Άσκηση 1

Να κάνετε τις πράξεις ώστε να απλοποιηθούν οι αριθμοί:

$$A = \frac{35}{\sqrt{49}} + 11^0 - 8^2 \qquad B = 2 - \frac{7}{2^3} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad \Gamma = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\Delta = \left(3\Big(4 - 2(3-6) + 4\Big) - 3\right) \qquad E = \sqrt{(\sqrt{47} - \sqrt{22})(\sqrt{47} - \sqrt{22})}$$

Άσκηση 2

Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{(ab)^2 \cdot b^{-1} \cdot (a^2b)^{-3}}{a^2b^{-2} \cdot (b^5a)^{-1} \cdot a \cdot (a^2ba)^{-2}}$$

Άσκηση 3

Αν

$$\Pi = \frac{ab^{-2} \cdot (a^{-1}b^2)^4 \cdot (ab^{-1})^2}{a^{-2}b \cdot (a^2b^{-1})^3 \cdot a^{-1}b}$$

και $a = 10^{-3}, b = 10^{-2}$ να αποδείξετε ότι $\Pi = 100$.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2011 \cdot \Big[(-1)^{2002} + (-1)^{2003}\Big]^{2010} - \Big[(-2)^{-3}\Big]^2 + \frac{1}{(-8)^2}$$

Άσκηση 5

Αν $a + b + c = 1997$ και $b + 2c = 15$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A = a + 2b + 3c$.

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι

$$\left(2+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{3+\frac{4}{5}}-\frac{1+\frac{2}{3}}{2+\frac{1}{2}}\right):\left(1+\frac{77}{228}\right)=5$$

Άσκηση 7

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-1}{\frac{2^2}{3^2}+\frac{2}{3}+1}=\frac{2-3}{1+\frac{3}{2}}\cdot\frac{1+\frac{2^3}{3^3}}{\frac{2^2}{3}-\frac{3^2}{2}}$$

Άσκηση 8

Πάρτε έναν οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό. Πολλαπλασιάστε τον με τον μεθεπόμενο του. Τότε το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι πάντα κατά ένα λιγότερο από το τετράγωνο του αριθμού που βρίσκεται ανάμεσα τους. Παράδειγμα: $4\cdot 6=24$ και $5\cdot 5=25$. Κάντε μερικά δικά σας παραδείγματα για να πειστείτε. Αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει για οποιαδήποτε τριάδα διαδοχικών αριