARKAR) Ο Α , ο Β και ο Γ , κάθονται γύρω από ένα τραπέζι , πάνω στο οποίο βρίσκεται πορτοφόλι με ικανό ποσό χρημάτων .*
Λέει ο Α : Εγώ αν πάρω το πορτοφόλι θα έχω διπλάσιο ποσό χρημάτων από τους δυό σας ! Απαντά ο Β : αν πάρω εγώ το πορτοφόλι θα έχω τριπλάσια από σας ! . Και ο Γ : Εγώ και το πορτοφόλι πιάνουμε πενταπλάσια από τους δυό σας ! Τι ποσοστό του συνολικού ποσού (συμπεριλαμβανομένου του πορτοφολιού) κατέχει ο Β ·

Μαθηματικά Γ′ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Δίνεται το πολυώνυμο:*

$$P(x) = x^{15} - 2012x^{14} + 2012x^{13} - \ldots - 2012x^2 + 2012x.$$

Υπολογίστε το $P(2011)$.

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Άν το τρίγωνο* $\triangle ABC$ *είναι ορθογώνιο με* $\hat{A} = 90^0$ *τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο με πλευρές*

$$ab,\ bc,\ (a+c)(a-c)$$

το οποίο μάλιστα είναι και αυτό ορθογώνιο.

Μαθηματικά Α′ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Νίκος Αλεξανδρόπουλος) Να προσδιορισθεί η τιμή του πραγματικού* m *ώστε η εξίσωση* $(m-1)x^4 - 5x^2 + 3m - 2 = 0$ *να έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες.*

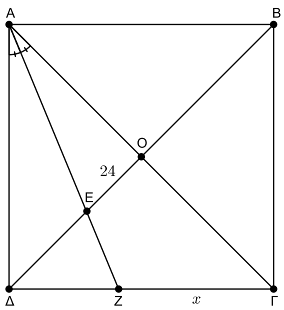
ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Δημήτρης Βερροιόπουλος) Αν:*

$$x = \underbrace{111...1}_{2\nu\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha} \;\wedge\; y = \underbrace{111...1}_{\nu+1\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha} \;\wedge\; z = \underbrace{666...6}_{\nu\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha},$$

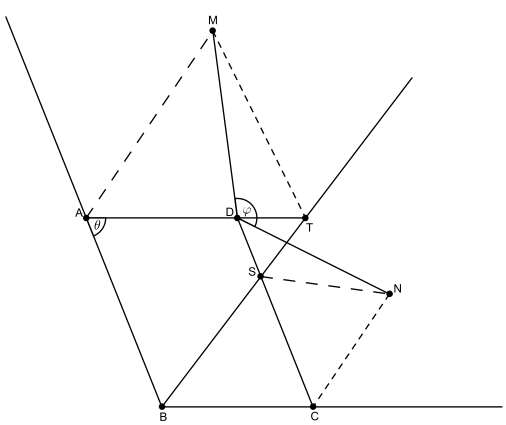
να αποδείξετε ότι το άθροισμα: $x + y + z + 8$ *είναι τετράγωνο ρητού αριθμού.*

Μαθηματικά Α′ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω το τετράγωνο* ΑΒΓΔ *και* Ο *το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν η διχοτόμος της* $\Gamma\widehat{A}\Delta$ *τέμνει τη* ΔΟ *στο* Ε, *την* ΓΔ *στο* Ζ *και το μήκος του* ΕΟ *είναι* 24, *να υπολογίσετε το μήκος της* ΖΓ.



ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο KARKAR) Σημείο* S *βρίσκεται στην πλευρά* CD *του παραλληλογράμμου* $ABCD$. *Η* BS *τέμνει την* AD *στο* T. *Κατασκευάζω τα διχοτομούντα τμήματα* AM, TM, CN, SN *των αντίστοιχων γωνιών. Υπολογίστε τη* $M\widehat{D}N = \varphi$ *συναρτήσει της* $\widehat{A} = \theta$.



Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής) Δίνεται η ακολουθία* (α_ν) *με* $\alpha_1 = 4$ *και αναδρομικό τύπο*

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{8\alpha_\nu - 9}{\alpha_\nu + 2}$$

με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α *Να αποδείξετε ότι η ακολουθία* (β_ν) *με*

$$\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu - 3}$$

με $\nu \in \mathbb{N}^*$ *είναι αριθμητική πρόοδος και να βρεθεί ο γενικός τύπος της.*

β *Να βρεθεί το άθροισμα των* ν *πρώτων όρων της ακολουθίας* (β_ν).

γ *Να βρεθεί ο* ν*-οστός όρος της ακολουθίας* (α_ν).

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο KARKAR) Αν ισχύει :* $2^x = 3^a = 6^b$ *,να δείξτε ότι :* $x = \dfrac{ab}{a-b}$.

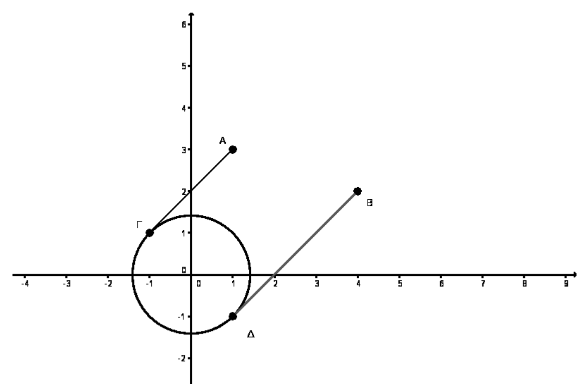
Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Γιώργης Καλαθάκης) Δίνονται οι κύκλοι* (O,R) , (K,r) *οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο* E. *Φέρνουμε τις διαμέτρους* $AB, \Gamma\Delta$ *των δυο κύκλων , κάθετες στη διάκεντρο* OK *και τον περιγεγραμμένο κύκλο του* $AB\Delta\Gamma$.
Να αποδειχθεί ότι η μπλέ περιοχή είναι ισεμβαδική με την κίτρινη περιοχή .

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Δημήτρης Μυρογιάννης) Έστω κυρτό τετράπλευρο* $ABCD$ *με τις διαγώνιες του* AC, BD *να σχηματίζουν τις γωνίες* CAB, BCA, CDB, BDA *με μέτρο* $70, 30, (50 - a), a$ *μοίρες, η κάθε μια, αντίστοιχα. Αν επιπλέον η διαγώνιος* BD *είναι διχοτόμος της γωνίας* CBA *βρείτε τον αριθμό των μοιρών που εκφράζει το* a.

Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο KARKAR) Βρείτε την εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, για τον οποίο τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από τα σημεία* $A(1,3)$ *και* $B(4,2)$, *είναι παράλληλα μεταξύ τους.*



ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Για κάθε ακέραιο* n, *με* $n \geq 2$, *να αποδείξετε ότι ισχύει:*

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ *για* $x \geq 0$ *και ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης* $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, *με πιθανότητες* $P(k) = \frac{12}{5} f'(k)$ *για* $k \in \Omega$.

(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(β) Να βρεθεί η τιμή του n.

(γ) Μια μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = n$. Αν το 16% των παρατηρήσεων έχει τιμή μικρότερη του 33, να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Parmenides51)* *Μια βιομηχανία κατασκευάζει αυτοκίνητα με κυβικά μηχανών από α έως β lit με $\alpha < \beta$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι με μηχανές το πολύ 1,6 lit αναμένεται να κατασκευάζεται το 20% των αυτοκινήτων ενώ με μηχανές τουλάχιστον 1,4 lit αναμένεται να κατασκευάζεται το 90% των αυτοκινήτων. Αν η παραπάνω κατανομή είναι ομοιόμορφη στο $[\alpha, \beta]$ να βρεθούν:*

(α) Οι αριθμοί α, β.

(β) Η μέση τιμή της κατανομής.

(γ) Το πλήθος των αυτοκινήτων που αναμένεται να κατασκευάζει η βιομηχανία σε ορισμένη χρονική περίοδο, αν στο ίδιο χρονικό διάστημα αναμένεται να κατασκευάζει 1000 αυτοκίνητα με κυβικά έως και 2 lit.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη)* *Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μιγαδικός z με $z \neq 1/2$ έτσι ώστε να ισχύουν*

$$f^2(x) + \sin^2(x) = 2x f(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = m,$$

όπου $m = \frac{|z-2|}{|2z-1|}$.

(α) Να δείξετε ότι $|z-2| = |2z-1|$.

(β) Να δείξετε ότι το z ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο

(γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\sin x)}{x^2 - x}$.

(δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

(ε) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της f.

(στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(|z+3-4i|+5)x = x^3 + 10$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

$$z = (k - \eta\mu t) + (k - \sigma\upsilon\nu t)i$$

με $t \in \mathbb{R}$ και $k > 1$.

- (Ε1) Να βρείτε πού κινείται η εικόνα του μιγαδικού z.
- (Ε2) Αν η εικόνα του μιγαδικού w κινείται στην ευθεία $y = -x - (k-1)$, να βρείτε το k ώστε το $|z-w|_{min} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1$.
- (Ε3) Για το k του (Ε2) ερωτήματος βρείτε πού κινείται η εικόνα του $\bar{z}$ και το ελάχιστο και μέγιστο του $|z - \bar{z}|$.
- (Ε4) Για το k του (Ε2) ερωτήματος βρείτε το ελάχιστο του $|w - 3 + 4i|$.
- (Ε5) Αν ο μιγαδικός u με

  $$u = (-1 + m\eta\mu t) + (-1 + m\sigma\upsilon\nu t)i,$$

  να βρείτε για ποια τιμή του m ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του u περνά από την αρχή των αξόνων.
- (Ε6) Για τα k, m του (Ε2) και (Ε5) ερωτήματος, να βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο του $|z - u|$.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης)* *Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x) = e^{-x} - \ln x + 2$$

α Να δείξετε ότι είναι $1-1$,

β Να λυθεί η εξίσωση $e^{-x^2-1} - \ln(x^2+1) = \frac{1}{e}$,

γ Να λυθεί η ανίσωση $e^{-\frac{1}{x}} + 2\ln x > e^{-x}$.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης)* *Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε η συνάρτηση*

$h(x) = e^{-f(x)} - f^3(x) + 2$ *να είναι γνησίως αύξουσα.*

Να βρείτε την μονοτονία της $f(x)$ και να λύσετε την ανίσωση:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x^2-x)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{f(4-x)} > 0$

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Θωμάς Ποδηματάς)* *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) με $f(a) \neq f(b)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε να ισχύει ότι: $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)^2$.*

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Σωτήρης Λουρίδας)* *Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [1, e] \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, $f(e) = 1$ και $f'(x) + e^{f(x)} = x + \dfrac{1}{x}$, για κάθε $x \in [1, e]$. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) = \ln x$ για κάθε $x \in [1, e]$.*

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Σωτήρης Λουρίδας)* *Να αποδειχθεί ότι:*

$$\int_0^2 \frac{x^{10} + 2^{10}}{x^{15} + 2^{15}} dx < \frac{181}{2816}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου)* *Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει :*

$$(f(x))^2 + (f'(x))^2 \leq x^2 + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

1. $(f(1))^2 - (f(0))^2 \leq \dfrac{4}{3}$,
2. $|f(1)| \leq \dfrac{4}{3}$,
3. $|F(1) - F(0)| \leq \dfrac{10}{9}$, όπου F είναι μια αρχική της f.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς) Θεωρούμε τις συναρτήσεις* $f(x), g(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *δυο φορές παραγωγίσιμες με* $g''(x) > 0, \forall x \in [a,b]$.

Αν ισχύει $(x-a)f'(x) = (x-b)g'(x), \forall x \in [a,b]$ *τότε*

1) *Να αποδείξετε ότι*

$g'(x) > 0$ *και* $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$

2) *Αν επιπλέον ισχύει* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

να δείξετε ότι

α) $f(b) = g(a)$

β) *Υπάρχει ακριβώς ένα* $\xi \in (a,b) : f(\xi) = g(\xi)$

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο parmenides51) Δίνονται οι μιγαδικοί* $z_1 = a + e^a i$, $z_2 = b + bi$, $z_3 = c + i\ln c$ *με* $a, b \in \mathbb{R}, c > 0$.

1. *Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών* z_1, z_2, z_3,
2. *Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο* $|z_1 - z_2|$ *καθώς και τους μιγαδικούς* z_1, z_2 *για τους οποίους επιτυγχάνεται το ελάχιστο,*
3. *Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο* $|z_1 - z_3|$ *καθώς και τους μιγαδικούς* z_1, z_3 *για τους οποίους επιτυγχάνεται το ελάχιστο.*

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης* $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει*

$$f(x) + x\,f'(x) = \frac{1}{2}\,f\left(\tfrac{x}{2}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x \in [0,+\infty)\,.$$

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Από όλες τις εφαπτόμενες ευθείες στην γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{\ln(x^{2\rho})}{x^{2\kappa+1}}$, $\rho \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in \mathbb{N}$, *να βρεθούν εκείνες που εφάπτονται σε δύο διαφορετικά σημεία στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.*

Ασκήσεις μόνο για μαθητές

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Η συνάρτηση* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν*

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^1 e^{f'(x)} f'(x)\,dx = f(1).$$

Να δείξετε ότι $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης* $f : (0,+\infty) \to R$ *που ικανοποιεί την* $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{f(x)}{y} - \dfrac{x f(y)}{y^2}$ *για κάθε* $x, y \in (0,+\infty)$ *και είναι παραγωγίσιμη στο 1, με* $f'(1) = 1$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors,
Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αριθμού n, ώστε να ισχύει*

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x + n\sin^2 x\cos^2 x = 1,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

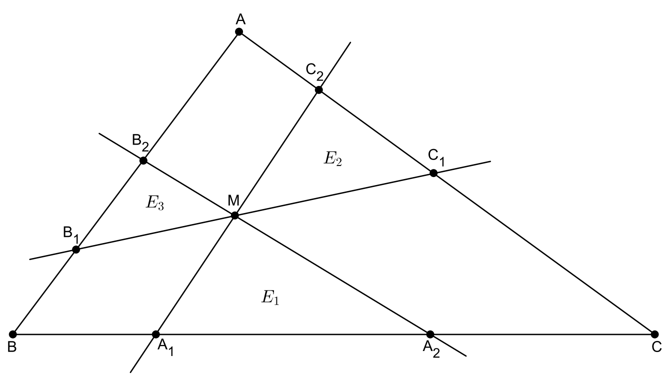
ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Αν* a, b, c *θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε* $a + b + c = 3$, *να δείξετε ότι*

$$\frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο* $\triangle\, ABC$ *με υποτείνουσα BC, ονομάζουμε I το έγκεντρο. Η ευθεία BI τέμνει την AC στο σημείο D και έστω E, το συμμετρικό του D ως προς την CI. Η ευθεία EI τέμνει την πλευρά AB στο σημείο έστω Z. Να αποδειχθεί ότι η DZ είναι παράλληλη στην CI.*

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Δίνεται τρίγωνο* $\triangle\, ABC$ *με εμβαδόν E και έστω M, τυχόν σημείο στο εσωτερικό του.*



Τρεις τυχούσες ευθείες δια του M, τέμνουν τις πλευρές του $\triangle\, ABC$ *όπως φαίνεται στο σχήμα, δημιουργώντας τρία τρίγωνα με εμβαδά* E_1, E_2, E_3. *Να αποδειχθεί ότι*

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} \geq \frac{18}{E}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors,
Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Ανδρέας Δαλαούτης) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:*

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

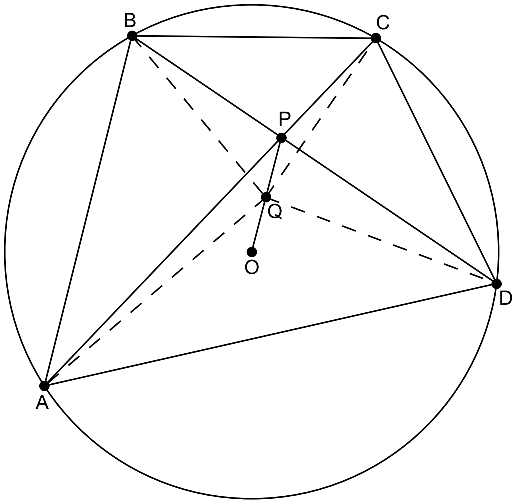
ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογιώργης) Να προσδιορίσετε όλες τις γνησίως αύξουσες συναρτήσεις*

$$f : \{1, 2, \ldots, 10\} \to \{1, 2, \ldots, 100\}$$

τέτοιες ώστε $x + y | x f(x) + y f(y)$, *για κάθε* $x, y \in \{1, 2, \ldots, 10\}$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Στυλιανού) Δίνεται τετράπλευρο* $ABCD$ *εγγεγραμμένο σε κύκλο* (O) *και έστω το σημείο* $P \equiv AC \cap BD$.



Στο εσωτερικό του $ABCD$ *ορίζεται το σημείο* Q, *ώστε να είναι*

$$\angle QAB + \angle QCB = \angle QBC + \angle QDC = 90^o.$$

Αποδείξτε ότι τα σημεία P, Q, O *είναι συνευθειακά, όπου* O *είναι το κέντρο του* (O).

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Υποθέστε ότι για τυχόν σημείο* P *στο εσωτερικό κυρτού τετραπλεύρου* $ABCD$, *το άθροισμα των αποστάσεών του από τις ευθείες* AB, BC, CD, DA, *παραμένει σταθερό. Αποδείξτε ότι το* $ABCD$ *είναι παραλληλόγραμμο.*

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Συγκελάκης - Θέμα 1ης Προκριματικής Φάσης Γ Λυκείου 1995) Ένας 6-ψήφιος αριθμός αρχίζει με το ψηφίο 5. Είναι αληθές, ότι πάντα μπορούμε να προσθέσουμε από τα δεξιά του αριθμού 6 ψηφία ώστε ο λαμβανόμενος αριθμός να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου·*

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Αντώνης Κυριακόπουλος) Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο* ABC *και στις πλευρές του* AB *και* AC *τα σημεία* D *και* E *αντιστοίχως, έτσι ώστε η ευθεία* DE *να εφάπτεται στον εγγεγραμμένο του κύκλο. Να αποδείξετε ότι:* $\dfrac{AD}{DB} + \dfrac{AE}{EC} = 1$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον διαγωνισμό IMC του 1996) Έστω* n *φυσικός αριθμός. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1 + 2^x)\sin x}\, dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Αλέξανδρος Γεωργακάπουλος) Έστω* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε* $a_n > \frac{1}{n}$ *για άπειρους φυσικούς* n. *Να αποδειχθεί ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *αποκλίνει.*

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Θανάσης Κοντογεώργης) Στο σύνολο* $M = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ *ορίζουμε την πράξη* $x * y = 3(xy - 3x - 3y) + m$, $m \in \mathbb{R}$. *Να βρείτε όλα τα* m *για τα οποία η δομή* $(M, *)$ *αποτελεί ομάδα.*

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(vzf) Έστω ένα σύνολο από* m *πραγματικούς* $n \times n$ *πίνακες που έχει αντιστρέψιμο άθροισμα. Δείξτε ότι κάποιο υποσύνολο, το πολύ* n *από αυτούς τους πίνακες, έχει επίσης αντιστρέψιμο άθροισμα.*

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Κώστας Τσουβαλάς) Να υπολογιστεί το*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - aix)}{x^2 + m}\, dx, \quad a > 0,\ m > 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Αν* $a_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{\ln j}$ *να υπολογιστεί το* $\lim(\sqrt[n]{n})^{a_n}$

ΑΕΙ Μαθηματική Λογική και Θεμέλια Μαθηματικών

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Σπύρος Καπελλίδης)* $A_n = \{n, 2n, 3n, ...\}$ *με* $n \in \mathbb{N}^*$

Αν J *ένα άπειρο υποσύνολο του* $\mathbb{N}^*$, *τότε ποιο είναι το* $\bigcap_{i\in J} A_i$·

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Σπύρος Καπελλίδης)*

Είναι γνωστό πως η συμμετροδιαφορά δύο συνόλων A, B *ορίζεται ως εξής* $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, *είναι δε πράξη αντιμεταθετική και προσεταιριστική.*

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $A_1 \Delta A_2 \Delta ... \Delta A_n$ *αποτελείται από εκείνα και μόνον τα στοιχεία που ανήκουν σε περιττό αριθμό* A_i

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Αναστάσης Καφετζόπουλος) Αν* $p \in P$ *με* $p > 5$ *να δειχθεί ότι ο αριθμός* $(p - 1)! + 1$ *δεν είναι δύναμη του* p *(δηλαδή δεν είναι της μορφής* p^k *για κάποιο* $k \in N$*).*

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο dimtsig) Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί που έχουν σαν δεκαδικά ψηφία όλο μονάδες και είναι τέλεια τετράγωνα.*

Ανώτερα Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω S ένα απειροσύνολο θετικών πραγματικών, για το οποίο για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του $s_1, s_2, ..., s_n$ ισχύει $s_1+s_2+...+s_n < 1$. Είναι το S αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο ;*

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Αχιλλέας Συννεφακόπουλος) Να βρεθούν όλες οι ακέραιες (entire) μιγαδικές συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε*

$$f(z)^2 + g(z)^2 = 1 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

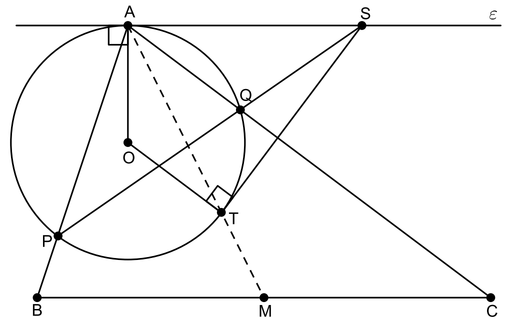
ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η διχοτόμος BE της ορθής γωνίας B χωρίζεται από το κέντρο O του εγγεγραμμένου κύκλου σε λόγο $\dfrac{BO}{OE} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου.*

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί η τιμή της παράστασης*

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{11}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{111}{121}\right)\right).$$

Ο Φάκελος του καθηγητή, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο KARKAR) Ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή A τριγώνου ABC και είναι παράλληλη προς την βάση BC. Κύκλος (O) εφάπτεται της ευθείας στο A και τέμνει τις πλευρές AB, AC στα σημεία P, Q αντίστοιχα.*



Η PQ τέμνει την ε στο σημείο S, από το οποίο φέρω το άλλο εφαπτόμενο τμήμα ST. Δείξτε ότι η AT διέρχεται από το μέσο M της BC.

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Γιάννης Σταματογιάννης [Ποθητός Σταυρόπουλος]) Μεταβλητού τριγώνου ABC η κορυφή A παραμένει σταθερή, η γωνία BAC παραμένει σταθερή κατά μέγεθος και η πλευρά BC κινείται σε σταθερή ευθεία δ. Να αποδειχθεί ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC εφάπτεται σταθερού κύκλου.*

Ο Φάκελος του καθηγητή, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση :*

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = \left|z^2 + \frac{1}{z^2}\right| = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, $n-$ βαθμού με απλές ρίζες $x_1, x_2, ..., x_n$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = 0$$

Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Κάποιος αγόρασε 100 κιλά πατάτες, γνωρίζοντας ότι αποτελούνται κατά 99% από νερό. Τις άφησε στον ήλιο για μια βδομάδα και υπολόγισε ότι τώρα αποτελούνται κατά 98% από νερό. Πόσο ζυγίζουν τώρα οι πατάτες·*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=18473

Λύση 1 (Δημήτρης Μυρογιάννης) Έστω x τα κιλά τώρα. Τα $0,98x$ είναι νερό και τα $0,02x$ είναι ας πουμε άμυλο. Το άμυλο όμως (λογικά) δεν μεταβλήθηκε και παρέμεινε ένα κιλό, άρα $0,02x = 1$, δηλαδή $x = 50$ κιλά.

Λύση 2 (*Parmenides*51) Μια λύση που μου άρεσε από έναν Φυσικό. Μου αρέσουν οι εξισώσεις!
Αρχικά είχαμε 100 κιλά πατάτες σύνολο, εκ των οποίων τα 99 κιλά είναι νερό.
Έστω x κιλά η μάζα που χάνεται. Τώρα έχουμε $100 - x$ κιλά πατάτες σύνολο, εκ των οποίων τα $99 - x$ κιλά είναι νερό. Οπότε

$$\frac{99-x}{100-x} = 0,98 \Leftrightarrow 99 - x = 98 - 0,98x \Leftrightarrow$$

$$x - 0,98x = 99 - 98 \Leftrightarrow 0,02x = 1 \Leftrightarrow x = 50 \text{ κιλά.}$$

Άρα έμειναν $100 - 50 = 50$ κιλά.

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος)*

Ένας αριθμός (φυσικός) με δέκα ή λιγότερα ψηφία λέγεται αυτοβιογραφικός αν το πρώτο του ψηφίο (από αριστερά) δηλώνει των αριθμό των «μηδενικών» που περιέχει, το δεύτερο ψηφίο δηλώνει τον αριθμό των «μονάδων» που περιέχει κ.ο.κ. Για παράδειγμα τέτοιος αριθμός είναι ο 6210001000.

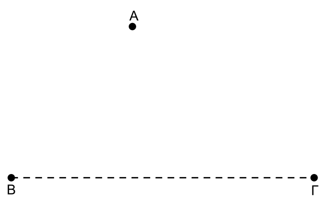
Να βρεθεί ο μικρότερος αυτοβιογραφικός αριθμός.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=21037

Λύση (Αλέξανδρος Συγγελάκης) Το 1210 είναι η απάντηση.

Αν ο αριθμός ξεκινούσε από 2 τότε θα είχε και δύο μηδενικά και στην τρίτη θέση τουλάχιστον ένα άσσο. Άρα θα ήταν τουλάχιστον 4-ψήφιος άρα μεγαλύτερος από το 1210. Άρα αν βρούμε ένα αριθμό έως 4 ψηφία, είναι και ο ζητούμενος. Αν ξεκινάει από 1 τότε θα έχει τουλάχιστον ένα 0 και στην επόμενη θέση τουλάχιστον ένα 1. Μα το επόμενο ψηφίο δε μπορεί τότε να είναι το 1 γιατί θα είχαμε 2 άσσους, οπότε θα έπρεπε να βάλουμε 2 στη δεύτερη θέση. Άρα με πρώτο ψηφίο το 1 θα πρέπει υποχρεωτικά στη δεύτερη θέση να έχουμε 2 οπότε θα πρέπει να τοποθετήσουμε τουλάχιστον άλλο ένα 1 σε κάποια επόμενη θέση. Στην τρίτη θέση πρέπει να μπει τουλάχιστον ένας άσσος που δηλώνει το 2 της προηγούμενης θέσης. Μένει το 0 που χρωστάμε λόγω του πρώτου 1 οπότε από την κατασκευή του ο συγκεκριμένος αριθμός είναι και ο μικρότερος.

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος)* *Κάπου ανάμεσα στις πόλεις B, Γ θα τοποθετηθεί ηλεκτρικός σταθμός που θα εξυπηρετεί τις πόλεις B, Γ καθώς και την μικρότερη A. Που θα τοποθετηθεί ο ηλεκτρικός σταθμός ώστε να χρειάζεται συνολικά το μικρότερο δυνατόν μήκος καλωδίου που να συνδέει κάθε μία από τις πόλεις με τον σταθμό;*



---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&p=117780

Λύση (Γιώργος Απόκης) Αν K είναι η θέση του σταθμού, τότε θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα $KA + KB + K\Gamma$.

Όμως, αφού το K είναι σημείο του τμήματος $B\Gamma$, το άθροισμα $KB + K\Gamma$ είναι σταθερό και ίσο με $B\Gamma$. Επομένως, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε το AK. Για το λόγο αυτό φέρνουμε την κάθετη από το A στη $B\Gamma$ και το ίχνος της θα είναι η θέση του σταθμού.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου)* *Να αποδείξετε ότι ο αριθμός*

$$A = 6^{2006} + 3^{2003} + 18^{2001} + 9^{2005}$$

είναι πολλαπλάσιο του 30.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&p=110973

Λύση (Gauss 1988) Ο αριθμός 6^{2006} έχει τελευταίο ψηφίο το 6 και αυτό συμβαίνει για όλες τις δυνάμεις με βάση 6.

Ο αριθμός 3^{2003} έχει τελευταίο ψηφίο το 7 επειδή γράφεται $(3^4)^{500} \cdot 3^3$ και το 3^4 έχει τελευταίο ψηφίο το 1 και το 3^3 έχει το 7.

Ο αριθμός 18^{2001} έχει τελευταίο ψηφίο το 8 επειδή γράφεται $(18^4)^{500} \cdot 18$ και το 18^4 έχει τελευταίο ψηφίο το 6 και το 18 έχει το 8.

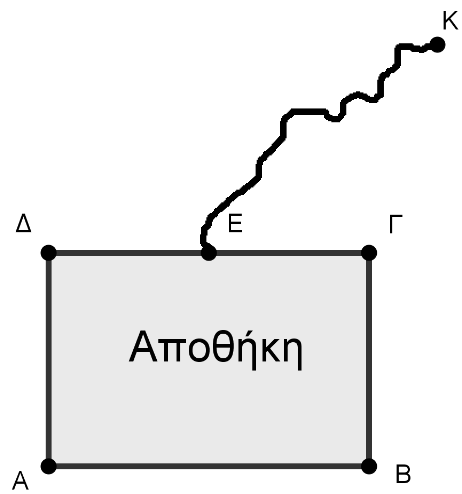
Ο αριθμός 9^{2005} έχει τελευταίο ψηφίο το 9 επειδή γράφεται $(9^2)^{1002} \cdot 9$ και το 9^2 έχει τελευταίο ψηφίο το 1 .

Από τα παραπάνω, έχουμε ότι ο αριθμός

$$6^{2006} + 3^{2003} + 18^{2001} + 9^{2005}$$

έχει τελευταίο ψηφίο το 0, επειδή $6 + 7 + 8 + 9 = 30$. Άρα διαιρείται με το 10, αλλά και με το 3 επειδή κάθε όρος του διαιρείται με το 3, όπως για παράδειγμα ο 6^{2006} διαιρείται με το 3, επειδή $6^{2006} = 3 \cdot 3^{2005} \cdot 2^{2006}$. Άρα ο αριθμός θα διαιρείται και με το $3 \cdot 10$, δηλαδή και με το 30, επειδή $\gcd(3, 10) = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο Παύλος Μαραγκουδάκης) Ο κ. Μανώλης έχει μια αποθήκη ΑΒ˙ όπως φαίνεται στο σχήμα με μήκος 6m και πλάτος 4m. Μια κατσικούλα είναι δεμένη στην άκρη ενός σχοινιού μήκους 9m όπως φαίνεται στο σχήμα.*

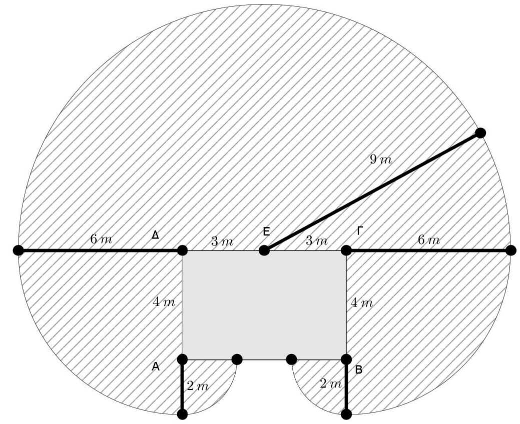


(α) Να γραμμοσκιάσετε την περιοχή στην οποία η κατσικούλα μπορεί να βοσκήσει.
(β) Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής αυτής.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&p=120912

Λύση (Γιώργος Απόκης). Το εμβαδόν του μέρους που μπορεί να βοσκήσει η κατσίκα αποτελείται από ένα ημικύκλιο κέντρου E και ακτίνας $9m$, από δύο τεταρτοκύκλια κέντρου Γ το ένα και Δ το άλλο και ακτίνας $6m$ καθώς δύο τεταρτοκύκλια κέντρου A το ένα και B το άλλο και ακτίνας $2m$. Δηλαδή

$$E = \frac{\pi \cdot 9^2}{2} + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 6^2}{4} + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \frac{121\pi}{2} \ \tau.\mu.$$



ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο KARKAR) Ο Α , ο Β και ο Γ , κάθονται γύρω από ένα τραπέζι , πάνω στο οποίο βρίσκεται πορτοφόλι με ικανό ποσό χρημάτων .*
Λέει ο Α : Εγώ αν πάρω το πορτοφόλι θα έχω διπλάσιο ποσό χρημάτων από τους δυό σας ! Απαντά ο Β : αν πάρω εγώ το πορτοφόλι θα έχω τριπλάσια από σας ! . Και ο Γ : Εγώ και το πορτοφόλι πιάνουμε πενταπλάσια από τους δυό σας ! Τι ποσοστό του συνολικού ποσού (συμπεριλαμβανομένου του πορτοφολιού) κατέχει ο Β ·

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&p=123216

Λύση (Γιώργος Ρίζος) Έστω A, B, Γ τα ποσά που έχουν αντίστοιχα οι τρεις τους και x στο πορτοφόλι. Τότε έχουμε το σύστημα

$$A + x = 2(B + \Gamma)$$
$$\mathrm{B} + x = 3(A + \Gamma)$$
$$\Gamma + x = 5(A + B)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + 3x = 8\mathrm{A} + 7\mathrm{B} + 5\Gamma \quad \Leftrightarrow \ x = \frac{7\mathrm{A} + 6\mathrm{B} + 4\Gamma}{3}$$

Οπότε $3\mathrm{B} + 7\mathrm{A} + 6\mathrm{B} + 4\Gamma = 9\mathrm{A} + 9\Gamma \Leftrightarrow \mathrm{B} = \dfrac{2\mathrm{A} + 5\Gamma}{9}$

Αφαιρώντας τις δύο πρώτες έχουμε:

$\mathrm{B} - \mathrm{A} = 3\mathrm{A} + \Gamma - 2\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{B} = \dfrac{4\mathrm{A} + \Gamma}{3}$

Οπότε $\dfrac{4\mathrm{A} + \Gamma}{3} = \dfrac{2\mathrm{A} + 5\Gamma}{9} \Leftrightarrow 5\mathrm{A} = \Gamma$

Άρα $\mathrm{B} = 3\mathrm{A}$ και $x = \dfrac{7A + 18A + 20A}{3} = 15A$

Άρα $\dfrac{B}{A + B + \Gamma + x} = \dfrac{3}{1 + 3 + 5 + 15} = \dfrac{1}{8} = 12,5\%$

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γκριμπαβιώτης) Δίνεται το πολυώνυμο:*

$$P(x) = x^{15} - 2012x^{14} + 2012x^{13} - \ldots - 2012x^2 + 2012x.$$

Υπολογίστε το $P(2011)$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=18552

Λύση (Βασίλης Ευαγγέλου) Αν αναλύσουμε τους συντελεστές και κάνουμε επιμεριστικές τότε:

$P(x) = x^{15} - 2012x^{14} + 2012x^{13} - \ldots$

$-2012x^2 + 2012x =$

$x^{15} - (2011+1)x^{14} + (2011+1)x^{13} - \ldots$

$-(2011+1)x^2 + (2011+1)x =$

$= (x^{15} - 2011x^{14} + x^{13} - \ldots - 2011x^2 + x) +$

$(-x^{14} + 2011x^{13} - \ldots - x^2 + 2011x) \quad (1)$

Άρα το $P(2011)$ είναι:

$(1) \Rightarrow 2011^{15} - 2011 \cdot 2011^{14} + 2011^{13} - \ldots$

$-2011 \cdot 2011^2 + 2011) + (-2011^{14} + 2011 \cdot 2011^{13} - \ldots$

$-2011^2 + 2011 \cdot 2011) = 2011 + 0 = 2011$

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Άν το τρίγωνο* $\triangle ABC$ *είναι ορθογώνιο με* $\hat{A} = 90^0$ *τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο με πλευρές*

$$ab, \ bc, \ (a+c)(a-c)$$

το οποίο μάλιστα είναι και αυτό ορθογώνιο.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=10214

Λύση (*kanenas*) Στο τρίγωνο ABC ισχύει $a^2 = b^2 + c^2$

Οι πλευρές του ορθογωνίου που ψάχνουμε είναι $ab, bc, a^2 - c^2 = (b^2 + c^2) - c^2 = b^2$

Είναι $a > b$ άρα $ab > b^2$, $a > c$ άρα $ab > bc$, οπότε η μεγαλύτερη πλευρά είναι η ab.

Υψώνοντάς όλες τις πλευρές στο τετράγωνο παίρνουμε a^2b^2, b^2c^2, b^4

Είναι $a^2b^2 = (b^2 + c^2)b^2 = b^4 + c^2b^2$, που είναι το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, που σημαίνει ότι είναι ορθογώνιο.

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Νίκος Αλεξανδρόπουλος) Να προσδιορισθεί η τιμή του πραγματικού* m *ώστε η εξίσωση* $(m-1)x^4 - 5x^2 + 3m - 2 = 0$ *να έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=24722

Λύση (Χαρίλαος Χόρτης) Αν $m = 1$ τότε η εξίσωση γίνεται: $-5x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Αν $m \neq 1$ τότε θέτουμε $x^2 = z$ και η εξίσωση μετασχηματίζεται στην

$$(m-1)z^2 - 5z + 3m - 2 = 0$$

με διακρίνουσα

$$\begin{aligned}\Delta(z) &= (-5)^2 - 4(m-1)(3m-2)\\ &= 25 - 4(3m^2 - 5m + 2)\\ &= 25 - 12m^2 + 20m - 8\\ &= -12m^2 + 20m + 17 \geq 0\\ &\Leftrightarrow 12m^2 - 20m - 17 \leq 0 \qquad (1)\end{aligned}$$

$$\Delta(m) = (-20)^2 - 4(-17)12 = 400 + 816 = 1216$$

και

$$m_1 = \frac{20 + \sqrt{1216}}{24} = \frac{5 + 2\sqrt{19}}{6},$$
$$m_2 = \frac{20 - \sqrt{1216}}{24} = \frac{5 - 2\sqrt{19}}{6}.$$

Άρα (1) $\Leftrightarrow \frac{5 - 2\sqrt{19}}{6} \leq m \leq \frac{5 + 2\sqrt{19}}{6}$. Η εξίσωση έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες, αν και μόνο αν, η επιλύουσα έχει μη αρνητικές ρίζες.
Από τους τύπους *Vieta* έχουμε:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

$$\begin{aligned}z_1 z_2 = \frac{\gamma}{a} = \frac{3m-2}{m-1} &\geq 0 \Leftrightarrow\\ 3m - 2 &\geq 0 \Leftrightarrow\\ 3m &\geq 2 \Rightarrow\\ m &\geq \frac{2}{3}\end{aligned}$$

δηλαδή οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $m > 1$ και συνεπώς $1 < m \leq \frac{5 + \sqrt{19}}{6}$.

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Δημήτρης Βερροιόπουλος) Αν:*

$$x = \underbrace{111...1}_{2\nu \text{ ψηφία}} \;\wedge\; y = \underbrace{111...1}_{\nu+1 \text{ ψηφία}} \;\wedge\; z = \underbrace{666...6}_{\nu \text{ ψηφία}},$$

να αποδείξετε ότι το άθροισμα: $x + y + z + 8$ *είναι τετράγωνο ρητού αριθμού.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=23823

Λύση (Ηλίας Καμπελής) Είναι:

$$\begin{aligned}x &= \underbrace{111\cdots1}_{2\nu \text{ ψηφία}}\\ &= 1\cdot10^0 + 1\cdot10^1 + 1\cdot10^2 + \cdots + 1\cdot10^{2\nu-1}\\ &= \frac{10^{2\nu} - 1}{9}\end{aligned}$$

ως άθροισμα των 2ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 10$.

Ομοίως:

$$\begin{aligned}y &= \underbrace{111\cdots1}_{\nu+1 \text{ ψηφία}}\\ &= 1\cdot10^0 + 1\cdot10^1 + 1\cdot10^2 + \cdots + 1\cdot10^{\nu}\\ &= \frac{10^{\nu+1} - 1}{9}\\ &= \frac{10\cdot10^{\nu} - 1}{9}\end{aligned}$$

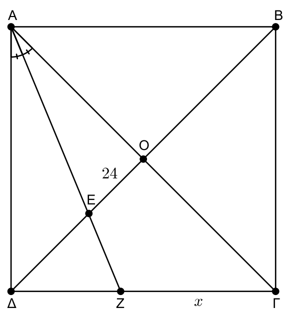
και

$$
\begin{aligned}
z &= \underbrace{666\cdots 6}_{\nu\ \psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha} \\
&= 6\cdot 10^0 + 6\cdot 10^1 + 6\cdot 10^2 + \cdots + 6\cdot 10^{\nu-1} \\
&= 6\cdot \frac{10^\nu - 1}{9} \\
&= \frac{6\cdot 10^\nu - 6}{9}.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
x+y+z+8 &= \frac{10^{2\nu}-1}{9} + \frac{10\cdot 10^\nu - 1}{9} + \frac{6\cdot 10^\nu - 6}{9} + 8 \Rightarrow \\
x+y+z+8 &= \frac{10^{2\nu} + 16\cdot 10^\nu + 64}{9} \Rightarrow \\
x+y+z+8 &= \left(\frac{10^\nu + 8}{3}\right)^2.
\end{aligned}
$$

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω το τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν η διχοτόμος της $\Gamma\widehat{A}\Delta$ τέμνει τη ΔΟ στο Ε, την ΓΔ στο Ζ και το μήκος του ΕΟ είναι 24, να υπολογίσετε το μήκος της ΖΓ.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=120

Λύση (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Φέρω ΟΝ//ΖΓ. Είναι ΑΖ διχοτόμος της $\Delta\widehat{A}\Gamma = 45^\circ$, άρα

$$Z\widehat{A}\Gamma = \varphi = 22,5^\circ.$$

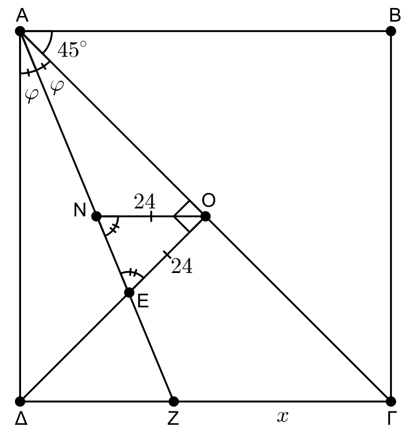
$$A\widehat{E}O = 67,5^\circ \ \ (1)\,,$$

ως συμπληρωματικής της φ στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΕ.

$$E\widehat{N}O = E\widehat{A}B = 22,5^\circ + 45^\circ = 67,5^\circ \ \ (2)\,,$$

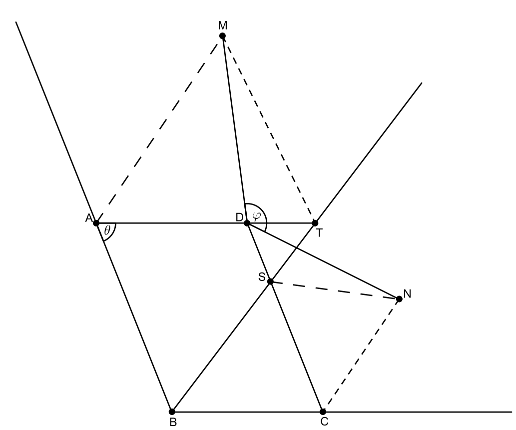
ως εντός - εκτός επί τα αυτά. Από (1), (2) το τρίγωνο ΟΝΕ είναι ισοσκελές (ΟΕ = ΟΝ = 24). Είναι Ο μέσον της ΑΓ στο τρίγωνο ΖΑΓ και η εξ αυτού παράλληλη προς την ΖΓ θα είναι το μισό της. Επομένως

$$Z\Gamma = x = 2ON = 48.$$



Λύση 2 (Μιχάλης Λάμπρου) Έστω a η πλευρά του τετραγώνου. Από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο ΑΓΔ έχουμε $\dfrac{x}{a-x} = \dfrac{A\Gamma}{A\Delta} = \sqrt{2}$, άρα $x = \dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}a$. Όμοια, από το θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στο ΑΟΔ είναι $OE = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}a\right)$, άρα $x = 2OE = 48$.

ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο KARKAR) Σημείο S βρίσκεται στην πλευρά CD του παραλληλογράμμου $ABCD$. Η BS τέμνει την AD στο T. Κατασκευάζω τα διχοτομούντα τμήματα AM, TM, CN, SN των αντίστοιχων γωνιών. Υπολογίστε τη $M\widehat{D}N = \varphi$ συναρτήσει της $\widehat{A} = \theta$.*

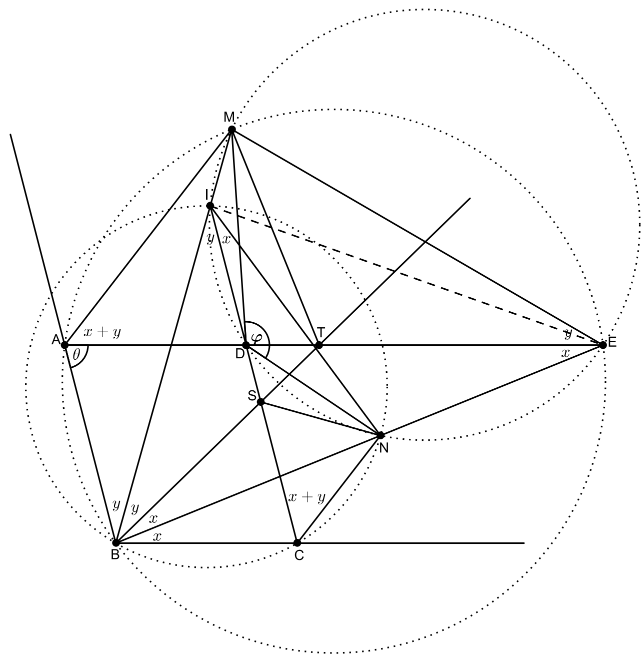


http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=23657

Λύση (Antonis-Z) Φέρω την BM και θέτω I το σημείο τομής των BM, DC. Έστω ότι η προέκταση της BN τέμνει την AD στο E. Τα N, M είναι παράκεντρα, συνεπώς η BN είναι διχοτόμος της

$$\angle SBC = \angle SBN + \angle NBC = 2x$$

και επίσης η BM είναι διχοτόμος της $\angle ABS = \angle ABM + \angle MBT = 2y$.



Εύκολα βρίσκουμε ότι $\angle DCN = \angle MAD = x + y$. Το τετράπλευρο $MABE$ είναι εγγράψιμο, άρα $\angle ABM = \angle AEM = y$. Επίσης

$$\angle BEA = \angle EBC = x$$

λόγω της παραλληλίας. Το τετράπλευρο $IBCN$ είναι εγγράψιμο, άρα $\angle CBN = \angle CIN = x$, επομένως $\angle DIN = \angle NED$ και από αυτό καταλαβαίνουμε ότι το τετράπλευρο $DIEN$ είναι εγγράψιμο. Λόγω της παραλληλίας είναι επίσης $\angle DIB = \angle ABI = y$, άρα $\angle DIB = \angle DEM$, οπότε το τετράπλευρο $MIDE$ είναι και αυτό εγγράψιμο. Από την εγγραψιμότητα των $DIEN$, $MIDE$ έχουμε ότι το $MDNE$ είναι εγγράψιμο, άρα $\angle MDN = \varphi = 180^\circ - x - y = 180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Ηλίας Καμπελής) Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_1 = 4$ και αναδρομικό τύπο*

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{8\alpha_\nu - 9}{\alpha_\nu + 2}$$

με $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α *Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με*

$$\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu - 3}$$

με $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι αριθμητική πρόοδος και να βρεθεί ο γενικός τύπος της.

β *Να βρεθεί το άθροισμα των ν πρώτων όρων της ακολουθίας (β_ν).*

γ *Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της ακολουθίας (α_ν).*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=24924

Λύση (Γιώργος Απόκης)

α Είναι :

$$\beta_{\nu+1} = \frac{1}{a_{\nu+1} - 3} = \frac{1}{\frac{8a_\nu - 9}{a_\nu + 2} - 3} = \frac{1}{\frac{8a_\nu - 9 - 3(a_\nu + 2)}{a_\nu + 2}} = \frac{a_\nu + 2}{5a_\nu - 15} = \frac{a_\nu + 2}{5(a_\nu - 3)}$$

Επομένως, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχουμε :

$$\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = \frac{a_\nu + 2}{5(a_\nu - 3)} - \frac{1}{a_\nu - 3} = \frac{a_\nu + 2 - 5}{5(a_\nu - 3)} \Rightarrow$$

$$\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = \frac{a_\nu - 3}{5(a_\nu - 3)} = \frac{1}{5} :$$

σταθερό. Δηλαδή, αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = \dfrac{1}{a_1 - 3} = 1$ και $\beta_\nu = 1 + (\nu - 1)\dfrac{1}{5} = \dfrac{\nu + 4}{5},\ \nu \in \mathbb{N}^*$.

β Το άθροισμα είναι :

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\beta_1 + \beta_\nu) = \frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{\nu + 4}{5}\right) = \frac{\nu}{2}\frac{\nu + 9}{5} = \frac{\nu^2 + 9\nu}{10}.$$

γ Είναι :

$$\beta_\nu = \frac{1}{a_\nu - 3} \Leftrightarrow \frac{\nu + 4}{5} = \frac{1}{a_\nu - 3} \Leftrightarrow$$

$$a_\nu - 3 = \frac{5}{\nu + 4} \Leftrightarrow a_\nu = 3 + \frac{5}{\nu + 4} \Leftrightarrow a_\nu = \frac{3\nu + 17}{\nu + 4},\ \nu \in \mathbb{N}^*.$$

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο KARKAR) Αν ισχύει : $2^x = 3^a = 6^b$,να δείξτε ότι : $x = \dfrac{ab}{a-b}$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=24475

Λύση 1 (*freyia*)

$$x \ln 2 = a \ln 3 = b \ln 6 = b \ln(2.3) = b \ln 2 + b \ln 3 \Rightarrow$$

$$x \ln 2 = a \ln 3 \quad \text{και}$$

$$(a - b) \ln 3 = b \ln 2 \Rightarrow \ln 2 = \frac{a - b}{b} \ln 3.$$

Επομένως θα είναι:

$$x \ln 2 = a \ln 3 \Rightarrow x \frac{a - b}{b} \ln 3 = a \ln 3 \Rightarrow x = \frac{ab}{a - b}$$

Λύση 2 (Φωτεινή Καλδή) Έστω

$$2^x = 3^a = 6^b = m \Rightarrow$$

$$x = \frac{m}{\ln 2},\ a = \frac{m}{\ln 3},\ b = \frac{m}{\ln 6}, a \neq b$$

$$ab = \frac{m^2}{\ln 3 \ln 6},\quad a - b = m\frac{\ln 2}{\ln 3 \ln 6}$$

$$\frac{ab}{a - b} = \frac{m}{\ln 2} = x.$$

Λύση 3 (Μαργαρίτα Βαρελά)

$$2^x = 3^a = 6^b \Leftrightarrow x \ln 2 = a \ln 3 = b \ln 6$$

$$\frac{ab}{a - b} = \frac{\frac{x \ln 2}{\ln 3} \cdot \frac{x \ln 2}{\ln 6}}{\frac{x \ln 2}{\ln 3} - \frac{x \ln 2}{\ln 6}} = \frac{x^2 \ln^2 2}{x \ln 2 \cdot \ln 6 - x \ln 2 \cdot \ln 3} =$$

$$x \cdot \frac{\ln^2 2}{\ln 2\,(\ln 6 - \ln 2)} = x \cdot \frac{\ln^2 2}{\ln 2 \cdot \ln 2} = x$$

Λύση 4 (Σωτήρης Λουρίδας)

$$3 = 2^{\frac{x}{a}}, \quad 6 = 2^{\frac{x}{b}} \Rightarrow 3 = 2^{\frac{x-b}{b}} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{x-b}{b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a-b}.$$

Λύση 5 (Γιώργος Ρίζος) Αν $x = a = b = 0$ προφανώς ισχύει η υπόθεση αλλά όχι το συμπέρασμα. Θεωρούμε $a,\ b,\ x \neq 0$ Είναι προφανώς $a \neq b$, αφού $\begin{cases} a = b \\ 3^a = 6^b \end{cases} \Rightarrow 3^a = 6^a$ άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Γιώργης Καλαθάκης) Δίνονται οι κύκλοι (O,R), (K,r) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο E. Φέρνουμε τις διαμέτρους $AB, \Gamma\Delta$ των δυο κύκλων , κάθετες στη διάκεντρο OK και τον περιγεγραμμένο κύκλο του $AB\Delta\Gamma$.*
Να αποδειχθεί ότι η μπλέ περιοχή είναι ισεμβαδική με την κίτρινη περιοχή .

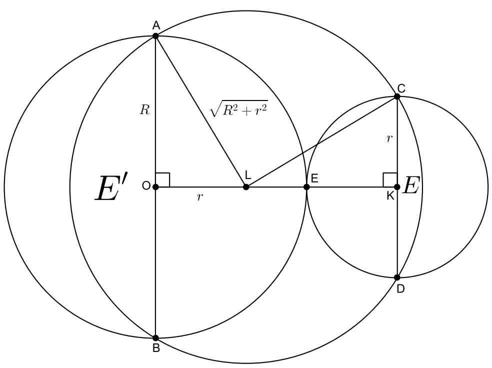
---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&p=127551#p127551

Λύση 1 (KARKAR) Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\sqrt{R^2+r^2}$ αφού $AL = CL$.

Είναι $E_{\mu\pi\lambda\epsilon} = E_{\mu\epsilon\gamma} - \dfrac{1}{2}E_{\mu\epsilon\sigma} - \dfrac{1}{2}E_{\mu\iota\kappa} - E - E'$

$= \dfrac{1}{2}\pi(R^2+r^2) - E - E'$. Τόσο είναι προφανώς και το $E_{\kappa\iota\tau\varrho}$!



Λύση 2 (Κώστας Βήττας) Από $LA = LC = \sqrt{R^2+r^2}$,(1) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο, αφού το άθροισμα των δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι ίσο με τον κύκλο κέντρου L και ακτίνας $LA = LB$.

Νομίζω όμως, ότι η (1) δεν θεωρείται γνωστό αποτέλεσμα και θα πρέπει να αποδεικνύεται (εύκολο από $R^2 + (LO)^2 = (LA)^2 = (LC)^2 = r^2 + (LK)^2$ και $R + r = OK = LO + LK$).

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο Δημήτρης Μυρογιάννης) Έστω κυρτό τετράπλευρο $ABCD$ με τις διαγώνιες του AC, BD να σχηματίζουν τις γωνίες CAB, BCA, CDB, BDA με μέτρο $70, 30, (50-a), a$ μοίρες, η κάθε μια, αντίστοιχα. Αν επιπλέον η διαγώνιος BD είναι διχοτόμος της γωνίας CBA βρείτε τον αριθμό των μοιρών που εκφράζει το a.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&t=24890

Λύση 1 (Φωτεινή Καλδή) Τριγωνομετρικά:

$$\begin{aligned} &M \equiv AC \cap BD, \\ &C\hat{B}D = A\hat{B}D = x, \\ &C\hat{M}B = 70 + x \\ &\Rightarrow \boxed{x = 40^o} \end{aligned}$$

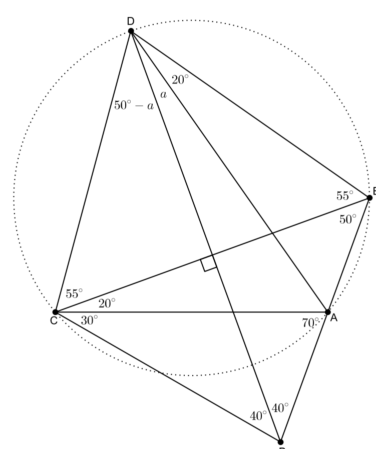
τώρα με νόμο ημιτόνων γύρω-γύρω στα

$$\triangle\, ABC,\ \triangle\, BCD,\ \triangle\, CDA,\ \triangle\, DAB$$

καταλήγουμε στην

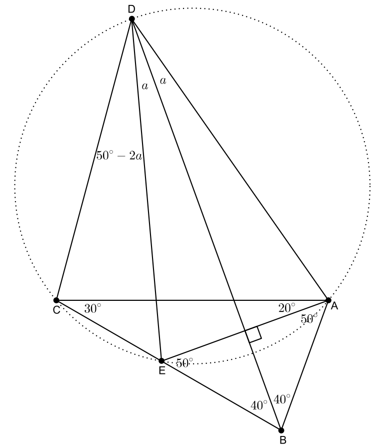
$$\begin{aligned} \frac{\sin 70}{\sin 30} &= \frac{\sin(50-a)\sin(70-a)}{\sin a \sin(60+a)} \Rightarrow \\ \frac{\sin 70}{\sin 30} &= \frac{\cos 20 - \cos(120-2a)}{\cos 60 - \cos(60+2a)} \Rightarrow \\ 2\cos 20 &= \frac{\cos 20 + \cos(60+2a)}{\frac{1}{2} - \cos(60+2a)} \Rightarrow \\ \cos(60+2a) &= 0 \\ &\Rightarrow \boxed{a = 15^o} \end{aligned}$$

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος) Ισχύει $ABC\,(70°, 80°, 30°)$.

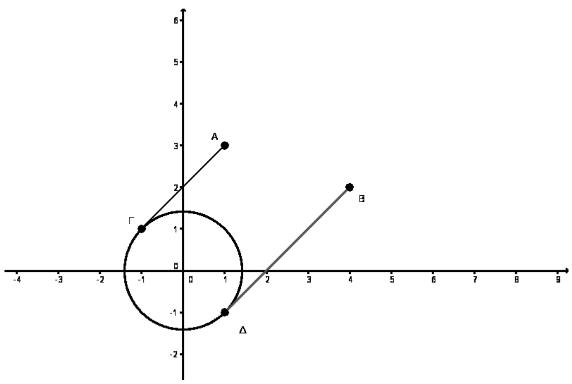


Φέρουμε από το C κάθετη στη BD, που τέμνει την προέκταση της BA στο E. Το $BCE\,(80^\circ, 50^\circ, 50^\circ)$ είναι ισοσκελές (λόγω διχοτόμου - ύψους), το τετράπλευρο $BCDE$ χαρταετός και το $AEDC$ εγγράψιμο
($\widehat{CEA} = \widehat{CDA} = 50^\circ$).
Έτσι $\widehat{ADE} = \widehat{ACE} = 20^\circ$, $DCE\,(70^\circ, 55^\circ, 55^\circ)$ και απ΄ το τρίγωνο $BCD : a = 15^\circ$.

Λύση 3 (Δημήτρης Μυρογιάννης) Από το σημείο A φέρουμε κάθετη στην BD η οποία τέμνει τη CB στο σημείο E και έτσι σχηματίζεται το εγγράψιμο $ADCE$ (από τις γωνίες των 50 μοιρών), το οποίο μαζί με την ισότητα των τριγώνων DEB, DAB δίνει εύκολα $a = 15$ μοίρες.



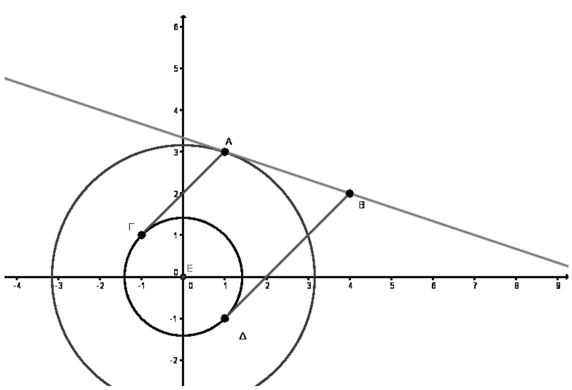
ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο KARKAR) Βρείτε την εξίσωση κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, για τον οποίο τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(4,2)$, είναι παράλληλα μεταξύ τους.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=21244

Λύση 1 (Αθανάσιος Μπεληγιάννης) Έστω $\rho > 0$ η ακτίνα του κύκλου και $C(\alpha,\beta)$, οπότε $D(-\alpha,-\beta)$.
Οι εφαπτομένες AC, BD έχουν εξισώσεις:
$\alpha x+\beta y=\rho^2$ και $-\alpha x-\beta y=\rho^2$, αντίστοιχα.
Οπότε από τα σημεία A και B έχουμε:
$\alpha+3\beta=\rho^2$ και $-4\alpha-2\beta=\rho^2$.
Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $\alpha=-\dfrac{\rho^2}{2}$ και $\beta=\dfrac{\rho^2}{2}$, οπότε από την εξίσωση του κύκλου προκύπτει ότι:
$\alpha^2+\beta^2=\rho^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \rho^2=2$, δηλαδή ο κύκλος c έχει εξίσωση $x^2+y^2=2$.

Λύση 2 (Γιώργος Απόκης)



Έστω a ο (κοινός) συντελεστής διεύθυνσης των εφαπτόμενων και $r>0$ η ακτίνα του κύκλου.

Τότε $(AC): y-3=a(x-1) \Leftrightarrow ax-y-a+3=0$ και $(BD): y-2=a(x-4) \Leftrightarrow ax-y-4a+2=0$.

Αυτές εφάπτονται του κύκλου, άρα θα ισχύουν:
$d(O,AC)=r \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{|3-a|}{\sqrt{a^2+1}}=r \Leftrightarrow$
$|3-a|=r\sqrt{a^2+1}$ και
$d(O,BD)=r \Leftrightarrow$
$\dfrac{|2-4a|}{\sqrt{a^2+1}}=r \Leftrightarrow$
$|2-4a|=r\sqrt{a^2+1}$.
Από τις δύο τελευταίες προκύπτει $|3-a|=|2-4a|$, άρα $a=1$ ή $a=-\dfrac{1}{3}$.

Για $a=1$ έχουμε $r=\sqrt{2}$, άρα $C: x^2+y^2=2$ (μπλε κύκλος) και $a=-\dfrac{1}{3}$ έχουμε $r=\sqrt{10}$ άρα $C: x^2+y^2=10$ (κόκκινος κύκλος).
Να παρατηρήσω ότι στη δεύτερη περίπτωση οι εφαπτόμενες συμπίπτουν, άρα είναι παράλληλες με την ευρύτερη έννοια.

Λύση 3 (Γιώργος Ρίζος) Έστω $y=\lambda x+\beta,\ \lambda,\ \beta\in\mathbb{R}$ η εξίσωση μιας ευθείας ε_1 που διέρχεται από το A και δεν είναι κάθετη στον $x'x$. Τότε $3=\lambda\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=3-\lambda$.

Τέμνει τον $y'y$ στο $\mathrm{K}(0,\ 3-\lambda)$.

Έστω $y=\lambda x+\gamma,\ \lambda,\ \gamma\in\mathbb{R}$ η εξίσωση της ευθείας ε_2 που διέρχεται από το B και είναι παράλληλη στην ε_1. Τότε $2=\lambda\cdot 4+\gamma \Leftrightarrow \gamma=2-4\lambda$.

Τέμνει τον $y'y$ στο $L(0,\ 2-4\lambda)$.

Αν οι ευθείες είναι εφαπτόμενες σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R στο C, D αντίστοιχα, τα ορθογώνια τρίγωνα KON, LOD είναι ίσα, αφού έχουν $CO=DO=R$, $\widehat{CON}=\widehat{DOL}$ (κατά κορυφή), οπότε $OK=OL \Leftrightarrow |3-\lambda|=|2-4\lambda| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ldots \left(\lambda=1 \ \wedge \lambda=-\dfrac{1}{3}\right)$.

Οπότε $R=d(O,\ \varepsilon_1)=\ldots\sqrt{2} \ \wedge \ R=\sqrt{10}$.

Λύση 4 (*parmenides*51)

Πρώτη περίπτωση
Τα εφαπτόμενα τμήματα AC, BD ανήκουν σε διαφορετικές εφαπτόμενες.

Έστω M το μέσο του AB. Τότε

$M\left(\frac{1+4}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Η OM είναι η μεσοπαράλληλος των ευθειών AC, BD, ως διάμεσος του τραπεζίου με βάσεις AC, BD, αφού $AC \parallel BD$.

Αφού $x_M = \frac{5}{2} \neq 0 = x_O$ ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης

$\lambda_{OM} = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{\frac{5}{2} - 0}{\frac{5}{2} - 0} = 1$,

οπότε η OM έχει εξίσωση $y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

Ο κύκλος έχει ακτίνα την απόσταση των παραλλήλων AC, OM, οπότε

$\rho = d(AC, OM) = d(A, OM) = \frac{|y_A - x_A|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{|3-1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Άρα ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = \rho^2 = \sqrt{2}^2 = 2$.

δεύτερη περίπτωση

Τα εφαπτόμενα τμήματα AC, BD ανήκουν στην ίδια εφαπτομένη, την AB (καθώς $C \equiv D$).

Αφού $x_A = 1 \neq 4 = x_B$ ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης

$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-3}{4-1} = -\frac{1}{3}$,

οπότε η AB έχει εξίσωση

$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow 3y - 9 = -x + 1 \Leftrightarrow x + 3y = 10$.

Ο κύκλος έχει ακτίνα την απόσταση του κέντρου του από την εφαπτομένη του AB, δηλαδή

$\rho = d(O, AB) = \frac{|0 + 0 - 10|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$.

Άρα ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση

$x^2 + y^2 = \rho^2 = 10$.

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Για κάθε ακέραιο n, με $n \geq 2$, να αποδείξετε ότι ισχύει:*

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=22805

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος) Είναι

$\sqrt{k} + \sqrt{k-1} > \sqrt{k}$ για κάθε $k > 1$ και για $k = 1$ ισχύει ως ισότητα.

Άρα

$$\frac{1}{\sqrt{k} - \sqrt{k-1}} > \sqrt{k},$$

άρα

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{k} - \sqrt{k-1}.$$

Επομένως, είναι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} >$$
$$1 + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots +$$
$$\sqrt{n-1} - \sqrt{n-2} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n}.$$

Λύση 2 (Θάνος Μάγκος) Είναι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > n \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}} = \frac{n}{\sqrt[2n]{n!}}.$$

Αρκεί τώρα να αποδειχθεί ότι

$$\frac{n}{\sqrt[2n]{n!}} > \sqrt{n},$$

δηλαδή ότι

$$n > \sqrt[n]{n!}.$$

Πάλι από την ΑΜ-ΓΜ είναι

$$n^2 > \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n >$$
$$n\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = n\sqrt[n]{n!},$$

οπότε προκύπτει η ζητούμενη.

Λύση 3 (Μιχάλης Λάμπρου) Το επαγωγικό βήμα είναι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

που εύκολα ελέγχουμε ότι είναι $> \sqrt{n+1}$.

Πράγματι (και ουσιαστικά αυτό ακριβώς λέει η πρώτη λύση του Θάνου) έχουμε

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Δίνεται η συνάρτηση* $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$ *για* $x \geq 0$ *και ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης* $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, *με πιθανότητες* $P(k) = \frac{12}{5} f'(k)$ *για* $k \in \Omega$.

(α) *Να μελετήσετε την* f *ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.*

(β) *Να βρεθεί η τιμή του* n.

(γ) *Μια μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή* $\overline{x} = n$. *Αν το 16% των παρατηρήσεων έχει τιμή μικρότερη του 33, να εξετάσετε το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=24101

Λύση (Διονύσης Βουτσάς)

(α) Η πρώτη παράγωγος είναι

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε ότι

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = 1$$

άρα

$$f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(n) = \frac{5}{12}$$

και άρα από τον τύπο της $f'(x)$ για $x = 1, \ldots, x = n$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{5}{12} =& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}\right) \\ =& \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

και άρα $n = 35$.

(γ) Αφού το 16% έχει τιμή μικρότερη του 33 τότε $\overline{x} - s = 33$ και άρα $s = 2$. Άρα ο συντελεστής μεταβολής ισούται με

$$CV = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100\% = 5,71\%$$

και αφού $CV < 10\%$ τότε το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Parmenides51) Μια βιομηχανία κατασκευάζει αυτοκίνητα με κυβικά μηχανών από* α *έως* β *lit με* $\alpha < \beta$ *και* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Δίνεται ότι με μηχανές το πολύ 1,6 lit αναμένεται να κατασκευάζεται το 20% των αυτοκινήτων ενώ με μηχανές τουλάχιστον 1,4 lit αναμένεται να κατασκευάζεται το 90% των αυτοκινήτων. Αν η παραπάνω κατανομή είναι ομοιόμορφη στο* $[\alpha, \beta]$ *να βρεθούν:*

(α) *Οι αριθμοί* α, β.

(β) *Η μέση τιμή της κατανομής.*

(γ) *Το πλήθος των αυτοκινήτων που αναμένεται να κατασκευάζει η βιομηχανία σε ορισμένη χρονική περίοδο, αν στο ίδιο χρονικό διάστημα αναμένεται να κατασκευάζει 1000 αυτοκίνητα με κυβικά έως και 2 lit.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=15918

Λύση 1 (Κωνσταντίνος Κομποθέκρας)

(α) Έστω X ο κυβισμός ενός τυχαίου κινητήρα. Τότε ορίζουμε τα ενδεχόμενα $A = \{X \leq 1,6\}$ και $B = \{X \geq 1,4\}$. Επειδή η κατανομή που ακολουθεί η X είναι ομοιόμορφη, η πιθανότητα του κάθε ενδεχομένου θα είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Έχουμε επομένως από τα δεδομένα:

$$P(A) = \frac{1,6 - a}{\beta - a} = 0,2$$

και

$$P(B) = \frac{\beta - 1,4}{\beta - a} = 0,9.$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς α και β προκύπτει ότι $\alpha = 1,2$ και $\beta = 3,2$

(β) Η μέση τιμή λόγω του ότι η κατανομή είναι ομοιόμορφη θα είναι $\dfrac{a+\beta}{2} = 2,2$.

(γ) Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$\Gamma = \{X \leq 2\}$$

Είναι και πάλι

$$\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = P(\Gamma) = \frac{2-1,2}{3,2-1,2} = 0,4$$

οπότε με $N(\Gamma) = 1000$ και βρίσκουμε $N(\Omega) = 2500$.

Λύση 2 (parmenides51) Επειδή η κατανομή είναι ομοιόμορφη στο $[\alpha,\beta]$, οι τιμές της είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο εκάστοτε διάστημα, δηλαδή τα μεγέθη πλάτος διαστήματος και συχνότητα στο αντίστοιχο διάστημα είναι ανάλογα ποσά.

(α) Πρώτος τρόπος:

Σε διάστημα πλάτους $\beta-\alpha$ περιέχεται το 100% των τιμών. Σε διάστημα πλάτους $1,6-\alpha$ περιέχεται το 20% των τιμών. Συνεπώς

$$\frac{\beta-\alpha}{1,6-\alpha} = \frac{100}{20}. \qquad (1)$$

Σε διάστημα πλάτους $\beta-\alpha$ περιέχεται το 100% των τιμών. Σε διάστημα πλάτους $\beta-1,4$ περιέχεται το 90% των τιμών.Συνεπώς

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta-1,4} = \frac{100}{90}. \qquad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1),(2) βρίσκω πως $\alpha = 1,2$ και $\beta = 2,2$.

Δεύτερος τρόπος:

Στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ περιέχεται το 100% των τιμών και στο διάστημα $[\alpha,1.6]$ περιέχεται το 20% των τιμών, συνεπώς στο διάστημα $[1.6,\beta]$ περιέχεται το 80% των τιμών. Επειδή στο διάστημα $[1.4,\beta]$ περιέχεται το 90% των τιμών τότε στο διάστημα $[1.4,1.6]$ περιέχεται το 10% των τιμών. Συνεπώς σε διάστημα πλάτους $1,6-1,4 = 0,2$ περιέχεται το 10% των τιμών.

Οπότε σε διάστημα πλάτους $2\cdot 0,2 = 0,4$ περιέχεται το $2\cdot 10\% = 20\%$ των τιμών κι΄ επειδή σε διάστημα πλάτους $1,6-\alpha$ περιέχεται το 20% των τιμών τότε

$$1,6-\alpha = 0,4 \Leftrightarrow \alpha = 1,6-0,4 = 1,2.$$

Σε διάστημα πλάτους $10\cdot 0,2 = 2$ περιέχεται το $10\cdot 10 = 100\%$ των τιμών κι΄ επειδή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ περιέχεται το 100% των τιμών τότε

$$\beta-\alpha = 2 \Leftrightarrow \beta = \alpha+2 = 1,2+2 = 3,2.$$

(β) Στην ομοιόμορφη κατανομή η διάμεσος και η μέση τιμή ταυτίζονται και ισούνται με το ημιάθροισμα των άκρων του διαστήματος, οπότε

$$\overline{x} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1,2+3,2}{2} = \frac{4,4}{2} = 2,2.$$

(γ) Σε διάστημα πλάτους $3,2-1,2 = 2$ περιέχονται ν τιμές (το μέγεθος του δείγματος). Σε διάστημα πλάτους $2-1,2 = 0,8$ περιέχονται 1000 τιμές. Συνεπώς

$$\frac{2}{0,8} = \frac{\nu}{1000}$$

και άρα

$$\nu = \frac{2000}{0,8} = 2500$$

αυτοκίνητα.

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει η Μυρτώ Λιάπη) Δίνεται συνεχής συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *και μιγαδικός* z *με* $z \neq 1/2$ *έτσι ώστε να ισχύουν*

$$f^2(x) + \sin^2(x) = 2xf(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *και*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = m,$$

όπου $m = \frac{|z-2|}{|2z-1|}$.

(α) *Να δείξετε ότι* $|z-2| = |2z-1|$.

(β) *Να δείξετε ότι το* z *ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο*

(γ) *Να βρείτε το* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\sin x)}{x^2 - x}$.

(δ) *Να δείξετε ότι η συνάρτηση* $g(x) = f(x) - x$ *διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα* $(-\infty, 0)$ *και* $(0, +\infty)$.

(ε) *Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της* f.

(στ) *Να δείξετε ότι η εξίσωση* $(|z + 3 - 4i| + 5)x = x^3 + 10$ *έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο* $[1, 2]$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=111574#p111574

Λύση (Δημήτριος Κατσιπόδας)

(α) Για $x \neq 0$ έχουμε

$$\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \frac{2f(x)}{x},$$

οπότε

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2f(x)}{x},$$

άρα $m^2 + 1^2 = 2m$ το οποίο δίνει $m = 1$. Επειδή $m = 1$ έχουμε $\frac{|z-2|}{|2z-1|} = 1$ και άρα $|2z-1| = |z-2|$.

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&|2z-1| = |z-2| \\
\Rightarrow &|2z-1|^2 = |z-2|^2 \\
\Rightarrow &(2z-1)(2\overline{z}-1) = (z-2)(\overline{z}-2) \\
\Rightarrow &4z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 1 = z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4 \\
\Rightarrow &3z\overline{z} = 3 \\
\Rightarrow &|z| = 1.
\end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(\sin x)}{x^2 - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{f(\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x-1} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.
\end{aligned}$$

Διότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\sin x)}{\sin x} \overset{\substack{\sin x = u \\ x\to 0 \\ u\to 0}}{=} \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = 1.$$

(δ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
&f^2(x) + \sin^2 x = 2xf(x) \\
\Leftrightarrow &f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 - \sin^2 x \\
\Leftrightarrow &(f(x) - x)^2 = x^2 - \sin^2 x \\
\Leftrightarrow &g^2(x) = x^2 - \sin^2 x.
\end{aligned}$$

Ισχύει όμως ότι $|\sin x| \leqslant |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$ άρα για $x \neq 0$ έχουμε $x^2 - \sin^2 x \neq 0$, οπότε $g^2(x) \neq 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

(ε) Έχουμε 4 δυνατούς τύπους για την f.

(1) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - \sin^2 x}$.

(2) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \sin^2 x}$.

(3) $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - \sin^2 x} & \text{αν } x \geqslant 0, \\ x - \sqrt{x^2 - \sin^2 x} & \text{αν } x < 0. \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - \sin^2 x} & \text{αν } x \leqslant 0, \\ x - \sqrt{x^2 - \sin^2 x} & \text{αν } x > 0. \end{cases}$

(στ) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = (|z + 3 - 4i| + 5)x - x^3 - 10$$

για $x \in [1, 2]$. Η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$\begin{aligned} h(1) &= |z + 3 - 4i| + 5 - 11 \\ &= |z + 3 - 4i| - 6 \leqslant 0 \end{aligned}$$

διότι $|z + 3 - 4i| \leqslant |z| + |3 - 4i| = 6$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} h(2) &= 2\,|z + 3 - 4i| + 10 - 8 - 10 \\ &= 2(|z + 3 - 4i| - 4) \geqslant 0 \end{aligned}$$

διότι $|z + 3 - 4i| \geqslant ||z| - |3 - 4i|| = 4$. Οπότε $h(1)h(2) \leqslant 0$.

Αν $h(1)h(2) < 0$ τότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Δηλαδή η εξίσωση

$$(|z + 3 - 4i| + 5)x = x^3 + 10$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$. Αν $h(1)h(2) = 0$, τότε η $x = 1$ ή η $x = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Επομένως η εξίσωση

$$(|z + 3 - 4i| + 5)x = x^3 + 10$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 2]$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

$$z = (k - \eta\mu t) + (k - \sigma\upsilon\nu t)i$$

με $t \in \mathbb{R}$ και $k > 1$.

- *(Ε1) Να βρείτε πού κινείται η εικόνα του μιγαδικού z.*
- *(Ε2) Αν η εικόνα του μιγαδικού w κινείται στην ευθεία $y = -x - (k - 1)$, να βρείτε το k ώστε το $|z - w|_{min} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1$.*
- *(Ε3) Για το k του (Ε2) ερωτήματος βρείτε πού κινείται η εικόνα του $\overline{z}$ και το ελάχιστο και μέγιστο του $|z - \overline{z}|$.*
- *(Ε4) Για το k του (Ε2) ερωτήματος βρείτε το ελάχιστο του $|w - 3 + 4i|$.*
- *(Ε5) Αν ο μιγαδικός u με*

  $$u = (-1 + m\eta\mu t) + (-1 + m\sigma\upsilon\nu t)i,$$

  να βρείτε για ποια τιμή του m ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του u περνά από την αρχή των αξόνων.
- *(Ε6) Για τα k, m του (Ε2) και (Ε5) ερωτήματος, να βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο του $|z - u|$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=110457#p110457

Λύση (Μυρτώ Λιάπη)

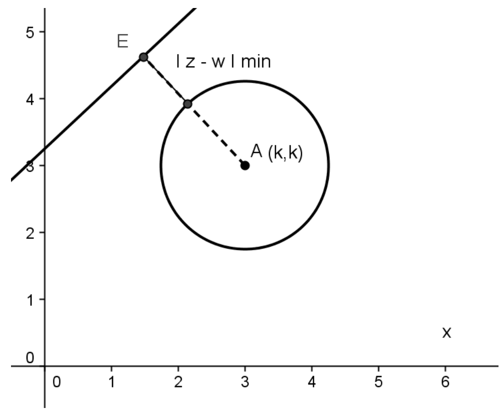
(Ε1) Θέτουμε $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ και τότε είναι

$$x = k - \eta\mu t, y = k - \sigma\upsilon\nu t.$$

Αφού,

$$\eta\mu^2(t) + \sigma\upsilon\nu^2(t) = 1 \Rightarrow (x - k)^2 + (y - k)^2 = 1.$$

Έτσι η εικόνα του z κινείται σε κύκλο με κέντρο το $A(k, k)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$ με $k > 1$.



(Ε2) Είναι $d(A, \varepsilon) = \frac{|3k-1|}{\sqrt{2}} > 1$ γιατί $k > 1$, έτσι η ευθεία δεν τέμνει τον κύκλο. Τότε

$$|z - w|_{\min} = d(A, \varepsilon) - 1 = \frac{|3k - 1|}{\sqrt{2}} - 1$$

και πρέπει

$$\begin{aligned} |z - w|_{\min} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1 &\Rightarrow \frac{|3k - 1|}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &\Rightarrow |3k - 1| = 5 \\ &\Rightarrow k = 2, \end{aligned}$$

γιατί $k > 1$.

(Ε3) Για $k = 2$ είναι

$$\overline{z} = (2 - \eta\mu t) + (\sigma\upsilon\nu t - 2)i.$$

Θέτουμε $\overline{z} = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και τότε $\alpha = 2 - \eta\mu(t)$ και $\beta = \sigma\upsilon\nu(t) - 2$ και αφού

$$\eta\mu^2(t) + \sigma\upsilon\nu^2(t) = 1 \Rightarrow (\alpha - 2)^2 + (\beta + 2)^2 = 1.$$

Έτσι η εικόνα του $\overline{z}$ κινείται σε κύκλο με κέντρο το $B(2,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=\rho_1=1$.

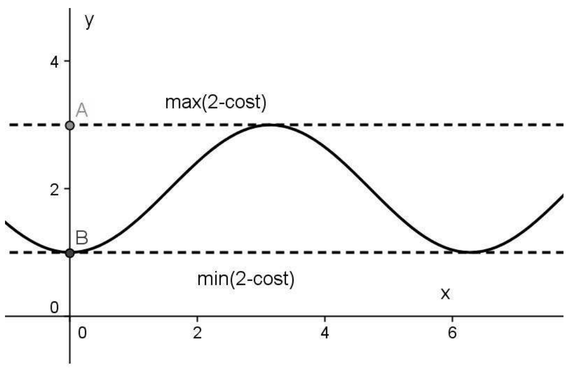
Δεύτερος τρόπος: Από το (Ε1) και για $k=2$ έχουμε ότι

$$|z-(2+2i)|=1\Rightarrow|\overline{z}-(2-2i)|=1$$

που σημαίνει ότι η εικόνα του $\overline{z}$ κινείται σε κύκλο με κέντρο το $B(2,-2)$ και ακτίνα $\rho_2=\rho_1=1$. Είναι

$$\begin{aligned}&|z-\overline{z}|=\\&=|(2-\eta\mu t)+(2+\sigma\upsilon\nu t)i-(2-\eta\mu t)+(2-\sigma\upsilon\nu t)i|\\&=|2(2-\sigma\upsilon\nu t)i|\end{aligned}$$

Έχουμε $|z-\overline{z}|_{\min}=|2\cdot 1|=2$ και $|z-\overline{z}|_{\max}=|2\cdot 3|=6$.



(Ε4) Είναι $|w-3+4i|=|w-(3-4i)|$ και παριστάνει την απόσταση της εικόνας του w από το $K(3,-4)$. Είναι $|w-3+4i|_{\min}=d(K,\epsilon)=\frac{|3-4+1|}{\sqrt{2}}=0$ (ή αλλιώς είναι μηδέν γιατί το σημείο K ανήκει στην ευθεία).

(Ε5) Θέτουμε $u=\gamma+\delta i,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Τότε

$$\eta\mu(t)=\frac{1+\gamma}{m},\sigma\upsilon\nu(t)=\frac{1+\delta}{m}$$

(είναι $m\neq 0$ γιατί αν $m=0$, τότε η εικόνα του u θα είναι το $(-1,-1)$). Έτσι

$$\frac{(\gamma+1)^2}{m^2}+\frac{(\delta+1)^2}{m^2}=1\Rightarrow(\gamma+1)^2+(\delta+1)^2=m^2$$

και η εικόνα του u κινείται σε κύκλο με κέντρο το $\Delta(-1,-1)$ και ακτίνα $\rho_3=|m|$. Για να περνάει ο κύκλος από το $O(0,0)$ πρέπει $(0+1)^2+(0+1)^2=m^2\Rightarrow m^2=2\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}$.
Δεύτερος τρόπος: Για να διέρχεται ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του w από την αρχή των αξόνων πρέπει να υπάρχει τιμή του $m\in\mathbb{R}$ ώστε

$$u=0+0i\Leftrightarrow\begin{cases}-1+m\eta\mu t=0\\-1+m\sigma\upsilon\nu t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta\mu t=\frac{1}{m}\\\sigma\upsilon\nu t=\frac{1}{m}\end{cases}$$

και επειδή $\eta\mu^2t+\sigma\upsilon\nu^2t=1\Rightarrow\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{m}\right)^2=1\Leftrightarrow\frac{2}{m^2}=1\Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

(Ε6) Έστω

$$\begin{aligned}c=&z-u\\=&(k-\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t)i\\&-(-1+m\eta\mu t)-(-1+m\sigma\upsilon\nu t)i\\=&(k-\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t)i+(1-m\eta\mu t)+(1-m\sigma\upsilon\nu t)i\\=&(k-\eta\mu t+1-m\eta\mu t)+(k-\sigma\upsilon\nu t+1-m\sigma\upsilon\nu t)i\\=&\left[k+1-(1+m)\eta\mu t\right]+\left[(k+1-(1+m)\sigma\upsilon\nu t)\right]i\end{aligned}$$

Θεωρούμε $c=x+yi,x,y\in\mathbb{R}$ άρα

$$x=k+1-(1+m)\eta\mu t\Leftrightarrow x-(k+1)=-(1+m)\eta\mu t,$$

και

$$y=k+1-(1+m)\sigma\upsilon\nu t\Leftrightarrow y-(k+1)=-(1+m)\sigma\upsilon\nu t.$$

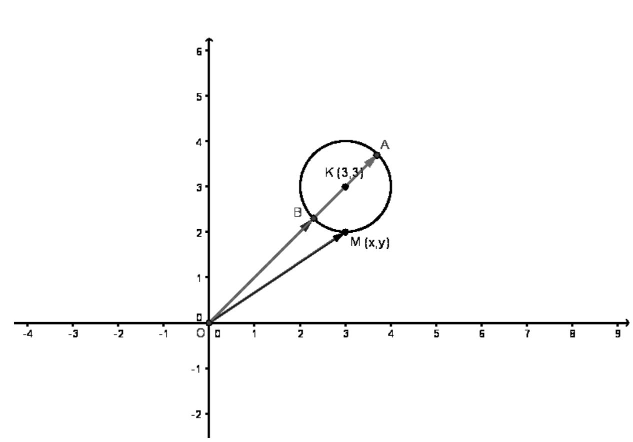
Άρα

$$\begin{aligned}&(x-(k+1))^2+(y-(k+1))^2\\=&(1+m)^2\eta\mu^2t+(1+m)^2\sigma\upsilon\nu^2t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x-(k+1))^2+(y-(k+1))^2=(1+m)^2\\\underset{m=\pm\sqrt{2}}{\overset{k=2}{\Leftrightarrow}}&(x-3)^2+(y-3)^2=(1\pm\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

Έστω $M(x,y)$ σημείο του κύκλου

$$(x-3)^2+(y-3)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2.$$



Φέρνουμε την ευθεία OK, που τέμνει τον κύκλο στα A, B. Έχουμε $(OK) = d(K, O) = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $OB \leq (OM) \leq (OA)$. Οπότε

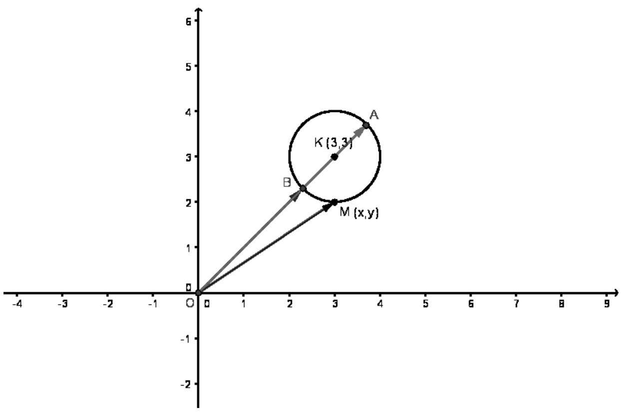
$$\begin{aligned}|C|_{\max} &= (OA) = (OK) + \rho = \cdots = \\ &= 3\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 1\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|C|_{\min} &= (OB) = (OK) + \rho = \cdots = \\ &= 3\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

Έστω $M(x, y)$ σημείο του κύκλου

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2.$$



Φέρνουμε την ευθεία OK, που τέμνει τον κύκλο στα A, B. Έχουμε $(OK) = d(K, O) = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Από τη γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $OB \leq (OM) \leq (OA)$. Οπότε

$$\begin{aligned}|C|_{\max} &= (OA) = (OK) + \rho = \cdots = \\ &= 3\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 4\sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|C|_{\min} &= (OB) = (OK) + \rho = \cdots = \\ &= 3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} + 1.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης) Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x) = e^{-x} - \ln x + 2$$

α *Να δείξετε ότι είναι* $1-1$,

β *Να λυθεί η εξίσωση* $e^{-x^2-1} - \ln(x^2+1) = \frac{1}{e}$,

γ *Να λυθεί η ανίσωση* $e^{-\frac{1}{x}} + 2\ln x > e^{-x}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=17341

Λύση (Ηλίας Καμπελής).

α) Η συνάρτηση ορίζεται όταν και μόνο όταν $x > 0$.

Αν $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}(1)$

($y = e^x$ γν. αύξουσα)

$0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow$

$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 + 2 > -\ln x_2 + 2(2)$

($y = \ln x$ γν. αύξουσα)

Από $(1),(2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε και $1-1$

β) $e^{-x^2-1} - \ln\left(x^2+1\right) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow$

$e^{-(x^2+1)} - \ln\left(x^2+1\right) + 2 = \frac{1}{e} + 2 \Leftrightarrow$

$f\left(x^2+1\right) = f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}$

$x^2+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ που απορρίπτεται γιατί $x > 0$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) $e^{-\frac{1}{x}} + 2\ln x > e^{-x} \Leftrightarrow$

$e^{-\frac{1}{x}} + \ln x + 2 > e^{-x} - \ln x + 2 \Leftrightarrow$

$f\left(\frac{1}{x}\right) > f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{x} < x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Κώστας Καπένης) Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε η συνάρτηση*

$h(x) = e^{-f(x)} - f^3(x) + 2$ *να είναι γνησίως αύξουσα.*

Να βρείτε την μονοτονία της $f(x)$ και να λύσετε την ανίσωση:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x^2-x)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{f(4-x)} > 0$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=12656

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς) Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο R, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 > x_2$

έχουμε ότι:
$h(x_1) > h(x_2) \Leftrightarrow$

$e^{-f(x_1)} - f^3(x_1) + 2 > e^{-f(x_2)} - f^3(x_2) + 2 \Leftrightarrow$

$$(f(x_1) - f(x_2))(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)) < \frac{e^{f(x_2)} - e^{f(x_1)}}{e^{f(x_1)}e^{f(x_2)}}(I)$$

* Αν $f(x_1) = f(x_2)$ από την (I) προκύπτει ότι $0 < 0$, απορρίπτεται.

* Αν $f(x_1) > f(x_2)$ από την (I) προκύπτει ότι το πρώτο μέλος της (I) είναι θετικό και το δεύτερο μέλος αρνητικό, απορρίπτεται.

Συνεπώς: $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού η συνάρτηση $g(x) = \alpha^x, 0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x^2-x)} > \left(\frac{1}{2}\right)^{f(4-x)} \Leftrightarrow f(x^2-x) < f(4-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x > 4 - x \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2.$$

Για την λύση της ανίσωσης χρησιμοποιήθηκε η πρόταση:

Αν η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο R ισχύει η ισοδυναμία: $x < y \Leftrightarrow h(x) > h(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

* Το ευθύ είναι ο ορισμός του σχολικού.

* Για το αντίστροφο.

- Αν $x = y$, θα ισχύει $h(x) = h(y)$, απορρίπτεται.

- Αν $x > y$ και αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει $h(x) < h(y)$, απορρίπτεται.

Συνεπώς ισχύει ότι $x < y$.

Λύση 2 (αφορά το α μέρος) (Νίκος Αντωνόπουλος) Για τη μονοτονία της f αν κοιτάξουμε προσεκτικά τη συναρτησιακή σχέση που δίνεται θα εικάσουμε ότι μάλλον πρόκειται για συνάρτηση γν. φθίνουσα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι γν. φθίνουσα. αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι $e^{-f(x_1)} \geqslant e^{-f(x_2)}$ και $-f^3(x_1) \geqslant -f^3(x_2)$ οπότε $h(x_1) - 2 \geqslant h(x_2) - 2$ το οποίο είναι άτοπο καθότι η h είναι γν. αύξουσα.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$f(x_1) \geqslant f(x_2)$, οπότε η f είναι γν. φθίνουσα.

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Θωμάς Ποδηματάς)* *Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) με $f(a) \neq f(b)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε να ισχύει ότι:* $f'(\xi_1) f'(\xi_2) = \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=23144

Λύση 1 (Αχιλλέας Συννεφακόπουλος)
Αν υπάρχει $a < x < b$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} := \lambda,$$

τότε εύκολα βρίσκουμε ότι και

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \lambda$$

και το συμπέρασμα έπεται από το ΘΜΤ στα διαστήματα $[a,x]$ και $[x,b]$.

Αλλιώς, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\lambda > 0$ και ότι

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > \frac{f(b)-f(x)}{b-x},$$

για κάθε $a < x < b$.

Το πεδίο τιμών της συνεχούς συνάντησης

$$g(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a)} \quad \text{στο} \quad (a,b]$$

περίεχει ένα διάστημα της μορφής $[\lambda, c)$ (η συνάρτηση έχει ελάχιστο ίσο με λ) Ομοίως, το πεδίο τιμών της συνεχούς συνάντησης $h(x) := \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$ στο $[a,b)$ περίεχει ένα διάστημα της μορφής $(d,\lambda]$ (η συνάρτηση έχει μέγιστο ίσο με λ).

Υπάρχει λοιπόν $k > 1$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = k\lambda$ και $h(\xi') = \lambda/k$ για κάποια ξ, ξ' στο (a,b).

Από το ΘΜΤ στο διάστημα $[a,\xi]$ υπάρχει ξ_1 στο ανοικτό (a,ξ) τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = g(\xi)$.

Ομοίως από το ΘΜΤ στο διάστημα $[\xi', b]$ υπάρχει ξ_2 στο ανοικτό (ξ', b) τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = h(\xi')$.

Πολλαπλασίαζοντας κατά μέλη της δυο τελευταίες και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω παίρνουμε το ζητούμενο αφού το k απαλοίφεται.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) με $f(a) \neq f(b)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν διακεκριμμένα $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in (a,b)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) f'(\xi_2) \cdots f'(\xi_n) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^n.$$

Λύση 2 (Ροδόλφος Μπόρης) Πιστεύω πως η άσκηση μπορεί να γίνει πιο σχολική αν θεωρήσουμε ότι f' συνεχής διότι έστω $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) > 0$.

Τότε υπάρχει συμμετρική περιοχή U του άξονα $y : f'(x) > 0, \forall f'(x) \in U$.

Τότε δοθέντος του $lnf'(\xi)$ μπορώ να βρω

$$\xi_1, \xi_2 \in U : \ln f'(\xi) = \frac{\ln f'(\xi_1) + \ln f'(\xi_2)}{2}, \ f'(\xi_1) > 0, \ f'(\xi_2) > 0$$

πχ τα άκρα μιας μη συμμετρικής περιοχής $(\xi_1, \xi_2) = V$.

Απολογαριθμίζοντας προκύπτει το ζητούμενο, αφού $\xi_1 < \xi < \xi_2$.

Λύση 3 (Θωμάς Ποδηματάς)
$\exists \xi_1 \in (a,k), \xi_2 \in (k,b)$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(k)-f(a)}{k-a} \qquad (1)$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b)-f(k)}{b-k} \qquad (2)$$

Ζητώ $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2$,

οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2), απαιτώ να ισχύει ότι:

$$\frac{f(k)-f(a)}{k-a} \cdot \frac{f(b)-f(k)}{b-k} = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2 \qquad (3)$$

Ονομάζω - για τεχνικούς λόγους $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, οπότε εξ' αιτίας της σχέσης (3) αρκεί να βρω έναν k, τέτοιον ώστε να έχω:

$$\frac{f(k)-f(a)}{k-a}\cdot\frac{f(b)-f(k)}{b-k}=\lambda^2 \qquad \text{ή}$$

$$(f(k)-f(a))\cdot(f(b)-f(k))=\lambda\cdot\lambda\cdot(k-a)\cdot(b-k) \qquad (*)$$

Η σκέψη τώρα είναι να βρω ένα k μέσα στο διάστημα (a,b), τέτοιον ώστε να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$f(k)-f(a)=\lambda\cdot(b-k) \qquad (4)$$

και

$$f(b)-f(k)=\lambda\cdot(k-a) \qquad (5).$$

Υπέθεσα ότι βρήκα έναν k που ικανοποιεί την (4). Αυτός όμως ικανοποιούσε την (5)· Ήταν το ερώτημα... Με λίγες πράξεις και ισχυρή την (4):

$$\begin{aligned} f(b)-f(k) &= f(b)-[f(a)+\lambda\cdot(b-k)]\\ &= f(b)-f(a)-\lambda\cdot(b-k)\\ &= \lambda\cdot[b-a-b+k]=\\ &= \lambda\cdot(k-a) \qquad (2)\end{aligned}$$

δηλαδή η σχέση (5)

Τώρα πιά το μόνο που έμενε ήταν να δείξω την ύπαρξη του αριθμού k. Βλέποντας την σχέση (4),

Θεωρώ τη (συνεχή προφανώς) συνάρτηση

$$\mathbf{h(x)=f(x)-f(a)-\lambda\cdot(b-x), x\in[a,b]}$$

και εφαρμόζω σ΄ αυτήν το θεώρημα του B*olzano*

$$\begin{aligned} h(a) &= -\lambda\cdot(b-a)=f(a)-f(b)\\ h(b) &= f(b)-f(a)-\lambda\cdot 0\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες έχουμε:

$$h(a)\cdot h(b)=-(f(a)-f(b))^2<0,$$

αφού δίνεται ότι $f(a)\neq f(b)$. Έτσι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.B*olzano* για τη συνάρτηση h στο $[a,b]$ και κατά συνέπεια

$$\exists k\in(a,b): h(k)=0,$$

δηλαδή η (4) πλέον είναι ισχυρή όπως άλλωστε και η (5).

Τώρα, εφαρμόζοντας δύο φορές το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε κάθε ένα των διαστημάτων $[a,k],[k,b]$, και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τα αποτελέσματα, έχουμε άμεσα το ζητούμενο.

Παρατήρηση (*atemlos*)

Η άσκηση υπάρχει και σε ένα από τα βιβλία του Θ.Καζαντζή.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Σωτήρης Λουρίδας) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,e]\to\mathbb{R}$ με $f(1)=0$, $f(e)=1$ και $f'(x)+e^{f(x)}=x+\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in[1,e]$. Να αποδειχθεί ότι: $f(x)=\ln x$ για κάθε $x\in[1,e]$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=24617

Λύση 1 (Σπύρος Καπελίδης) Θεωρώ τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)-lnx, x\in[1,e],$$

η οποία είναι συνεχής (και παραγωγίσιμη) και μηδενίζεται στα άκρα του παραπάνω διαστήματος. Αν για κάποιο $x_0\in(1,e)$ έχουμε $h(x_0)\neq 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, προφανώς χωρίς βλάβη, $f(x_0)>0$, τότε η συνάρτηση θα παρουσιάζει θετικό μέγιστο (αφού έχει μία τουλάχιστον θετική τιμή)σε ένα σημείο x_1 που θα ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[1,e]$ (αφού στα άκρα μηδενίζεται), άρα από το θεώρημα Fermat θα έχουμε

$$h'(x_1)=0\Rightarrow f'(x_1)=\frac{1}{x_1},$$

οπότε η δοθείσα για $x=x_1$ δίνει

$$e^{f(x_1)}=x_1\Rightarrow f(x_1)=lnx_1\Rightarrow h(x_1)=0,$$

άτοπο και τελειώσαμε.

Λύση 2 (Χρήστος Κυριαζής) Για μεγαλύτερη ευκολία στη λύση, θέτουμε

$$g(x)=f(x)-lnx \quad \text{στο} \quad [1,e].$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι: $g(1)=g(e)=0$ Τότε η δοθείσα γίνεται:

$$g'(x)=x(e^{g(x)}-1), x\in[1,e] \qquad (1)$$

Η g ως συνεχής σε κλειστό διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Προφανώς το μέγιστο της είναι μη αρνητικό. Αν ήταν θετικό τότε δεν το λαμβάνει σε άκρο, επομένως αν είναι x_1 η θέση μεγίστου, θα ισχύει $g(x_1) > 0$ και από το Θ.Fermat

$$g'(x_1) = 0.$$

Αυτό όμως, λόγω της (1) είναι άτοπο. Επομένως η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το μηδέν. Μήπως είναι και η ελάχιστη; Για να δούμε... Αν λαμβάνει την ελάχιστη τιμή σε κάποιο εσωτερικό σημείο ας είναι x_2,τότε πάλι λόγω της (1) και του θεωρήματος Fermat καταλήγουμε πως $g(x_2) = 0$. Αν τη λαμβάνει σε άκρο πάλι θα είναι ίση με μηδέν. Επομένως σε κάθε περίπτωση η ελάχιστη τιμή της g είναι μηδέν. Δηλαδή η g είναι η μηδενική συνάρτηση στο $[1, e]$... άρα

$$g(x) = 0,\ \forall x \in [1, e] \Rightarrow f(x) = lnx \forall x \in [1, e].$$

Λύση 3 (Γιάννης Σταματογιάννης) Μερικές σκέψεις στο θέμα που προτείνεται. Κάνουμε τις παρακάτω αντικαταστάσεις:

$$g(x) = f(x) - lnx \Rightarrow g'(x) = x - xe^{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$xe^{-g(x)} + (e^{-g(x)})' = x$$

και

$$h(x) = e^{-g(x)}, xh(x) + h'(x) = x,$$

άρα καταλήγουμε σε μορφή πολλαπλασιάζουμε με $e^{\frac{x^2}{2}}$ συνεπώς

$$(e^{\frac{x^2}{2}} h(x))' = xe^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\frac{x^2}{2}} h(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + c \Rightarrow e^{lnx} - f(x) = 1 + ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$x = 1, c = 0.$$

Συνεπώς είναι $e^{lnx - f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = lnx$.

Οι δυο διαδοχικές αντικαταστάσεις έγιναν για να φτάσουμε στα γνωστά θέματα των μαθητών.

Λύση 4 (Κώστας Σερίφης) Έστω ότι $\forall x \in (0, +\infty)$ ισχύει: $f'(x) + e^{f(x)} = x + \dfrac{1}{x}(1)$.

Τότε η παράγουσα της $x + \dfrac{1}{x}$ είναι $g(x) = \dfrac{x^2}{2} + lnx,\quad x > 0$.

Η (1) γίνεται:

$e^{f(x)} = (g(x) - f(x))'$ ή $e^{-f(x)} \cdot (g(x) - f(x))' = 1$.

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{g(x)} = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$ έχουμε: $e^{g(x) - f(x)} \cdot (g(x) - f(x))' = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$, δηλαδή $\left(e^{g(x)-f(x)}\right)' = \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'$, οπότε $e^{g(x)-f(x)} = e^{\frac{x^2}{2}} + c$.

Για $x = 1$ είναι $c = 0$ και έτσι έχουμε εύκολα το ζητούμενο $f(x) = lnx,\quad x > 0$.

Λύση 5 (Σωτήρης Λουρίδας) $h : (0, +\infty), h(x) = \dfrac{e^{f(x)}}{x}$.

Τότε $h(1) = h(e) = 1$ και

$f'(x) = \dfrac{h(x) + xh'(x)}{xh(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{h'(x)}{h(x)}$, οπότε

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{h'(x)}{h(x)} + xh(x) = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = xh(x)(1 - h(x))$.

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα, αν υπάρχει τοπικό ακρότατο σε θέση $x = x_0$, τότε $h(x_0) = 1$ καθότι $h'(x_0) = 0$ $(\Theta.Fermat)$.

Εδώ ακριβώς μπαίνει το ερώτημα της ύπαρξης ακρότατων που το εξασφαλίζει η υπόθεση της συνέχειας της h και ότι

$h(1) = h(e) = 1,\ \delta\eta\lambda.\ h(x_0) = h(1) = h(e) = 1.$

Από εδώ εύκολα καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$h(x) = 1,\ \forall x \in [1, e] \Rightarrow e^{f(x)} = x \Rightarrow$

$f(x) = \ln x, \forall x \in [1, e]$.

Λύση 6 (Ροδόλφος Μπόρης) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x : lnx \neq f(x)$, έστω $lnx > f(x)$. Τότε $f'(x) - \dfrac{1}{x} = x - e^{f(x)} = e^{lnx} - e^{f(x)} = (lnx - f(x))e^{\xi}$ για κάποιο ξ ανάμεσα στα $lnx, f(x)$ από ΘΜΤ για την e^x.

Όμως οι συναρτήσεις $lnx, f(x)$ εί αι συνεχείς στο $[1, e]$ άρα έχουν μεγιστο το $\{1, M\}$ αντιστοίχως οπότε θα είναι $e^{\xi} \leq max\{e, e^M\} = k$ (αντιστοιχα και για ελάχιστο).

Συνεπώς $(f(x) - lnx)' = (lnx - f(x))e^{\xi} \leq (lnx - f(x))k \Rightarrow$

$\Rightarrow ((f(x) - lnx)e^{kx)})' < 0$

άρα για $1 \leq x \leq e$, θα έχουμε

$0 = ((f(e) - lne)e^{ke)}) \leq ((f(x) - lnx)e^{kx)}) \leq$

$\leq ((f(1) - lnx)e^{k)}) = 0$, οπότε $f(x) = lnx$ άτοπο.

Όμοια και όταν $lnx < f(x)$, άρα $lnx = f(x), \forall x \in [1, e]$.

Λύση 7 (Ροδόλφος Μπόρης) Προφανώς f' παραγωγίσιμη με $f'' + f'e^f = 1 - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'' = -f'\left(x + \dfrac{1}{x}x - f'\right) + 1 - \dfrac{1}{x^2} =$

$= (f')^2 - (x+1/x)f' + 1 - 1/x^2$ (ανέβασα την τάξη της ΔΕ αλλά πέταξα έτσι τον ¨πολύ κακό¨ μη γραμμικό όρο e^f) άρα $y' = y^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right)y + 1 - \frac{1}{x^2}, y = f'$ (ευτυχώς κατεβαίνει η τάξη της ΔΕ και καταλήγουμε σε γνωστή μορφή Ricatti).

Θέτω $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$, οπότε... $u' + u\left(\frac{1}{x} - x\right) = -1$,

δηλαδή $(xe^{-\frac{x^2}{2}}y)' = (e^{-x^2/2})' \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{1}{x} + \frac{a}{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.
Από τις αρχικές τιμές βρίσκουμε $f'(1) = 1 \Rightarrow y(1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(x) = lnx + b$ και αφού
$f(1) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = lnx, x \in [1, e]$ (με αυτόν τον τρόπο δεν βλέπω που χρειάζεται το $f(e) = 1$)?

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτείνει ο Σωτήρης Λουρίδας) Να αποδειχθεί ότι:* $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^{10}+2^{10}}{x^{15}+2^{15}}dx < \frac{181}{2816}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=8997

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης)

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^{10}+2^{10}}{x^{15}+2^{15}}\,dx &= \frac{1}{32}\int_0^2 \frac{1+(x/2)^{10}}{1+(x/2)^{15}}\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{1+y^{10}}{1+y^{15}}\,dy\\ &= \frac{1}{16}\left(1+\int_0^1 \frac{y^{10}-y^{15}}{1+y^{15}}\,dy\right)\\ &< \frac{1}{16}\left(1+\int_0^1 (y^{10}-y^{15})\,dy\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)\\ &= \frac{181}{2816}.\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύει :*

$$(f(x))^2+(f'(x))^2 \le x^2+1, \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι :

1. $(f(1))^2-(f(0))^2 \le \dfrac{4}{3}$,
2. $|f(1)| \le \dfrac{4}{3}$,
3. $|F(1)-F(0)| \le \dfrac{10}{9}$, *όπου F είναι μια αρχική της f.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=23705

Λύση (Βασίλης Μαυροφρύδης - Atemlos - Παύλος Μαραγκουδάκης)

1.

$$x^2+1 \ge f^2(x)+(f'(x))^2 \ge 2f(x)f'(x) \Rightarrow$$
$$\int_0^1 \left(x^2+1\right)dx \ge f^2(1)-f^2(0) \Rightarrow$$
$$\frac{4}{3} \ge f^2(1)-f^2(0)$$

2.

$$\begin{aligned}(1+x^2)^2 &\geqslant \left(1+x^2\right)\left((f(x))^2+(f'(x))^2\right)\\ &\geqslant (f(x)+xf'(x))^2 \Rightarrow\end{aligned}$$
$$\left(1+x^2\right)^2 \geqslant (f(x)+xf'(x))^2 \Rightarrow$$
$$\left|f(x)+xf'(x)\right| \leqslant 1+x^2 \Rightarrow$$
$$-\left(1+x^2\right) \leqslant (xf(x))' \leqslant 1+x^2 \Rightarrow$$
$$\int_0^1 -\left(1+x^2\right)dx \leqslant \int_0^1 (xf(x))'dx \leqslant \int_0^1 \left(1+x^2\right)dx \Rightarrow$$
$$|f(1)| \leqslant \frac{4}{3}$$

3. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία του προηγούμενου υποερωτήματος και για $t>0$ είναι

$\int_0^t -\left(1+x^2\right)dx \leqslant \int_0^t (xf(x))'dx \leqslant \int_0^t \left(1+x^2\right)dx$ οπότε

$$-t-\frac{t^3}{3} \le tf(t) \le t+\frac{t^3}{3} \quad \text{ή} \quad -1-\frac{t^2}{3} \le f(t) \le 1+\frac{t^2}{3}.$$

Λόγω συνέχειας της f η τελευταία ισχύει και για $t=0$ οπότε

$\int_0^1 -\left(1+\frac{t^2}{3}\right)dt \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \int_0^1 \left(1+\frac{t^2}{3}\right)dx.$

Από εδώ προκύπτει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο Διονύσης Βουτσάς)* *Θεωρούμε τις συναρτήσεις* $f(x), g(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ *δυο φορές παραγωγίσιμες με* $g''(x) > 0, \forall x \in [a, b]$.

Αν ισχύει $(x-a)f'(x) = (x-b)g'(x), \forall x \in [a, b]$ *τότε*

1) *Να αποδείξετε ότι*

   $g'(x) > 0$ *και* $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$

2) *Αν επιπλέον ισχύει* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

   να δείξετε ότι

   α) $f(b) = g(a)$

   β) *Υπάρχει ακριβώς ένα* $\xi \in (a, b) : f(\xi) = g(\xi)$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=24860

Λύση (Βασίλειος Κακαβάς)

1) Επειδή ισχύει ότι $g''(x) > 0, \ \ x \in [a, \ b]$ η g' είναι γνήσια αύξουσα στο $[a, \ b]$ και αφού για όπου x το a

στην $(x-a)f'(x) = (x-b)g'(x)$ προκύπτει ότι $0 = (a-b)g'(a) \Leftrightarrow g'(a) = 0$ θα ισχύει γιά $x > a$ ότι $g'(x) > g'(a) = 0$

Τώρα από την $(x-a)f'(x) = (x-b)g'(x)$ για $a < x < b$ επειδή $g'(x) > 0$ και $x - a > 0, \ \ x - b < 0$ θα ισχύει ότι $f'(x) < 0$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Σύμφωνα με τα δεδομένα του θέματος είναι $g'(a) = 0, \ \ f'(b) = 0$ άρα στο $[a, \ b]$ ισχύει ότι $g'(a) \geq 0, \ \ f'(b) \leq 0$

2) α) Ολοκληρώνοντας την σχέση

$(x-a)f'(x) = (x-b)g'(x)$ προκύπτει ότι

$$\int_a^b (x-a)f'(x)dx = \int_a^b (x-b)g'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x-a)f(x)]_a^b - \int_a^b f(x)dx =$$

$$[(x-b)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)dx \Leftrightarrow$$

αφού $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ θα ισχύει ότι

$$[(x-a)f(x)]_a^b = [(x-b)g(x)]_a^b \Leftrightarrow$$

$$(b-a)f(a) = (b-a)g(b) \Leftrightarrow f(a) = g(b)$$

2.β) Για την συνάρτηση

$h(x) = f(x) - g(x), \ \ x \in [a, \ b]$ ισχύει ότι είναι συνεχής στο $[a, \ b]$ με

$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(b) > 0$

γιατί f γνήσια φθίνουσα στο (από (1)) $[a, \ b]$ άρα $f(a) > f(b)$ και $h(b) = f(b) - g(b) = g(a) - g(b) < 0$ γιατί από (1) η g είναι γνήσια αύξουσα στο $[a, \ b]$ άρα $g(a) < g(b)$ έτσι ισχύει $h(a)h(b) < 0$ και σύμφωνα με το θεώρημα του *Bolzano* υπάρχει $x_0 \in (a, \ b)$ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

και επειδή $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0, \ \ x \in (a, \ b)$ η h είναι γνήσια φθίνουσα στο $[a, \ b]$ άρα x_0 μοναδικό.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο parmenides51) Δίνονται οι μιγαδικοί* $z_1 = a + e^a i, \ z_2 = b + bi, \ z_3 = c + i\ln c$ *με* $a, b \in \mathbb{R}, c > 0$.

1. *Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών* z_1, z_2, z_3,

2. *Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο* $|z_1 - z_2|$ *καθώς και τους μιγαδικούς* z_1, z_2 *για τους οποίους επιτυγχάνεται το ελάχιστο,*

3. *Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο* $|z_1 - z_3|$ *καθώς και τους μιγαδικούς* z_1, z_3 *για τους οποίους επιτυγχάνεται το ελάχιστο.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=24493

Λύση (Πρωτοπαπάς Λευτέρης) ι) Για τον μιγαδικό z_1 θέτουμε $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, οπότε $x = a, y = e^a, a \in \mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $y = e^x$. Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_1 είναι η καμπύλη με εξίσωση $y = e^x$.

Για τον μιγαδικό z_2 θέτουμε $z = x+yi, x, y \in \mathbb{R}$, οπότε $x = b, y = b, b \in \mathbb{R}$ και κατά συνέπεια $y = x$. Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_2 είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Για τον μιγαδικό z_3 θέτουμε $z = x+yi, x, y \in \mathbb{R}$, οπότε $x = c, y = lnc, c > 0$ και κατά συνέπεια $y = lnx$. Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_3 είναι η καμπύλη με εξίσωση $y = lnx, x > 0$.

ιι) Αν $z_1 = k + e^k i, k \in \mathbb{R}$ είναι ο μιγαδικός για τον οποίο το $|z_1 - z_2|$ γίνεται ελάχιστο, είναι σαν να αναζητούμε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $L(k, e^k)$ από την ευθεία ϵ με εξίσωση $y - x = 0$, η οποία είναι: $d(L, \epsilon) = \dfrac{|e^a - a|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$.

Θέτουμε $f(x) = e^x - x$ η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x (εκθετική) και x (πολυωνυμική) με $f'(x) = e^x - 1$. Συνεπώς:

* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
* $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, δηλαδή
* η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
* η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$
* η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 1$.

Επομένως η ποσότητα $d(L, \epsilon)$ γίνεται ελάχιστη όταν $a = 0$ (δηλαδή $L(0, e^0)$ ή $L(0, 1)$) και είναι ίση με $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Κάθε ευθεία που είναι κάθετη στην ϵ έχει συντελεστή διεύθυνσης -1. Η κάθετη στην ϵ που διέρχεται και από το L έχει εξίσωση: $y - 1 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 1$. Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $y = x, y = -x + 1$ και βρίσκουμε $(x, y) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, που είναι η εικόνα του μιγαδικού z_2 για την οποία επιτυγχάνεται το ελάχιστο μέτρο $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Κατά συνέπεια το ελάχιστο $|z_1 - z_2|$ επιτυγχάνεται όταν $z_1 = i$ και $z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

ιιι) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι οι συναρτήσεις $y = e^x$, $y = lnx$ έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, οπότε το ελάχιστο των $|z_1 - z_2|$,$|z_2 - z_3|$ είναι ίσο με $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και επιτυγχάνεται όταν η εικόνα του μιγαδικού z_3 είναι το συμμετρικό του $L(0, 1)$ ως προς την ευθεία $y = x$, δηλαδή το σημείο $N(1, 0)$, ενώ η αντίστοιχη εικόνα του μιγαδικού z_2 είναι το σημείο $M\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ (ταυτίζεται με αυτό του (ιι) ερωτήματος).

Συνεπώς το ελάχιστο $|z_1 - z_3|$ επιτυγχάνεται όταν: $z_1 = i$ και $z_3 = 1$ και είναι ίσο με $|z_1 - z_3| = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης* $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *για την οποία ισχύει*

$$f(x) + x\,f'(x) = \frac{1}{2}\,f(\tfrac{x}{2}) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in [0,+\infty)\,.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&t=21507

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης) Η συνάρτηση $g(x) = x\,f(x)$, $x \in [0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{g(x/2)}{x/2} = \dfrac{g(x/2)}{x}\,, & x > 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases} \quad (1)\,.$$

Από το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. για την g στο διάστημα $[0,\, x/2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $0 < \xi_1 < x/2$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2}\,g'(\xi_1) = \frac{g(x/2) - g(0)}{x} = \frac{g(x/2)}{x} \overset{(1)}{=} g'(x)\,.$$

Από το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. για την g στο διάστημα $[0,\, \xi_1/2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $0 < \xi_2 < \xi_1/2$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{2}\,g'(\xi_2) = \frac{g(\xi_1/2) - g(0)}{\xi_1} = \frac{g(\xi_1/2)}{\xi_1} \overset{(1)}{=} g'(\xi_1)\,.$$

Εφαρμόζοντας κατ΄ επανάληψη το Θ.Μ.Τ.Δ.Λ. με τον παραπάνω τρόπο προκύπτουν μιά ακολουθία σημείων ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, με $0 < \xi_{n+1} < \xi_n/2$ και αντίστοιχες σχέσεις. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτουν

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,g'(\xi_1) = \frac{1}{2^2}\,g'(\xi_2) = \ldots = \frac{1}{2^n}\,g'(\xi_n) \quad (2)\,.$$

Ισχύει $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x/2)}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{g'(x/2)}{x'} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\,g'(x/2) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} g'(x) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} g'(x) = 0 = g'(0)\,.$

Άρα η g' είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Επίσης για $n \to +\infty$ προκύπτει $\xi_n \to 0$, αφού

$0 < \xi_{n+1} < \xi_n/2 \;\Rightarrow\; 0 < \xi_n < \xi_1/2^{n-1}$.

Άρα $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g'(\xi_n) = 0 \quad (3)$.

Αλλά τότε, για κάθε $x \in [0,+\infty)$, ισχύει

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g'(x) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\,g'(\xi_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\,\lim_{n\to+\infty} g'(\xi_n)$

$\overset{(3)}{=} 0 \cdot 0 = 0 \quad\Rightarrow\quad g'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad g(x) = c \quad\Rightarrow$ $x\,f(x) = c$ και επειδή πρέπει $0\,f(0) = c$, προκύπτει $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

Λύση 2 (Βασίλης Μαυροφρύδης) Η f παρουσιάζει στα $x_1, x_2 \in [0,\alpha]$, $\alpha > 0$ ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M, αντίστοιχα, ως συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,\alpha]$. Δηλαδή ισχύει

$$m \le f(x) \le M\,, \text{ για κάθε } x \in [0,\alpha]\,.$$

Αλλά τότε ισχύει και

$$m \le f(\tfrac{x}{2}) \le M\,, \text{ για κάθε } x \in [0,\alpha]\,.$$

Επομένως

$$(x\,f(x))' = \frac{1}{2}\,f(\tfrac{x}{2}) \le \frac{M}{2} \quad\Rightarrow\quad \left(x\,f(x) - \frac{Mx}{2}\right)' \le 0\,.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t\,f(t) - \dfrac{Mt}{2}$, $t \in [0,\alpha]$. Για $x > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέση τιμής στο $[0,x]$ και έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f(x) - \frac{M}{2}\,.$$

Όμως $g'(\xi) \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad f(x) \le \dfrac{M}{2}$.

Για $x = x_1$, όπου x_1 η θέση του μεγίστου (αν $x_1 = 0$, εύκολα προκυπτει ότι $M = 0$) λαμβάνουμε

$$f(x_1) \le \frac{M}{2} \quad\Rightarrow\quad M \le \frac{M}{2} \quad\Rightarrow\quad M \le 0\,.$$

Όμοια, επειδή $(x\,f(x))' = \dfrac{1}{2}\,f(\tfrac{x}{2}) \ge \dfrac{m}{2} \quad\Rightarrow$

$\left(x\,f(x) - \dfrac{mx}{2}\right)' \ge 0$ και δουλεύοντας με την

$$h(t) = t\,f(t) - \frac{mt}{2}\,, \quad t \in [0,\alpha]$$

, θα λάβουμε $f(x) \ge \dfrac{m}{2}$.

Για $x = x_2$, όπου x_2 η θέση ελαχίστου (αν $x_2 = 0$, εύκολα προκύπτει ότι $m = 0$) λαμβάνουμε

$$f(x_2) \ge \frac{m}{2} \quad\Rightarrow\quad m \ge \frac{m}{2} \quad\Rightarrow\quad m \ge 0\,.$$

Είναι λοιπόν $0 \le m \le f(x) \le M \le 0 \quad\Rightarrow\quad f(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,\alpha]$. Επειδή το α είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, το συμπέρασμα ισχύει στο $[0,+\infty)$. Συνάρτηση δεκτή, διότι ικανοποιεί την υπόθεση.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(Προτείνει ο Γρηγόρης Κωστάκος) Από όλες τις εφαπτόμενες ευθείες στην γραφική παράσταση της συνάρτησης* $f(x) = \dfrac{\ln(x^{2\rho})}{x^{2\kappa+1}}$, $\rho \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in \mathbb{N}$, *να βρεθούν εκείνες που εφάπτονται σε δύο διαφορετικά σημεία στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&t=5181

Λύση (Γιώργος Ροδόπουλος) $f(x) = \dfrac{\ln(x^{2\rho})}{x^{2\kappa+1}}$,

$f'(x) = \dfrac{2\rho - (2\kappa+1)\ln(x^{2\rho})}{x^{2\kappa+2}}$ και

$f''(x) = \dfrac{-2\rho(4\kappa+3) + (2\kappa+1)(2\kappa+2)\ln(x^{2\rho})}{x^{2k+3}}$,

$x \in \mathbb{R}^*$, $\rho \in \mathbb{N}^*$, $\kappa \in \mathbb{N}$.

Η f είναι περιττή και η f' άρτια.

1. Αρχικά θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε δύο διαφορετικά σημεία με θετικές τετμημένες (κατά συνέπεια ούτε σε δύο διαφορετικά σημεία με αρνητικές τετμημένες) .

Έστω ότι η ευθεία ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, όπου $0 < x_1 < x_2$. Ισχύει $f'(x_1) = f'(x_2) = \lambda_\varepsilon$.

Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ για την f στο $[x_1, x_2]$ βρίσκουμε $\xi \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda_\varepsilon$.

Δηλαδή έχουμε $0 < x_1 < \xi < x_2$ με

$$f'(x_1) = f'(\xi) = f'(x_2).$$

Εφαρμόζοντας τώρα διαδοχικά το Θ. Rolle για την f' στα διαστήματα $[x_1, \xi], [\xi, x_2]$ βρίσκουμε ότι η f'' έχει δύο διαφορετικές θετικές ρίζες. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού όπως εύκολα διαπιστώνουμε η f'' έχει δύο ρίζες αντίθετες.

2. Έστω τώρα ευθεία ε που εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στα (διαφορετικά) σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ με εξίσωση

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad (1).$$

Αυτό συμβαίνει μόνο όταν:

α) $f'(x_1) = f'(x_2)$ και παίρνοντας υπ΄ όψη το παραπάνω σημείο *1.* και ότι η f' είναι άρτια προκύπτει $x_2 = -x_1$. Οπότε $B(-x_1, f(-x_1)) = (-x_1, -f(x_1))$. (Θεωρούμε -χωρίς βλάβη- ότι $x_1 > 0$) και

β) οι συντεταγμένες του B επαληθεύουν την (1) δηλαδή $-f(x_1) - f(x_1) = f'(x_1)(-x_1 - x_1) \quad \Rightarrow$

$f(x_1) = x_1 f'(x_1) \quad (2) \quad \Rightarrow$

$\dfrac{\ln(x_1^{2\rho})}{x_1^{2\kappa+1}} = x_1 \dfrac{2\rho - (2\kappa+1)\ln(x_1^{2\rho})}{x_1^{2\kappa+2}} \quad \Rightarrow$

$\ln(x_1^{2\rho}) = 2\rho - (2\kappa+1)\ln(x_1^{2\rho}) \quad \Rightarrow$

$(2\kappa+2)\ln(x_1^{2\rho}) = 2\rho \quad \Rightarrow \quad \ln(x_1^{2\rho}) = \dfrac{\rho}{\kappa+1} \quad \Rightarrow$

$x_1^{2\rho} = e^{\frac{\rho}{\kappa+1}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = e^{\frac{1}{2\kappa+2}}$.

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη ε είναι μοναδική και η εξίσωσή της προκύπτει από την (1) :

(1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ $y = f'(x_1)\,x$ και επειδή $f'(x_1) = \dfrac{\rho}{e(\kappa+1)}$ τελικά $\varepsilon: \ y = \dfrac{\rho}{e(\kappa+1)}\,x$.

Μια δεύτερη λύση δόθηκε από τον Γρηγόρη Κωστάκο.

Επιμελητής: Σπύρος Καπελλίδης

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Η συνάρτηση* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν*

$$f(0)=0 \quad \textit{και} \quad \int_0^1 e^{f'(x)} f'(x)\,dx = f(1).$$

Να δείξετε ότι $f(x)=0, \forall x\in[0,1]$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=24696

Λύση (Γιώργος Δασούλας)

$$\int_0^1 e^{f'(x)} f'(x)dx = f(1) = f(1)-f(0) = \int_0^1 f'(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (e^{f'(x)} f'(x) - f'(x))dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f'(x)(e^{f'(x)}-1)dx = 0$$

Όμως, εύκολα φαίνεται πως οι αριθμοί $f'(x), e^{f'(x)}-1$ είναι ομόσημοι.

Συνεπώς $\forall x\in(0,1)$, $f'(x)(e^{f'(x)}-1)\geq 0$

Αν για κάποιο $x_0\in[0,1]$ ίσχυε $f'(x_0)\neq 0$

(π.χ $f'(x_0)<0$), τότε

με βάση και το προηγούμενο θα ίσχυε $\int_0^1 f'(x)(e^{f'(x)}-1)dx > 0$, άτοπο.

Συνεπώς, $f'(x)=0, \forall x\in[0,1] \Rightarrow$

$f(x)=c, \forall x\in[0,1]$.

Και επειδή $f(0)=0$, τελικά $f(x)=0, x\in[0,1]$

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης* $f:(0,+\infty)\to R$ *που ικανοποιεί την* $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{y}-\frac{xf(y)}{y^2}$ *για κάθε* $x,y\in(0,+\infty)$ *και είναι παραγωγίσιμη στο 1, με* $f'(1)=1$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=22009

Λύση (Αντώνης Νασιούλας) Θέτουμε όπου y το x στη δοθείσα και έχουμε $f(1)=0$.

Επίσης έχουμε:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1} \tag{3}$$

Θεωρούμε αυθαίρετο $x_0>0$.

Όταν $x\to x_0$, το $h=\frac{x_0}{x}\to 1$.

Έτσι έχουμε:

$$L=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 1}\frac{f\left(\frac{x_0}{h}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0}{h}-x_0}.$$

Η τελευταία από τη δοθείσα (με $x=x_0$ και $y=h$) γίνεται:

$$L=\lim_{h\to 1}\frac{\frac{f(x_0)}{h}-\frac{x_0 f(h)}{h^2}-f(x_0)}{\frac{x_0(1-h)}{h}},$$

από το οποίο μετά από πράξεις, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων και την (1) έχουμε:

$$L=\frac{f(x_0)}{x_0}+1.$$

Επειδή το x_0 είναι αυθαίρετο, έχουμε ότι η f είναι παρ/μη στο Π.Ο. της και άρα έχουμε:

$$\left(f'(x)=\frac{f(x)}{x}+1, \forall x>0\right)\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f'(x)x-(x)'f(x)}{x^2}=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{1}{x}=(lnx)', \forall x>0\right)\Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}=lnx+c, \forall x>0\right).$$

Άρα

$\boxed{f(x) = xlnx + xc, \forall x > 0}$.

Θέτοντας όπου x το 1 έχουμε: $c = 0$.

Άρα τελικά $\boxed{f(x) = xlnx, \forall x > 0}$

που εύκολα βλέπουμε ότι ικανοποιεί τη δοθείσα.

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Να βρεθούν οι τιμές του φυσικού αριθμού n, ώστε να ισχύει*
$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x + n\sin^2 x\cos^2 x = 1,$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=24910

Λύση (Αχιλλέας Συννεφακόπουλος) Θέτοντας $x = \dfrac{\pi}{4}$ παίρνουμε
$\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{4} = 1$
ή ισοδύναμα $2^n(n-4) + 8 = 0$. (*)
Για $n \geq 4$ είναι $2^n(n-4) \geq 0$ κι άρα $2^n(n-4) + 8 > 0$
Τσεκάροντας τις τιμές $0 \leq n < 4$, εύκολα βλέπουμε ότι οι $n = 2$ και $n = 3$ ικανοποιούν την (*).
Για να ολοκληρώσουμε τη λύση παρατηρούμε ότι

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$
κι από την ταυτότητα *Euler* αφού
$\sin^2 x + \cos^2 x + (-1) = 0$
$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + (-1)^3 = 3\sin^2 x\cos^2 x(-1)$, δηλαδή
$\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς, οι δυνατές τιμές του n είναι 2 ή 3.

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Αν a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a + b + c = 3$, να δείξετε ότι*

$$\frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3} \geq \frac{3}{8}.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=24754

Λύση 1 (*BillK*) Έστω $f(x) = \dfrac{x^2}{(3-x)^3}, x \in (0,3)$ η οποία προκύπτει ότι έχει $f''(x) > 0$ άρα είναι κυρτή.
Τότε από την ανισότητα *Jensen* έχουμε
$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f(\frac{a+b+c}{3}) \Rightarrow$
$f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{3}{8} \Rightarrow$
$\dfrac{a^2}{(b+c)^3} + \dfrac{b^2}{(c+a)^3} + \dfrac{c^2}{(a+b)^3} \geq \dfrac{3}{8}$

Λύση 2 (Θανάσης Κοντογεώργης) Αλλιώς με *CS* και *Nesbitt* :
$\left(\frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3}\right)[(b+c) + (c+a) + (a+b)] \geq$

$$\left(\frac{a}{(b+c)} + \frac{b}{(c+a)} + \frac{c}{(a+b)}\right)^2 \geq \frac{9}{4}.$$

Λύση 3 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{a^2(a+b+c)}{(b+c)^3} + \frac{b^2(a+b+c)}{(c+a)^3} + \frac{c^2(a+b+c)}{(a+b)^3} \geq \frac{9}{8} \quad \text{ή}$$

αλλιώς $\displaystyle\sum \frac{a^3}{(b+c)^3} + \sum \frac{a^2}{(b+c)^2} \geq \frac{9}{8}.$
Η τελευταία είναι αληθής διότι:
Για θετικούς αριθμούς ισχύει λόγω της ανισότητας *Chebyshev* $9(x^3 + y^3 + z^3) \geq (x+y+z)^3$.
Άρα λόγω και της ανισότητας *Nesbitt*

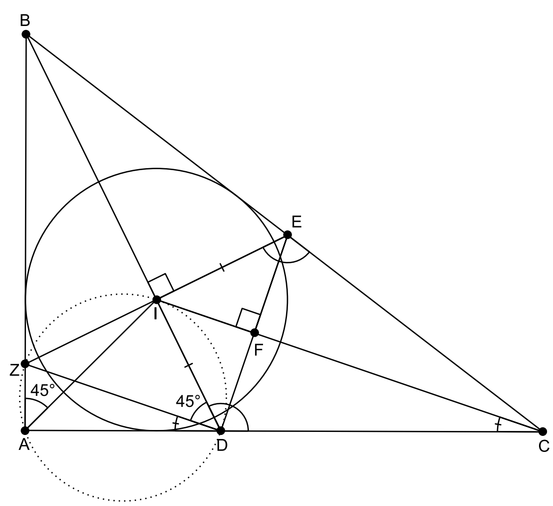
$$9\sum \frac{a^3}{(b+c)^3} \geq \left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^3 \geq \frac{27}{8}$$

Επίσης $\displaystyle 3\sum \frac{a^2}{(b+c)^2} \geq \left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο* $\triangle\ ABC$ *με υποτείνουσα* BC, *ονομάζουμε* I *το έγκεντρο. Η ευθεία* BI *τέμνει την* AC *στο σημείο* D *και έστω* E, *το συμμετρικό του* D *ως προς την* CI. *Η ευθεία* EI *τέμνει την πλευρά* AB *στο σημείο έστω* Z. *Να αποδειχθεί ότι η* DZ *είναι παράλληλη στην* CI.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=13272

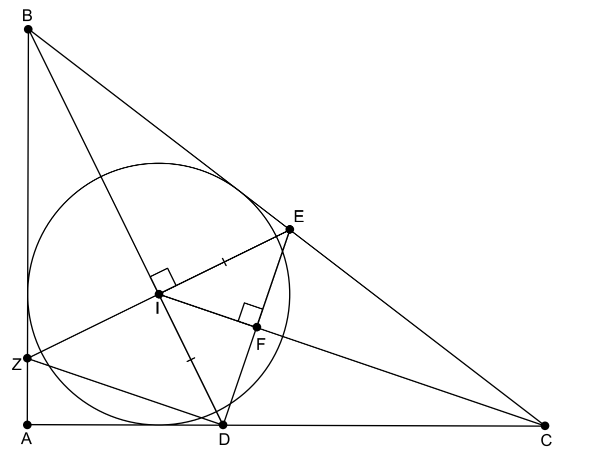
Λύση ($KARKAR$) Λόγω συμμετρίας της διχοτόμου της γωνίας $\angle C$, το σημείο E ανήκει στην BC και άρα ισχύει $\angle CEI = \angle CDI = 90^o + \dfrac{\angle B}{2} \Longrightarrow \angle DIE = 90^o \quad ,(1)$ Από (1) και $\angle A = 90^o$ προκύπτει ότι το τετράπλευρο $DIZA$ είναι εγγράψιμο και άρα έχουμε $\angle IDZ = \angle IAZ = 45^o \quad ,(2)$



Από (2) και $\angle ADB = 90^o - \dfrac{\angle B}{2}$, προκύπτει ότι $\angle ADZ = \dfrac{\angle C}{2} = \angle ACI \quad ,(3)$

Από (3) συμπεραίνεται ότι $DZ \parallel CI$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Λύση 2 (Δημήτρης Οικονόμου) Επειδή το E, συμμετρικό του D ως προς την ευθεία CI ανήκει στην BC, προκύπτει ότι $FD = FE \quad ,(1)$ όπου $F \equiv CI \cap DE$.
Λόγω συμμετρίας ισχύει επίσης $\angle DIC = \angle EIC \quad ,(2)$

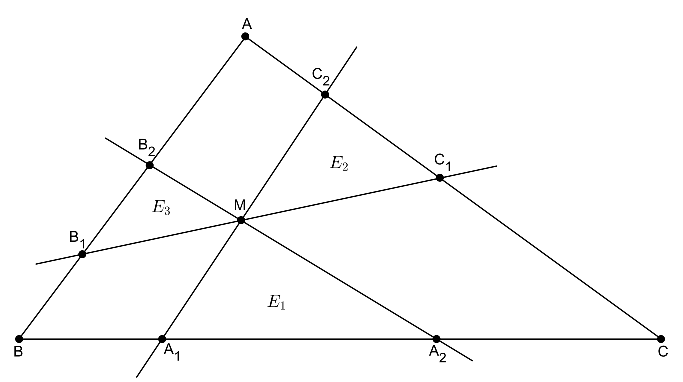


Από (2) και $\angle DIC = 180^o - \angle IDC - \dfrac{\angle C}{2} = 180^o - 90^o - \dfrac{\angle B}{2} - \dfrac{\angle C}{2} = 45^o$, προκύπτει ότι $\angle DIE = 90^o \Longrightarrow BD \perp EZ \quad ,(3)$

Από (3) $\Longrightarrow IE = IZ \quad ,(4)$ λόγω της διχοτόμου BD της γωνίας $\angle B$.

Από (1), (4) στο τρίγωνο $\triangle\ DEZ$, συμπεραίνεται ότι $DZ \parallel FI \equiv CI$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Δίνεται τρίγωνο*
$\triangle\ ABC$ *με εμβαδόν* E *και έστω* M, *τυχόν σημείο στο εσωτερικό του.*



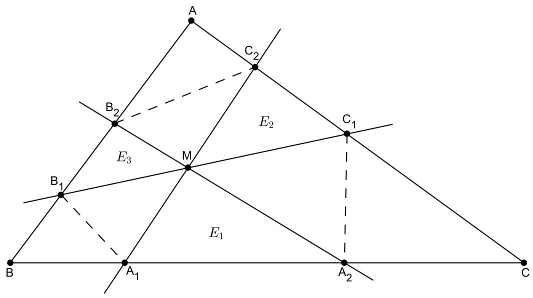
Τρεις τυχούσες ευθείες δια του M, *τέμνουν τις πλευρές του* $\triangle\ ABC$ *όπως φαίνεται στο σχήμα, δημιουργώντας τρία τρίγωνα με εμβαδά* $E_1,\ E_2,\ E_3$. *Να αποδειχθεί ότι* $\dfrac{1}{E_1} + \dfrac{1}{E_2} + \dfrac{1}{E_3} \geq \dfrac{18}{E}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=17211

Λύση (Θάνος Μάγκος) Τα τρίγωνα

$$\triangle\ MA_1A_2,\ \ \triangle\ MB_2C_2$$

έχουν τις γωνίες $\angle A_1MA_2 = \angle B_2MC_2$ και επομένως ισχύει $\dfrac{E_1}{(MB_2C_2)} = \dfrac{(MA_1)(MA_2)}{(MB_2)(MC_2)}$, (1)



Ομοίως, έχουμε $\dfrac{E_2}{(MA_1B_1)} = \dfrac{(MC_1)(MC_2)}{(MA_1)(MB_1)}$, (2) και $\dfrac{E_3}{(MA_2C_1)} = \dfrac{(MB_1)(MB_2)}{(MA_2)(MC_1)}$, (3)

Από (1), (2), (3) $\Longrightarrow E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 = (MA_1A_2)(MC_1C_2)(MA_2C_1)$, (4) Με χρήση της (4) τώρα, αποδεικνύεται εύκολα το ζητούμενο. Χρησιμοποιώντας δύο φορές την ανισότητα ΑΜ - ΓΜ έχουμε :

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3}} =$$

$$\frac{3}{\sqrt[6]{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot (MB_2C_2)(MA_1B_1)(MA_2C_1)}} \geq$$

$$\frac{18}{E_1 + E_2 + E_3 + (MB_2C_2) + (MA_1B_1) + (MA_2C_1)} \geq \frac{18}{E}$$

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Ανδρέας Δαλαούτης) Να βρεθούν οι συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:*

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2)$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=24585

Λύση 1 (Σπύρος Καπελλίδης) Θέτοντας $x+y=a$ και $x-y=b$ βρίσκουμε $x=\dfrac{a+b}{2}$ και $y=\dfrac{a-b}{2}$. Συνεπώς η δοθείσα γράφεται

$$bf(a)-af(b)=ab(a^2-b^2)$$

για όλα τα $a,b\in\mathbb{R}$, οπότε για όλα τα $a,b\in\mathbb{R}^*$ ισχύει

$$\frac{f(a)}{a}-\frac{f(b)}{b}=a^2-b^2,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{f(a)}{a}-a^2=\frac{f(b)}{b}-b^2.$$

Συνεπώς η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}-x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ είναι σταθερή, κι άρα $f(x)=x^3+cx$,για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $f(0)=0$, άρα $f(x)=x^3+cx$, $\forall x\in\mathbb{R}$, που επαληθεύει την αρχική.

Λύση 2 (Αλέξανδρος Μουσάτωφ) Θέτω $x=y+1$ και έχω

$$f(2y+1)=(2y+1)f(1)+4y(y+1)(2y+1).$$

Αν θέσω $f(1)=c+1$ έχω

$$\begin{aligned}f(2y+1)&=c(2y+1)+(2y+1)(4y^2+4y+1)\\&=c(2y+1)+(2y+1)^3,\end{aligned}$$

άρα $f(x)=x^3+cx$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Αθανάσιος Κοντογιώργης) Να προσδιορίσετε όλες τις γνησίως αύξουσες συναρτήσεις*

$$f:\{1,2,\ldots,10\}\to\{1,2,\ldots,100\}$$

τέτοιες ώστε $x+y|xf(x)+yf(y)$, για κάθε $x,y\in\{1,2,\ldots,10\}$.

---

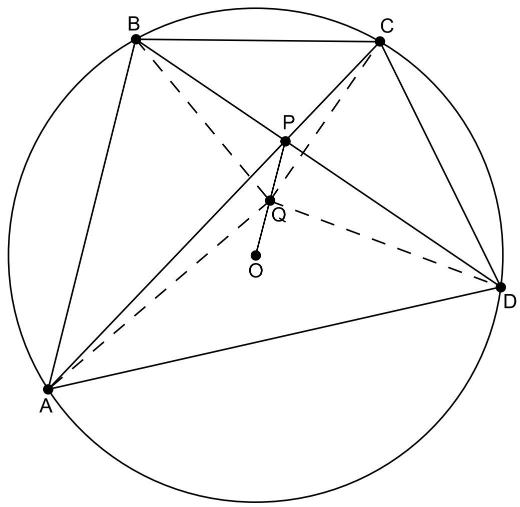
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=18963

Λύση (Παναγιώτης Λώλας) Καταρχάς, αν $x\in 1,2,\ldots,9$, ο $2x+1$ διαιρεί τον $xf(x)+f(x+1)(x+1)$ που διαιρεί τον $2xf(x)+2(x+1)f(x+1)$. Άρα, ο $2x+1$ διαιρεί τον $f(x+1)-f(x)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}99\geq f(10)-f(1)&=\sum_{x=1}^{9}f(x+1)-f(x)\\&\geq\sum_{x=1}^{9}(2x+1)\\&=99.\end{aligned}$$

Άρα, $f(x+1)-f(x)=2x+1$ και $f(1)=1$. Τελικά $f(x)=x^2$ για κάθε $x\in 1,2,\ldots,10$.

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Στυλιανού)* *Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και έστω το σημείο $P \equiv AC \cap BD$.*



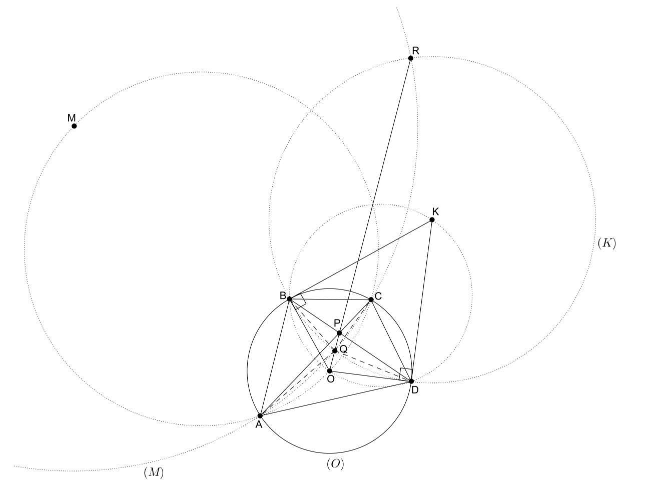
Στο εσωτερικό του $ABCD$ ορίζεται το σημείο Q, ώστε να είναι

$$\angle QAB + \angle QCB = \angle QBC + \angle QDC = 90^o.$$

Αποδείξτε ότι τα σημεία P, Q, O είναι συνευθειακά, όπου O είναι το κέντρο του (O).

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=17404

Λύση (Κώστας Ρεκούμης.) Από $\angle QBC + \angle QDC = 90^o$ $\Longrightarrow \angle QBD + \angle DBC + \angle QDB + \angle DBC = 90^o$,(1)



Από (1) και $\angle QBD + \angle QDB = 180^o - \angle BQD$ και $\angle DBC + \angle BDC = \angle A$, προκύπτει ότι
$\angle BQD = 90^o + \angle A$ (2)

Ομοίως, έχουμε και $\angle AQC = 90^o + \angle D$,(3)

Από (2), (3), συμπεραίνεται ότι το σημείο Q ορίζεται ως το σημείο τομής δύο κύκλων έστω (K), (M), με χορδές τα ευθύγραμμα τμήματα BD, AC αντιστοίχως και γνωστές τις αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες $\angle BQD$, AQC και έστω R, το δεύτερο εκτός του Q, σημείο τομής των κύκλων (K), $(M.)$

Στον κύκλο (K) τώρα, ισχύει προφανώς
$\angle BQD + \dfrac{\angle BKD}{2} = 180^o$,(4)
όπου K είναι το κέντρο του (K).

Από (2), (4) και $\angle BOD = 2\angle A$, προκύπτει ότι $\angle BOD + \angle BKD = 180^o$ και άρα, το τετράπλευρο $KBOD$ είναι εγγράψιμο και έχουμε
$\angle OBK + \angle ODK = 180^o \Longrightarrow \angle OBK = \angle ODK = 90^o$, λόγω $KB = KD$ και $OB = OD$.

Δηλαδή, ο περίκυκλος (O) του δοσμένου τετραπλεύρου $ABCD$, τέμνει ορθογωνίως τον κύκλο (K) και ομοίως, τέμνει ορθογωνίως και τον κύκλο (M) (αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο ότι το τετράπλευρο $MAOC$ είναι εγγράψιμο, όπου M είναι το κέντρο του (M)).

Συμπεραίνεται έτσι, ότι το κέντρο O του (O) έχει ίσες δυνάμεις ως προς τους κύκλους (K), (M) και άρα, ανήκει στην ευθεία QR, ως τον ριζικό άξονα αυτών των κύκλων, η οποία προφανώς περνάει από το σημείο $P \equiv AC \cap BD$, ως το ριζικό κέντρο των τριών κύκλων

(O), (K), (M) και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

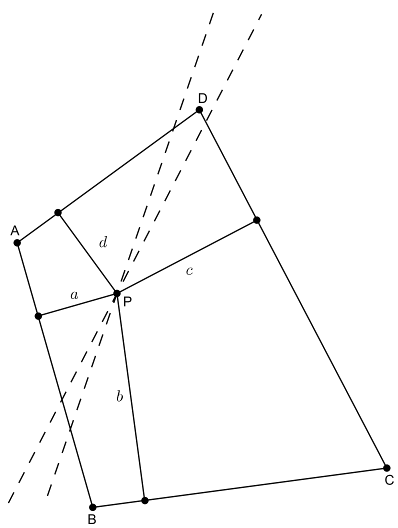
ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Υποθέστε ότι για τυχόν σημείο P στο εσωτερικό κυρτού τετραπλεύρου $ABCD$, το άθροισμα των αποστάσεών του από τις ευθείες AB, BC, CD, DA, παραμένει σταθερό. Αποδείξτε ότι το $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=24878

Λύση (Ανδρέας Βαρβεράκης.) Θα χρησιμοποιήσουμε ως **Λήμμα**, την παρακάτω γνωστή πρόταση.

ΛΗΜΜΑ .*Το άθροισμα των αποστάσεων μεταβλητού σημείου P της βάσης BC ισοσκελούς τριγώνου $\triangle ABC$, είναι σταθερό και ίσο με το ένα εκ των ίσων υψών του τριγώνου.* Έστω τώρα P, το σημείο στο εσωτερικό του τετραπλεύρου $ABCD$ και ας είναι a, b, c, d, οι αποστάσεις του από τις ευθείες AB, BC, CD, DA, αντιστοίχως.



Αν το σημείο P κινηθεί σε διεύθυνση κάθετη στη διχοτόμο της γωνίας έστω $\angle A$, το άθροισμα $(a + d)$ θα παραμείνει σταθερό, σύμφωνα με το παραπάνω **Λήμμα**, ενώ το άθροισμα $(b + c)$ θα αλλάξει, εκτός εάν η διεύθυνση κίνησης του P είναι ταυτοχρόνως κάθετη και στη διχοτόμο της γωνίας $\angle C$.

Άρα, επειδή από την εκφώνηση ισχύει ότι το άθροισμα $a + b + c + d$ παραμένει σταθερό, συμπεραίνεται ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle A$, $\angle C$ είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι και οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle B$, $\angle D$ είναι επίσης παράλληλες μεταξύ τους.

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι το δοσμένο τετράπλευρο $ABCD$ με παράλληλες τις διχοτόμους των απέναντι γωνιών του, είναι παραλληλόγραμμο και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Είναι φανερό, ότι το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος σημείο στο εσωτερικό παραλληλογράμμου, από τις πλευρές του, ισούται με το άθροισμα των δύο υψών του.

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Συγκελάκης - Θέμα 1ης Προκριματικής Φάσης Γ Λυκείου 1995) Ένας 6-ψήφιος αριθμός αρχίζει με το ψηφίο 5. Είναι αληθές, ότι πάντα μπορούμε να προσθέσουμε από τα δεξιά του αριθμού 6 ψηφία ώστε ο λαμβανόμενος αριθμός να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου·*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=120445

Λύση 1 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Η απάντηση είναι όχι. Ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι πάντα εφικτό. Άρα υπάρχει θετικός ακέραιος b ώστε $599.997 \cdot 10^6 \leq b^2 < 599.998 \cdot 10^6$.

Τότε $b > \sqrt{599.997} \cdot 10^3 > 774 \cdot 10^3$ οπότε

$$2b > 1500 \cdot 10^3.$$

Άρα

$(b+2)^2 = b^2 + 4b + 4 > 599.997 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^6 = 600.000 \cdot 10^6$.

Ανάμεσα στους αριθμούς b^2 και $(b+2)^2$ υπάρχει ακριβώς ένα τέλειο τετράγωνο. Όμως

$b^2 < 599.998 \cdot 10^6 < 600.000 \cdot 10^6 < (b+2)^2$.

Από την υπόθεση που κάναμε παραπάνω στο διάστημα $(599.998 \cdot 10^6, 600.000 \cdot 10^6)$ υπάρχουν τουλάχιστον δύο τέλεια τετράγωνα, ένα που ξεκινά με 599.998 και ένα που ξεκινά με 599.999. Άτοπο.

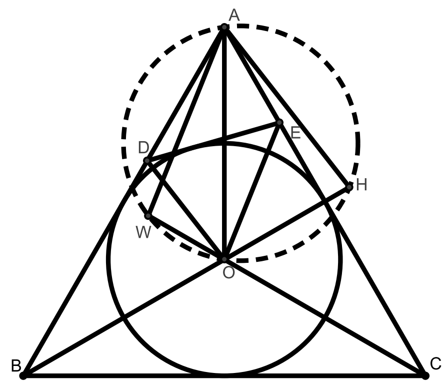
Λύση 2 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Αν ισχύει τότε υπάρχουν τουλάχιστον 100000 δωδεκαψήφιοι αριθμοί που ξεκινούν από 5 και είναι τέλεια τετράγωνα. Κοιτάζουμε τις τετραγωνικές ρίζες αυτών των αριθμών. Είναι όλες ακέραιες, διαφορετικές μεταξύ τους και ανήκουν στο διάστημα $(700000, 790000)$ αφού $(70000)^2 < 5 \cdot 10^{11}$ και $(79000)^2 > 6 \cdot 10^{11}$. Αυτό είναι άτοπο αφού το διάστημα περιέχει το πολύ 89999 τέτοιους αριθμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Αντώνης Κυριακόπουλος) Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC και στις πλευρές του AB και AC τα σημεία D και E αντιστοίχως, έτσι ώστε η ευθεία DE να εφάπτεται στον εγγεγραμμένο του κύκλο. Να αποδείξετε ότι:* $\dfrac{AD}{DB} + \dfrac{AE}{EC} = 1$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=111876

Λύση 1 (Σωτήρης Λουρίδας) Έστω σημεία $H \in BO$ και $W \in CO$ με $AH \parallel OD$ και $AW \parallel OE$. Τότε είναι $\angle WAH = \angle DOE = \angle DAE = 60^\circ$, $\angle WOH = 120^\circ$.



Τα σημεία A, W, O, H είναι ομοκυκλικά άρα

$$\angle AWH = \angle AOH = 60^\circ = \angle AOH = \angle AHW.$$

Τα παραπάνω οδηγούν στο γεγονός ότι το τρίγωνο AWH είναι ισόπλευρο. Από γνωστή πρόταση (αποδεικνύεται και με τη βοήθεια του θεωρήματος του Πτολεμαίου) έχουμε: $OW + OH = OA (= OB = OC)$.

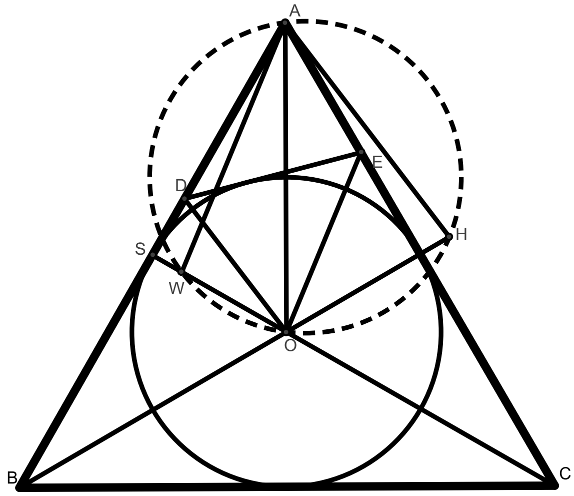
$$\begin{cases} \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{OH}{OB} = \dfrac{OH}{OA} \\ \\ \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{OW}{OC} = \dfrac{OW}{OA} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = \frac{OH + OW}{OA} = \frac{OA}{OA} = 1.$$

Σημείωση: 1) Αν $D \equiv S$ οπότε $E \equiv A$ έχουμε $\dfrac{AD}{DB} + \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB/2}{AB/2} + \dfrac{0}{EC} = 1$.

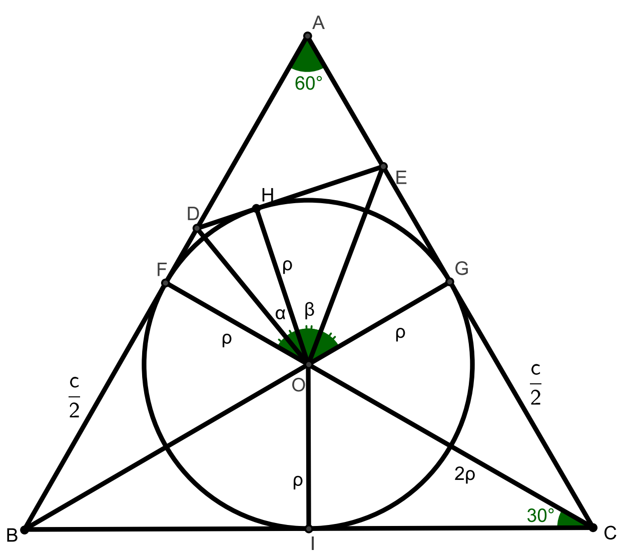
2) Το αυτό με την 1) και στην περίπτωση που το σημείο E ταυτιστεί με το σημείο επαφής της πλευράς AC με τον εγγεγραμμένο κύκλο, οπότε το σημείο D θα ταυτιστεί με το σημείο A.

Λύση 2 (Αντώνης Κυριακόπουλος) Ονομάζουμε α την πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου και θέτουμε: $BD = x$ και $CE = y$, οπότε: $AD = \alpha - x$ και $AE = \alpha - y$. Επειδή, όπως βρίσκομε εύκολα, ισχύει: $ED + BC = BD + CE$, έχουμε: $ED + \alpha = x + y$ και συνεπώς: $ED = x + y - \alpha$.



Από το τρίγωνο ADE έχουμε: $ED^2 = AE^2 + AD^2 - 2AD \cdot AF$ (1) όπου F η προβολή του E στην AD. Επειδή $\angle FEA = 30°$, στο ορθογώνιο τρίγωνο AFE έχουμε: $AF = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(\alpha - y)$. Έτσι, από την (1), έχουμε: $(x+y-\alpha)^2 = (\alpha-y)^2 + (\alpha-x)^2 - (\alpha-x)(\alpha-y)$ και αμέσως μετά τις πράξεις λαμβάνουμε $\alpha = \frac{3xy}{x+y}$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε: $AD = \alpha - x = \frac{x(2y-x)}{x+y}$ και $AE = \alpha - y = \frac{y(2x-y)}{x+y}$. Έτσι έχουμε: $\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = \frac{x(2y-x)}{x(x+y)} + \frac{y(2x-y)}{y(x+y)} = 1$.

Λύση 3 (Math Rider) Ονομάζουμε c την πλευρά του ισόπλευρου τρίγωνου και ρ την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του. Έστω επίσης H το σημείο επαφής της ευθείας DE και του εγγεγραμμένου κύκλου και F, G τα σημεία επαφής του κύκλου με τις πλευρές AB, AC αντιστοίχως:



Τότε ισχύουν τα εξής:

- $AF = BF = AG = CG = \frac{c}{2}$ (1)
- $FD = DH$, $GE = HE$ (2) (εφαπτόμενα τμήματα)
- $c = 2\sqrt{3}\rho$ (3) (προκύπτει π. χ. από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OGC)
- $\alpha + \beta = 60°$, όπου $\alpha = \angle DOH$ και $\beta = \angle HOE$ (γιατί $\angle FOG = 120°$ και $\angle FOD = \angle DOH$, $\angle HOE = \angle EOG$)
- $\alpha + \beta = 60° \Rightarrow \varepsilon\phi(\alpha+\beta) = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}(\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta) = 3(1 - \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta)$ (4)

Επομένως είναι

$$
\begin{aligned}
\frac{AD}{BD} + \frac{AE}{EC} &= \frac{AF - FD}{BF + FD} + \frac{AG - GE}{CG + GE} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{\frac{c}{2} - FD}{\frac{c}{2} + FD} + \frac{\frac{c}{2} - GE}{\frac{c}{2} + GE} \\
&= \frac{c - 2FD}{c + 2FD} + \frac{c - 2GE}{c + 2GE} \\
&\overset{(2)}{=} \frac{c - 2DH}{c + 2DH} + \frac{c - 2EH}{c + 2EH} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{2\sqrt{3}\rho - 2DH}{2\sqrt{3}\rho + 2DH} + \frac{2\sqrt{3}\rho - 2EH}{2\sqrt{3}\rho + 2EH} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \frac{DH}{\rho}}{\sqrt{3} + \frac{DH}{\rho}} + \frac{\sqrt{3} - \frac{EH}{\rho}}{\sqrt{3} + \frac{EH}{\rho}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - \varepsilon\phi\alpha}{\sqrt{3} + \varepsilon\phi\alpha} + \frac{\sqrt{3} - \varepsilon\phi\beta}{\sqrt{3} + \varepsilon\phi\beta} \\
&= \frac{6 - 2\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}{3 + \sqrt{3}(\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta) + \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} \\
&\overset{(4)}{=} \frac{6 - 2\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}{3 + 3(1 - \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta) + \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} \\
&= \frac{6 - 2\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}{6 - 2\varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} = 1
\end{aligned}
$$

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον διαγωνισμό IMC του 1996) Έστω n φυσικός αριθμός. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\, dx.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=25166

Λύση (Χρήστος Στραγάλης) Έχουμε

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\, dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\, dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\, dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\, dx + \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nu}{(1+2^{-u})\sin u}\, du \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\, dx + \int_{0}^{\pi} \frac{2^u \cdot \sin nu}{(1+2^{u})\sin u}\, du \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο

$$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$$

είναι

$$\begin{aligned}
I_n - I_{n-2} &= \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x}\, dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{2\sin x \cos(n-1)x}{\sin x}\, dx \\
&= 2\int_{0}^{\pi} \cos(n-1)x\, dx = 0.
\end{aligned}$$

Επειδή όμως εύκολα βρίσκουμε $I_0 = 0$ και $I_1 = \pi$ τελικά έχουμε

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2k, \\ \pi & \text{αν } n = 2k+1. \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Αλέξανδρος Γεωργακάπουλος) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n > \frac{1}{n}$ για άπειρους φυσικούς n. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=24073

Λύση 1 (Ηλίας Ζαδίκ) Έστω ότι συγκλίνει και έστω k_n η υπακολουθία της εκφώνησης. Είναι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} (k_n - k_{n-1}) a_{k_n} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{k_{n-1}}{k_n}\right).$$

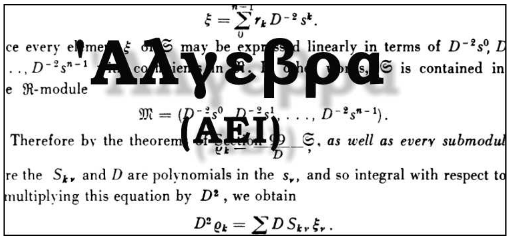
Άρα $1 - \frac{k_{n-1}}{k_n} \to 0$ και αφού $\frac{\ln x}{x-1} \to 1$ όταν $x \to 1$, απο κριτήριο σύγκρισης συγκλίνει και η ακολουθία

$$\ln(k_n) = \ln(k_1) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{k_i}{k_{i-1}}\right),$$

άτοπο.

Λύση 2 (Αλέξανδρος Γεωργακόπουλος) Στην πρώτη λύση, μπορούμε να επιλέξουμε την ακολουθία k_n έτσι ώστε $k_n > 2k_{n-1}$ για κάθε n. Άρα η $1 - \frac{k_{n-1}}{k_n}$ δεν τείνει στο 0 και άρα η σειρά αποκλίνει.

Λύση 3 (Δημήτρης Σκουτέρης) Έστω ότι η $\sum_{k=1}^{n} a_k$ συγκλίνει. Τότε συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_n)$ (ως μονότονη και φραγμένη), οπότε συγκλίνει και η διαφορά τους na_n. Αν συγκλίνει σε θετικό αριθμό, τότε $a_n > \frac{c}{n}$ για κάποιον $c > 0$ και για αρκετά μεγάλα n, οπότε έχουμε το ζητούμενο. Άρα $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$, από όπου καταλήγουμε σε άτοπο.



Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Θανάσης Κοντογεώργης) Στο σύνολο* $M = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ *ορίζουμε την πράξη* $x * y = 3(xy - 3x - 3y) + m$, $m \in \mathbb{R}$. *Να βρείτε όλα τα* m *για τα οποία η δομή* $(M, *)$ *αποτελεί ομάδα.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=23549

Λύση (Στράτης Αντωνέας)

Προκειμένου η δομή να είναι ομάδα, θα έχει ουδέτερο στοιχείο έστω το e. Τότε:

$$1 * e = 1 \Rightarrow 3e - 9 - 9e + m = 1 \Rightarrow m = 6e + 10$$

και

$$2 * e = 2 \Rightarrow 6e - 18 - 9e + m = 2 \Rightarrow m = 3e + 20.$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις βρίσκουμε ότι $e = \frac{10}{3}$ και $m = 30$. Θα δείξουμε ότι για $m = 30$ η δομή είναι όντως ομάδα.

Αν $a, b \in M$ τότε

$$\begin{aligned} a * b &= 3ab - 9a - 9b + 30 \\ &= 3(ab - 3a - 3b + 27) + 3 \\ &= 3(a-3)(b-3) + 3 \neq 3 \end{aligned}$$

αφού $a \neq 3$ και $b \neq 3$. Επομένως η πράξη είναι εσωτερική. Για κάθε $a \in M$ είναι

$$\begin{aligned} a * \frac{10}{3} &= \frac{10}{3} * a \\ &= 3a\frac{10}{3} - 9a - 9 \\ &= 10a - 9a - 30 + 30 \\ &= a \end{aligned}$$

επομένως το $\frac{10}{3}$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο. Επίσης για κάθε $a \in M$ είναι

$$\begin{aligned} & a * x = x * a = \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow & 3ax - 9a - 9x + 30 = \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{27a - 80}{9(a-3)} \neq 3 \end{aligned}$$

επομένως υπάρχουν και τα αντίστροφα στοιχεία. Τέλος αν $a, b, c \in M$ τότε

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= 9abc - 27(ab + bc + ca) + 81(a + b + c) - 240 \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

άρα η πράξη είναι προσεταιριστική και άρα η δομή $(M, *)$ είναι ομάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(vzf) Έστω ένα σύνολο από* m *πραγματικούς* $n \times n$ *πίνακες που έχει αντιστρέψιμο άθροισμα. Δείξτε ότι κάποιο υποσύνολο, το πολύ* n *από αυτούς τους πίνακες, έχει επίσης αντιστρέψιμο άθροισμα.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=23825

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος)

Έστω $k > n$ και $A_1, A_2, \ldots, A_k$ τυχαίοι $n \times n$ πίνακες. Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k\}} (-1)^{|I|} \det\left(\sum_{j \in I} A_j\right) = 0 \qquad (1)$$

Για παράδειγμα, αν $k = 3$, η (1) λέει ότι για οποιουσδήποτε 2×2 πίνακες A_1, A_2, A_3 ισχύει ότι

$$\begin{aligned} &\det(A_1 + A_2 + A_3) - \det(A_1 + A_2) - \det(A_2 + A_3) \\ &- \det(A_3 + A_1) + \det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) = 0. \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται από την (1) ως εξής:

Έστω $m > n$ και $A_1, A_2, \ldots, A_m$ τυχαίοι $n \times n$ πίνακες. Υποθέτουμε ότι το άθροισμα οποιωνδήποτε r από αυτούς, με $r \leqslant n$, είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε, εφαρμόζοντας την (1) για $k = n + 1$ προκύπτει ότι το άθροισμα οποιωνδήποτε r από τους δοσμένους πίνακες, με $r \leqslant n + 1$, είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας. Όμοια, εφαρμόζοντας διαδοχικά την (1) για $k = n + 2, \ldots, m$ προκύπτει ότι το άθροισμα $A_1 + A_2 + \cdots + A_m$ είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας.

Απομένει να δείξουμε την ταυτότητα (1). Γράφοντας $[k] := \{1, 2, \ldots, k\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,k\}} (-1)^{|I|} \det\left(\sum_{j \in I} A_j\right) \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [k]} (-1)^{|I|} \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j \in I} A_j(i, \sigma(i))\right)\right). \end{aligned}$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά άθροισης, έχουμε ότι:

$$\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\dots,k\}} (-1)^{|I|} \det\left(\sum_{j\in I} A_j\right)$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\left(\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[k]} (-1)^{|I|} \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in I} A_j\,(i,\sigma(i))\right)\right).$$

Έστω τυχαία, αλλά σταθεροποιημένη, μετάθεση $\sigma \in S_n$. Θέτουμε $a_{ij} = A_j\,(i,\sigma(i))$. Θα αποδείξουμε ότι:

$$\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\dots,k\}} (-1)^{|I|} \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\in I} a_{ij}\right) = 0. \qquad (2)$$

Το αριστερό μέλος της σχέσης (2) είναι άθροισμα μονωνύμων της μορφής $a_J := a_{1,j_1}a_{2,j_2}\cdots a_{n,j_n}$, όπου $J := [j_1, j_2, \dots, j_n]$ (τα $j_1, j_2, \dots, j_n$ δεν είναι αναγκαστικά διακεκριμένα, γι΄ αυτό και χρησιμοποιούμε αυτό τον «αδόκιμο» συμβολισμό, εννοώντας ότι το J είναι το σύνολο που αποτελείται από τα διακεκριμένα μέλη της συλλογής $j_1, j_2, \dots, j_n$.)

Για κάθε $\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ με $J \subseteq I$, το μονώνυμο a_J εμφανίζεται στο αριστερό μέλος της σχέσης (2) ακριβώς μια φορά, με αντίστοιχο συντελεστή $(-1)^{|I|}$. Εφόσον $|J| \leqslant n < k$, αν θέσουμε $r = |I| - |J|$, τότε είναι $0 \leqslant r \leqslant k - |J|$, οπότε ο συντελεστής του μονωνύμου a_J στο αριστερό μέλος της (2) θα είναι ίσος με

$$\begin{aligned}&\sum_{r=0}^{k-|J|}(-1)^{|J|+r}\binom{k-|J|}{r}\\ =&(-1)^{|J|}\sum_{r=0}^{k-|J|}(-1)^{r}\binom{k-|J|}{r}\\ =&(-1)^{|J|}(-1+1)^{k-|J|} = 0.\end{aligned}$$

Η σχέση (2), άρα και η (1), έπεται.

Ανάλυση (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτείνει ο Κώστας Τσουβαλάς) Να υπολογιστεί το*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1-aix)}{x^2+m}\,dx\,, \quad a>0,\ m>0$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=7842&start=160

Λύση 1 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Ισχύει

$$I_1=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+b^2)\,(x^2+c^2)}\,dx=\frac{\pi}{2\,(b+c)}\,,\ \ b,c>0\,.$$

Επίσης ισχύει

$$I_2=\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2+m^2}\,dx=\frac{\pi}{m}\ln(m+1)\,,$$

διότι $I_2=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2+m^2}\,dx=$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+m^2}\left(\int_0^{x}\frac{2y}{1+y^2}\,dy\right)dx \overset{y=xt}{=\!=}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+m^2}\left(\int_0^{1}\frac{2x^2t}{1+x^2t^2}\,dt\right)dx=$$

$$2\int_0^{1}t\left(\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+m^2)\,(1+x^2t^2)}\,dx\right)dt=$$

$$2\int_0^{1}\frac{1}{t}\left(\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+m^2)\left(\frac{1}{t^2}+x^2\right)}\,dx\right)dt \overset{\lfloor I_1\rfloor}{=\!=}$$

$$\int_0^{1}\frac{1}{t}\,\frac{\pi}{m+\frac{1}{t}}\,dt=\frac{\pi}{m}\ln(m+1)\,.$$

Επομένως $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-axi)}{x^2+m}\,dx \overset{ax=-y}{=\!=}$

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1+yi)}{y^2+a^2m}\,dy=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1+y^2)+i\arctan y}{y^2+a^2m}\,dy$$

$$=a\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+y^2)}{y^2+a^2m}\,dy+0=a\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+y^2)}{y^2+\left(a\sqrt{m}\right)^2}\,dy \overset{\lfloor I_2\rfloor}{=\!=}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{m}}\ln(1+a\sqrt{m}\,)\,. \quad \square$$

Λύση 2 (Κώστας Τσουβαλάς) Αρχικά θεωρούμε την μιγαδική συνάρτηση $f(z)=\dfrac{\ln(1-aiz)}{z^2+m}$, $z\in\mathbb{C}, a>0, m>0$ η οποία είναι πλειότιμη, και με σκοπό να την κάνουμε μονότιμη ορίζουμε σαν branch cut την ημιευθεία από τον $z_1=-\dfrac{i}{a}$ και κάτω, στον άξονα των φανταστικών.

Άρα $\ln(1-aiz)=\ln(az+i)-\ln i=\ln|az+i|+i\arg(az+i)-\dfrac{\pi i}{2}$ αφού $\ln i=\ln|i|+i\arg(i)=\dfrac{\pi i}{2}$. Έτσι θεωρούμε το ημικύκλιο $C:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ στο άνω ημιεπίπεδο από $A(R,0)\,,B(-R,0)$.

Το άνω ημικύκλιο δεν «κόβεται» από το branch cut, και η f είναι αναλυτική σε αυτό (εκτός του πόλου), άρα από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy: $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=2\pi i\,Res(f,i\sqrt{m}\,)$, καθώς ο μόνος πόλος που περιέχεται στον τόπο μας είναι ο $i\sqrt{m}$.

Άρα $\displaystyle\int_C f(z)\,dz=\int_0^{\pi}f(Re^{it})\,iR\,e^{it}\,dt+\int_{-R}^{R}f(z)\,dz\,.$

Όμως $\displaystyle\int_0^{\pi}f(R\,e^{it})\,iR\,e^{it}\,dt=\int_0^{\pi}\frac{\ln(1-aiR\,e^{it})}{R^2e^{2it}+m}\,iR\,e^{it}\,dt\,.$

Για αρκετά μεγάλα R έχουμε

$$\left|\int_0^{\pi}iR\,e^{it}f(R\,e^{it})\,dt\right|\leqslant\int_0^{\pi}R\,\frac{\left|\ln(1-ai\,R\,e^{it})\right|}{\left|R^2\,e^{2it}+m\right|}\,dt\,.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$\left|R^2\,e^{2it}+m\right|\geqslant\left|R^2\,|e^{2it}|-m\right|=R^2-m\,,$ για $R>\sqrt{m}$,

και $\left|\ln(1-aiR\,e^{it})\right|=|\ln(1+aR\sin t-aiR\cos t)|=$

$\left|\ln\sqrt{2+2aR\sin t}+i\arg(1+aR\sin t-aiR\cos t)\right|\leqslant$

$\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{1}{2}\ln(1+2aR\sin t)\leqslant\dfrac{3\pi+\ln(1+2aR)}{2}\,.$

Άρα

$$\int_0^{\pi}R\,\frac{\left|\ln(1-aiR\,e^{it})\right|}{|R^2\,e^{2it}+m|}\,dt\leqslant R\int_0^{\pi}\frac{3\pi+\ln(1+2aR)}{2R^2-2m}\,dt=$$

$$R\,\pi\,\frac{3\pi+\ln(1+2aR)}{2R^2-2m}\to 0\,,\ \text{για } R\to\infty\,.$$

Έτσι $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}f(Re^{it})\,iR\,e^{it}\,dt=0$ και επίσης $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz\,.$

Επομένως $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz=2\pi i\,Res(f,i\sqrt{m}\,).$

Όμως $Res(f, i\sqrt{m}) = \dfrac{\ln\left(ai\sqrt{m}+i\right)}{2i\sqrt{m}} =$

$$\frac{\ln\left|i\left(a\sqrt{m}+1\right)\right| + i\arg\left(i\left(a\sqrt{m}+1\right)\right) - \pi i/2}{2i\sqrt{m}} =$$

$$\frac{\ln\left(1+a\sqrt{m}\right)}{2i\sqrt{m}}.$$

Έτσι έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1-aix)}{x^2+m}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{m}}\ln(1+a\sqrt{m}). \quad \square$$

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Αν* $a_n = 1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\ln j}$ *να υπολογιστεί το* $\lim(\sqrt[n]{n})^{a_n}$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=23985

Λύση 1 (Αναστάσιος Κοτρώνης) Για $2 \le j \le n$ έχουμε

$$\frac{1}{\ln j} = \frac{1}{\ln n}\frac{1}{1+\frac{\ln(j/n)}{\ln n}} = \frac{1}{\ln n}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{\ln(j/n)}{\ln n}\right)\right) =$$

$\dfrac{1}{\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(j/n)}{\ln^2 n}\right)$, καθώς $-1 < \dfrac{\ln(j/n)}{\ln n} \le 0.$

Έπεται ότι

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\ln j} = \frac{n-1}{\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^2 n}\sum_{j=2}^{n}\ln(j/n)\right).$$

Όμως η $\ln(x/n)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,n]$.

Άρα $\displaystyle\int_2^n \ln(x/n)\,dx + \ln(2/n) \le \sum_{j=2}^{n}\ln(j/n) \le \int_2^{n+1}\ln(x/n)\,dx$, από όπου εύκολα έπεται ότι

$$\sum_{j=2}^{n}\ln(j/n) = \int_2^n \ln(x/n)\,dx + \mathcal{O}(\ln n) = -n + \mathcal{O}(\ln n).$$

Άρα $\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\ln j} = \frac{n-1}{\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{n}{\ln^2 n}\right)$ και

$$(\sqrt[n]{n})^{a_n} = \exp\left(\frac{\ln n}{n}\left(1+\frac{n-1}{\ln n}+\mathcal{O}(n\ln^{-2} n)\right)\right) =$$

$$\exp\left(1+\mathcal{O}(\ln^{-1} n)\right) \to e. \quad \square$$

Λύση 2 (Χρήστος Κυριαζής) Ισχύει $(\sqrt[n]{n})^{a_n} = e^{\frac{a_n}{n}\ln n}$.

Επομένως ας ασχοληθούμε με το όριο του εκθέτη $\dfrac{a_n}{n}\ln n = \dfrac{a_n}{\frac{n}{\ln n}}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η a_n είναι αύξουσα και απειρίζεται, αφού $1+\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\ln j} > 1+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j-1}$. Επιπλέον η συνάρτηση $\dfrac{n}{\ln n}$ είναι γνησίως αύξουσα για μεγάλα n και απειρίζεται. Επειδή:

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{\frac{n+1}{\ln(n+1)}-\frac{n}{\ln n}} = \frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{\frac{(n+1)\ln n - n\ln(n+1)}{\ln(n+1)\ln n}} = \frac{\ln n}{\ln[(\frac{n}{n+1})^n n]} =$$

$$\frac{\ln n}{\ln\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}+\ln n} = \frac{1}{-\frac{\ln(1+\frac{1}{n})^n}{\ln n}+1} \to 1$$ από το λήμμα Cesáro-Stolz έχω ότι: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{n}{\ln n}} = 1.$

Επομένως το ζητούμενο όριο είναι το e. $\square$

Μαθηματική Λογική & Θεμέλια Μαθηματικών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Δημήτρης Σκουτέρης

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Σπύρος Καπελλίδης)* $A_n = \{n, 2n, 3n, ...\}$ *με* $n \in \mathbb{N}^*$

Αν J *ένα άπειρο υποσύνολο του* $\mathbb{N}^*$, *τότε ποιο είναι το* $\bigcap_{i \in J} A_i$·

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=64&t=22887

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Απάντηση: Το κενό σύνολο.

Τα A_j αποτελούνται από θετικούς φυσικούς, οπότε η τομή τους είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$. Τώρα, έστω $m \in \mathbb{N}^*$. Αφού J άπειρο, υπάρχει $j \in J$ με $j > m$ (αλλιώς $J \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ = πεπερασμένο). Αλλά τότε $m \notin A_j$, άρα ούτε στην τομή. Με άλλα λόγια κανένας θετικός φυσικός δεν είναι στη τομή.

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Σπύρος Καπελλίδης)*

Είναι γνωστό πως η συμμετροδιαφορά δύο συνόλων A, B *ορίζεται ως εξής* $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, *είναι δε πράξη αντιμεταθετική και προσεταιριστική.*

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $A_1 \Delta A_2 \Delta ... \Delta A_n$ *αποτελείται από εκείνα και μόνον τα στοιχεία που ανήκουν σε περιττό αριθμό* A_i

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=64&t=23440

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Για ένα σύνολο A και ένα στοιχείο x ορίζω
$A(x) = 0$ αν $x \notin A$ και
$A(x) = 1$ αν $x \in A$.
Παρατηρούμε τώρα ότι
$(A \triangle B)(x) \equiv A(x) + B(x) \bmod 2$.
Επομένως
$x \in A_1 \triangle \cdots \triangle A_n \Leftrightarrow (A_1 \triangle \cdots \triangle A_n)(x) = 1 \Leftrightarrow$
$A_1(x) + \cdots + A_n(x) \equiv 1 \bmod 2 \Leftrightarrow$
το x ανήκει σε περιττό αριθμό από A_i.
Επίσης παίρνουμε σαν μπόνους ότι η πράξη είναι προσεταριστικη και αντιμεταθετική αφού το ίδιο ισχύει και για την πρόσθεση *modulo*2.

Θεωρία Αριθμών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Αναστάσης Καφετζόπουλος) Αν $p \in P$ μεp > 5 να δειχθεί ότι ο αριθμός $(p-1)!+1$ δεν είναι δύναμη του p (δηλαδή δεν είναι της μορφής p^k για κάποιο $k \in N$).*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=20371

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πρώτος αριθμός $p>5$ τέτοιος, ώστε $(p-1)!+1=p^k$ για κάποιο φυσικό αριθμό k. Τότε, θα είναι και

$(p-1)! = p^k - 1$.

Ισχυρισμός: $(p-1)! \equiv 0 \left(\bmod (p-1)^2\right)$.

Πράγματι, είναι

$$(p-1)^2 = 2 \cdot \frac{p-1}{2} \cdot (p-1),$$

και, αφού $p > 5$,

$$2 < \frac{p-1}{2} < p-1.$$

Άρα, οι αριθμοί $2, \frac{p-1}{2}, p-1$ περιέχονται στο γινόμενο $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) = (p-1)!$, οπότε ο ισχυρισμός έπεται.

Επομένως, ο αριθμός $(p-1)^2$ διαιρεί τον αριθμό $p^k - 1 = (p-1)\left(p^{k-1} + \cdots + p + 1\right)$. Άρα, ο αριθμός $p-1$ διαιρεί τον αριθμό $p^{k-1} + \cdots + p + 1$.

Παρατηρούμε ότι για $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ ισχύει $p^i \equiv 1 \left(\bmod\,(p-1)\right)$, οπότε

$$p^{k-1} + \cdots + p + 1 \equiv k \left(\bmod\,(p-1)\right).$$

Επομένως, ο αριθμός $p-1$ διαιρεί τον k. Άρα, είναι $k \geq p-1$, οπότε $p^k \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1}$. Έτσι,

$p^k \geq (p-1)^{p-1} + 1 > (p-1)! + 1 = p^k$, που είναι άτοπο. Το συμπέρασμα έπεται.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο dimtsig) Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί που έχουν σαν δεκαδικά ψηφία όλο μονάδες και είναι τέλεια τετράγωνα.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=22945

Λύση (Θάνος Μάγκος) Θα αποδείξουμε ότι μόνο ο αριθμός 1 έχει την παραπάνω ιδιότητα.

Έστω ότι υπάρχει ακέραιος m ώστε

$\underbrace{111...1}_{n} = m^2$, όπου $n > 1$.

Τότε, το τελευταίο ψηφίο του m θα είναι προφανώς 1 ή 9.

Δηλαδή ο m θα είναι της μορφής $m = 10a \pm 1$, με $a \in \mathbb{N}^*$.

Επομένως, η παραπάνω σχέση γράφεται

$\underbrace{111...1}_{n} = 100a^2 \pm 20a + 1$, άρα

$\underbrace{111...1}_{n-1}0 = 100a^2 \pm 20a$, άρα

$\underbrace{111...1}_{n-1} = 10a^2 \pm 2a$.

Άτοπο, αφού το αριστερό μέλος είναι περιττός, ενώ το δεξί άρτιος.

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω S ένα απειροσύνολο θετικών πραγματικών, για το οποίο για οποιοδήποτε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του $s_1, s_2, ..., s_n$ ισχύει $s_1 + s_2 + ... + s_n < 1$. Είναι το S αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο ;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=13&t=18203

Λύση (Μιχάλης Λάμπρου) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \{s_k : s_k \geq \frac{1}{n}\}$. Από την δοθείσα υπόθεση έπεται ότι το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο (το πολύ n στοιχεία). Επειδή $S = \cup A_n$, έπεται ότι το S είναι αριθμήσιμο.

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Να βρεθούν όλες οι ακέραιες (entire) μιγαδικές συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε*

$$f(z)^2 + g(z)^2 = 1 \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=13&t=13878

Λύση (Σεραφείμ Τσιπέλης) $f^2(z) + g^2(z) = 1 \Rightarrow$

$$(f(z) + i \cdot g(z))(f(z) - i \cdot g(z)) = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{f(z) + i \cdot g(z) \neq 0 \ \forall z \in C}$$

Επομένως υπάρχει ακέραια συνάρτηση $\theta(z)$ (αναλυτική στο C) ώστε $\boxed{f(z) + i \cdot g(z) = e^{\theta(z)}}$. Τότε

$$\frac{1}{f(z) + i \cdot g(z)} = \boxed{f(z) - i \cdot g(z) = e^{-\theta(z)}}.$$

Το σύστημα $\left\{ \begin{array}{c} f(z) + i \cdot g(z) = e^{\theta(z)} \\ f(z) - i \cdot g(z) = e^{-\theta(z)} \end{array} \right\}$ δίδει

$$f(z) = \frac{e^{\theta(z)} + e^{-\theta(z)}}{2} \quad g(z) = \frac{e^{\theta(z)} - e^{-\theta(z)}}{2i}$$

Θεωρώντας $\theta(z) = i \cdot \varphi(z)$ προκύπτει (το κομψότερο)

$$\boxed{f(z) = \cos(\varphi(z)) \quad g(z) = \sin(\varphi(z))}$$

με $\varphi(z)$ τυχαία ακέραια συνάρτηση.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η διχοτόμος BE της ορθής γωνίας B χωρίζεται από το κέντρο O του εγγεγραμμένου κύκλου σε λόγο* $\dfrac{BO}{OE} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$*. Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου.*

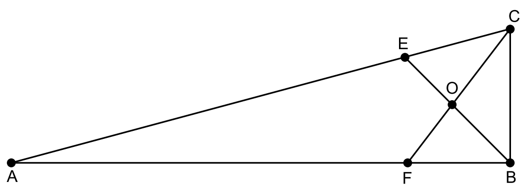
---

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=27&p=119266

Λύση (Κώστας Καπένης) Από θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου στα τρίγωνα $\triangle ABE, BEC$ θα ισχύουν:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{BO}{OE} = \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CE} = \frac{AB+BC}{AC}.$$

Άρα:



$$\sin\hat{C} + \cos\hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$
$$1 + \sin 2\hat{C} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\hat{C} = 15^0 \quad \text{και} \quad \hat{A} = 75^0$$

Λύση 2 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Ξεκινάμε από την ισότητα $(ABC) = (ABE) + (BEC)$. Προκύπτει

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot BE\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}BC \cdot BE\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα

$$\frac{BE}{\sqrt{2}} = \frac{AB \cdot BC}{AB+BC} \qquad (1).$$

Αν r είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC τότε $BO = \sqrt{2}r$ οπότε από την υπόθεση $EO = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}r$.

Επίσης $\dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{2}(AB + BC + CA)r$ οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{AB+BC+CA}{AB+BC}.$$

Άρα $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 1 + \dfrac{AC}{AB+BC}$. Τελικά λόγω του πυθαγορείου θεωρήματος

$AB^2 - 4AB \cdot BC + BC^2 = 0$ οπότε $\dfrac{AB}{BC} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Αν $\dfrac{AB}{BC} = 2 - \sqrt{3} = \tan 15^o$ τότε από τον νόμο των ημιτόνων $\dfrac{\sin C}{\sin A} = \tan 15^o$.

Άρα $C = 15^o$ και $A = 75^o$.

Αν $\dfrac{AB}{BC} = 2 + \sqrt{3} = \tan 75^o$ τότε βρίσκουμε πάλι τις ίδιες γωνίες με άλλη σειρά.

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτείνει ο Αναστάσιος Κοτρώνης) Ας υπολογισθεί η τιμή της παράστασης*

$$\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{11}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{111}{121}\right)\right).$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=23387

Λύση (Σεραφείμ Τσιπέλης)

$$\arctan(x) + \arctan(y) = z \Rightarrow$$
$$\tan z = \frac{x+y}{1-xy} \Rightarrow$$
$$z = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \tan(x) = z &\Rightarrow \\ \frac{1}{z} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &\Rightarrow \\ \arctan\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \arctan(z) &\Rightarrow \\ \arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \arctan(z) = \frac{\pi}{2}&. \end{aligned}$$

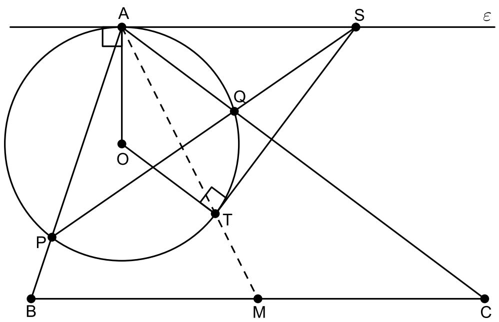
Τότε

$$\begin{aligned} &\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{11}\right) + \\ &\qquad \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{111}{121}\right) = \\ &\arctan\left(\frac{4}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + \arctan\left(\frac{1}{11}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \\ &\qquad \arctan\left(\frac{111}{121}\right) = \\ &\arctan\left(\frac{7}{9}\right) + \arctan\left(\frac{1}{11}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{111}{121}\right) = \\ &\arctan\left(\frac{43}{46}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{111}{121}\right) = \\ &\arctan\left(\frac{121}{111}\right) + \arctan\left(\frac{111}{121}\right) = \\ &\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \sin\Bigg(&\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) \\ &+ \arctan\left(\frac{1}{11}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) + \arctan\left(\frac{111}{121}\right)\Bigg) = 1. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο KARKAR) Ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή A τριγώνου ABC και είναι παράλληλη προς την βάση BC. Κύκλος (O) εφάπτεται της ευθείας στο A και τέμνει τις πλευρές AB, AC στα σημεία P, Q αντίστοιχα.*

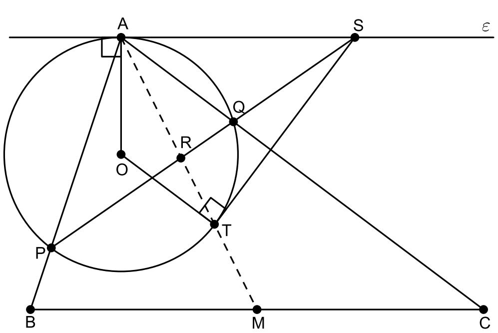


Η PQ τέμνει την ε στο σημείο S, από το οποίο φέρω το άλλο εφαπτόμενο τμήμα ST. Δείξτε ότι η AT διέρχεται από το μέσο M της BC.

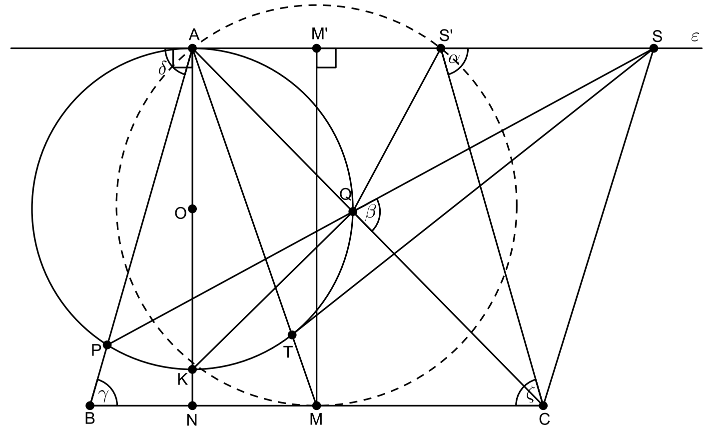
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=22297

Λύση 1 (Σωκράτης Λύρας) Το $AQTP$ είναι αρμονικό, άρα η AT είναι συμμετροδιάμεσος στο τρίγωνο AQP. Το τετράπλευρο $BPQC$ είναι εγγράψιμο(εύκολα με γωνίες) και άρα η BC είναι αντιπαράλληλος της PQ. Άρα η AT παιρνάει από το μέσον της BC.

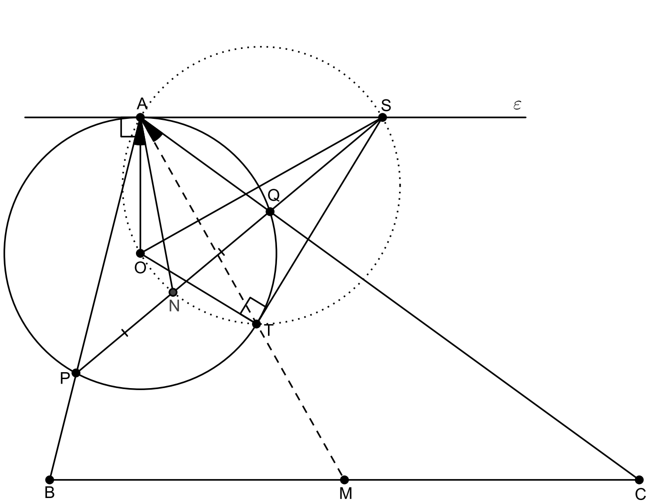
Λύση 2 (Παναγιώτης Γιαννόπουλος) AM πολική του S. Συνεπώς η χορδή PQ (που περιέχει το S) διαιρείται αρμονικά από το S και την πολική του. Επομένως η τετράδα-δέσμη $A.PRQS$ είναι αρμονική. Επειδή $BC//\epsilon$ έπεται ότι η BC διχοτομείται από την ακτίνα AT.



Λύση 3 (Φωτεινή Καλδή) Αντιστρέφουμε τα πάντα με πόλο A και λόγο $\lambda = AK \cdot AN = AP \cdot AB = AT \cdot AM = AQ \cdot AC$. Ο κύκλος (o) αντιστρέφεται στην ευθεία BC. Η εφαπτομένη ST αντιστρέφεται σε κύκλο διερχόμενο από τα A, M, S' ,(S' το αντίστροφο του S ,βρίσκεται πάνω στην AS) και θα εφάπτεται της BC στο σημείο M. Το S' είναι το συμμετρικό του A ως προς το M' όπου $MM' \perp AS$, οπότε $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ από το εγγράψιμο $PBCQ$, $\hat{\beta} = \hat{\alpha}$ από το εγγράψιμο $QCSS'$, $\hat{\zeta} = \hat{\alpha}$ από $(\varepsilon)//BC$, επομένως το $ABCS'$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ,με M' μέσο της AS', άρα το M θα είναι μέσο της BC.



Λύση 4 (Ανδρέας Βαρβεράκης) Αν N είναι το μέσο της PQ, αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{NAP} = \widehat{MAC}$, καθώς τα τρίγωνα ABC, APQ είναι όμοια. Τα σημεία S, A, O, N, T είναι ομοκυκλικά σε κύκλο διαμέτρου SO, επομένως $\widehat{SNA} = \widehat{STA} = \widehat{SAT}, \widehat{NPA} = \widehat{SAQ} \Rightarrow \widehat{NAP} = \widehat{MAC}$ (αφαιρώντας κατά μέλη).



ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Γιάννης Σταματογιάννης [Ποθητός Σταυρόπουλος]) Μεταβλητού τριγώνου ABC η κορυφή A παραμένει σταθερή, η γωνία BAC παραμένει σταθερή κατά μέγεθος και η πλευρά BC κινείται σε σταθερή ευθεία δ. Να αποδειχθεί ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC εφάπτεται σταθερού κύκλου.*

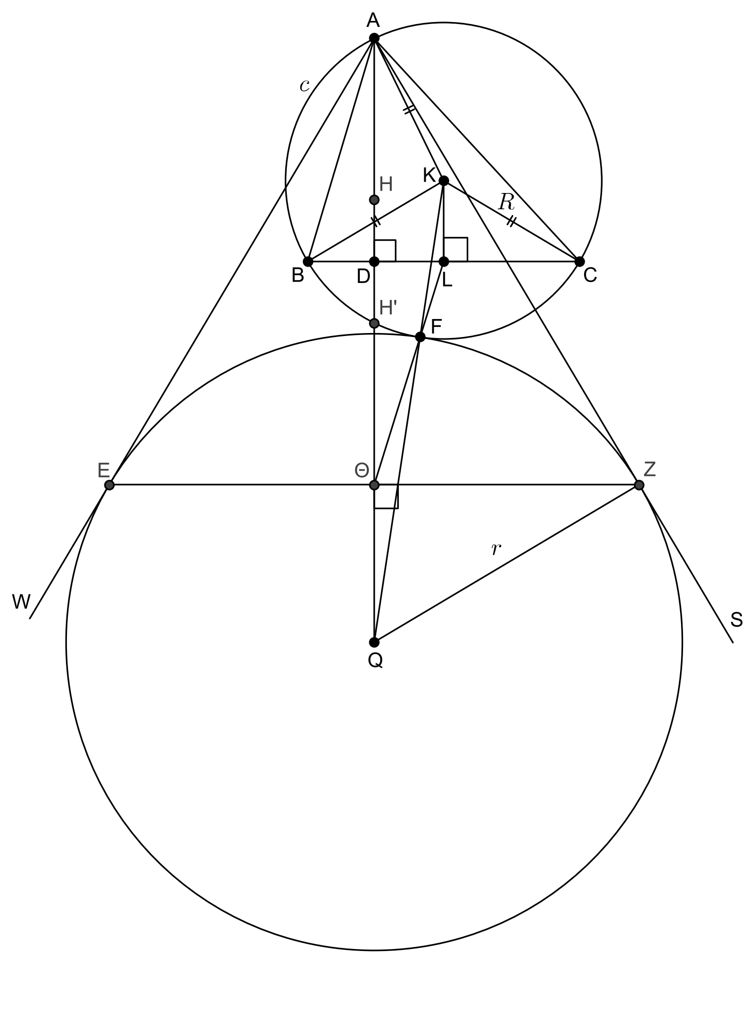
---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=22802

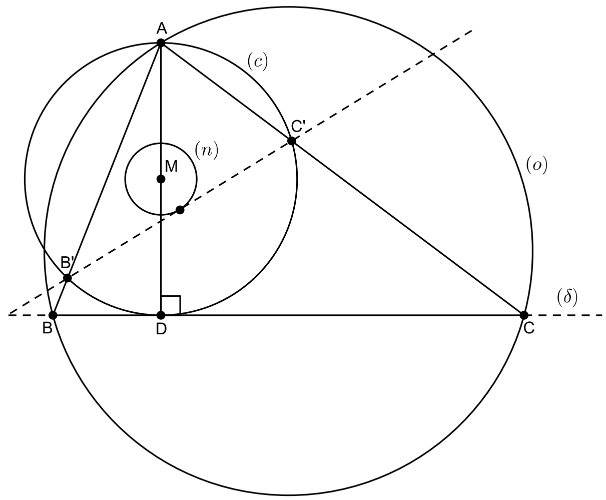
Λύση 1 (Σωτήρης Λουρίδας) Σύμφωνα με τα στοιχεία που βλέπει κανείς στο σχήμα μας, αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη δύο σταθερών p, c, ώστε $Q = (0, p)$, $KQ - KA = c(1)$.
Το ότι η γωνία $\angle BKC = 2\angle A$, παραμένει σταθερή οδηγεί στο γεγονός ότι το $\triangle\ KBC$ παραμένει όμοιο προς τον εαυτό του, γεγονός που με την σειρά του οδηγεί στην ύπαρξη σταθερής $\lambda > 1$,
$KA = \lambda y_0 \Rightarrow x_0^2 = \lambda^2 y_0^2 - y_0^2 - \alpha^2 + 2\alpha y_0(2)$. Από την (1) προκύπτει η $\sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2} = \lambda y_0 + c$ και από την (2) προκύπτει η $2y_0(\alpha - p - \lambda c) = c^2 + \alpha^2 - p^2$. Θεωρούμε το σύστημα $\alpha - \lambda c = p, c^2 + \alpha^2 = p^2$
με λύση $c = \dfrac{2\alpha\lambda}{\lambda^2 - 1} > 0, p = \dfrac{\alpha\left(\lambda^2 + 1\right)}{1 - \lambda^2} < 0$. Να λοιπόν ο κύκλος μας, είναι ο $\left(Q, \dfrac{2\alpha\lambda}{\lambda^2 - 1}\right)$.

Λύση 2 (Σωτήρης Λουρίδας) Η κατασκευαστική ύπαρξη κύκλου εφαπτόμενου στις εφαπτόμενες AW, AS, όπου $\angle BAC = \angle AEZ = \angle AZE$ (βλέπε σχήμα), και στον κύκλο c είναι σαφής, ας πούμε σαν Απολλώνια κατασκευή. Είναι επίσης σαφές ότι από την ισότητα: $\angle BAC = \angle AEZ = \angle AZE$ προκύπτει η ομοιότητα των τετραπλεύρων $KBFC, QZFE$. Έτσι έχουμε και το «συνευθειακό» των σημείων L, F, Θ.
Μετά ταύτα λαμβάνουμε $Q\Theta \cdot QA = r^2$ και $QH' \cdot QA = KQ^2 - R^2 = 2Rr + r^2$, οπότε $\dfrac{QH'}{Q\Theta} = \dfrac{2Rr + r^2}{r^2}$ και $\dfrac{\Theta H'}{Q\Theta} = \dfrac{2R}{r}$.

Αλλά $\dfrac{\Theta Q}{r} = \dfrac{KL}{R} = \dfrac{AH}{2R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{\Theta H'}{r} = \dfrac{AH}{2R} \cdot \dfrac{2R}{r} \Rightarrow \Theta H' = AH \Rightarrow \Theta D = AD$, με *με* $\angle\Theta QZ = \angle A$, ct, οπότε Q κατασκευαστικά σταθερό σημείο. Το μήκος της ακτίνας του κύκλου μας θα είναι επίσης σταθερό, αφού $r^2 = Q\Theta \cdot QA$.



Λύση 3 (Φωτεινή Καλδή) Φέρουμε το ύψος AD και αντιστρέφουμε με πόλο A και λόγο $\lambda = AD^2$ η ευθεία (δ) αντιστρέφεται σε κύκλο (c) διαμέτρου AD B', C' τα αντίστροφα των B, C αντίστοιχα.



Ο κύκλος $(o) \equiv (ABC)$ αντιστρέφεται στη $B'C'$. Αφού η γωνία $\hat{A}$ είναι σταθερού μεγέθους ,τότε η χορδή $B'C'$ είναι σταθερού μήκους και θα εφάπτεται σε κύκλο (n) ομόκεντρο κι εσωτερικό του (c). Άρα και τα αντίστροφα τους (των $B'C'$ και (n)) θα εφάπτονται, επομένως οι περιγεγραμμένοι κύκλοι (ABC) θα εφάπτονται στον αντίστροφο κύκλο (n') του (n).

Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση :*

$$\left|z+\frac{1}{z}\right| = \left|z^2+\frac{1}{z^2}\right| = 2$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=24667

Λύση 1 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Από την $|z+\frac{1}{z}| = 2$ βρίσκουμε $|z^2+\frac{1}{z^2}+2| = 4$. Θέτουμε $w = z^2+\frac{1}{z^2}$. Τότε $|w+2| = 4$ και $|w| = 2$.
Πρόκειται για δύο κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά οπότε εύκολα $w = 2$ και έτσι $z^2 = 1$. Άρα $z = 1$ ή $z = -1$.
Λύση 2 (Νίκος Ζανταρίδης) Έχουμε

$$\left|z+\frac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{z}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow \left|z^2+\frac{1}{z^2}+2\right| = 4 : (1)$$

και

$$\left|z^2+\frac{1}{z^2}\right| = 2 : (2)$$

Θέτω

$$z^2+\frac{1}{z^2} = x+yi, (x,y\in R)$$

Έχουμε

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4 : (3)$$

Ακόμη έχουμε

$$(1) \Leftrightarrow |(x+2)+yi| = 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 4 \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2 = 16 : (4)$$

Το σύστημα των (3) και (4) έχει μοναδική λύση $(x,y) = (2,0)$. Έτσι έχουμε

$$z^2+\frac{1}{z^2} = 2 \Leftrightarrow z^4-2z^2+1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(z^2-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (z = 1 \vee z = -1)$$

Λύση 3 (Νικος Αντωνόπουλος) Αν θέσουμε

$$z+\frac{1}{z} = w$$

η εξίσωση γίνεται

$$|w| = |w^2-2| = 2$$

οπότε

$$2 = \frac{w\overline{w}}{2}$$

και

$$|w^2-2| = 2 \Leftrightarrow |w^2-\frac{w\overline{w}}{2}| = 2 \Leftrightarrow |2w-\overline{w}| = 2$$

Αν τώρα πούμε $w = x+yi$ τότε από τις $|w| = 2$ και $|2w-\overline{w}| = 2$ βρίσκουμε $w = 2$ ή $w = -2$ ($x = \pm 2$ και $y = 0$). Εύκολα πλέον προκύπτουν τα αποτελέσματα.

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, $n-$ βαθμού με απλές ρίζες $x_1, x_2, ..., x_n$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = 0$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=60&t=22338

Λύση 1 (Στράτης Αντωνέας) Υποθέτουμε ότι $a_n = 1$, διαφορετικά μπορούμε να δουλέψουμε με το πολυώνυμο $Q(x) = \frac{1}{a_n}P(x)$.

$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{n-1})(x-x_n)$
$P'(x) = (x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{n-1})(x-x_n)$
$+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_{n-1})(x-x_n)$
...
$+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{n-2})(x-x_n)$
$+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{n-1})$

$P''(x) = (x-x_3)...(x-x_{n-1})(x-x_n)+(x-x_2)(x-x_4)...(x-x_{n-1})(x-x_n)+...+(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{n-2})(x-x_n)+(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_{n-1})$
$+(x-x_3)...(x-x_{n-1})(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_4)...(x-x_{n-1})(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_{n-2})(x-x_n)+...+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_{n-1})$
...
$+(x-x_2)...(x-x_{n-2})(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_{n-2})(x-x_n)+..+(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-3})(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-2})$
$+(x-x_2)...(x-x_{n-1})+(x-x_1)(x-x_3)...(x-x_{n-1})+...+(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n-2})$

Είναι: $P'(x_i) = (x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)$

και $P''(x_i) = 2(x_i - x_2)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n) +$ ...+ $2(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)+$
$2(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+2})...(x_i - x_n)$ + ...+ $2(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_{n-1})$

Οπότε:

$$\frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} =$$

$$2\left(\frac{1}{x_i - x_1} + ... + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + ... + \frac{1}{x_i - x_n}\right)$$

Άρα:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = 2\left(\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_3} + ... + \frac{1}{x_1 - x_n}\right) +$$

$$2\left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_2 - x_3} + ... + \frac{1}{x_2 - x_n}\right) + ...$$

$$+2\left(\frac{1}{x_n - x_1} + \frac{1}{x_n - x_2} + ... + \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\right) = 0$$

Λύση 2 (Ροδόλφος Μπόρης) Αφού το πολυώνυμο έχει απλές όλες του τις ρίζες δεν έχει κοινή ρίζα με την παράγωγό του

Έχουμε $(\frac{p'}{p}) = \frac{1}{x - r_1} + ... + \frac{1}{x - r_n} = S, \forall x \neq r_1, ..., r_n$

άρα $(\frac{p}{p'}) = \frac{1}{S}, \forall x \neq u_1, ..., u_{n-1}$ όπου $u_1, ..., u_{n-1}$ όλες οι ρίζες του p' (απλές)

τότε παραγωγίζοντας είναι

$$\frac{(p')^2 - p'p''}{(p')^2} = \frac{-S'}{S^2} \Rightarrow \frac{p''}{p'} = 1 + \frac{S'}{S^2}, \forall x \neq u_1, ..., u_{n-1}$$

άρα

$$\frac{p''}{p'} = \frac{(\frac{1}{x-r_1} + ... + \frac{1}{x-r_n})^2 - (\frac{1}{(x-r_1)^2} + ... + \frac{1}{(x-r_n)^2}}{(\frac{1}{x-r_1} + ... + \frac{1}{x-r_n})^2} =$$

$$2\frac{\sum_{i\neq j}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}}{(\frac{1}{x-r_1} + ... + \frac{1}{x-r_n})^2}$$

και τελειώνουμε όπως ο Στράτης

$$\frac{P''(r_i)}{P'(r_i)} =$$

$$2\left(\frac{1}{r_i - r_1} + ... + \frac{1}{r_i - r_{i-1}} + \frac{1}{r_i - r_{i+1}} + ... + \frac{1}{r_i - r_n}\right)$$

...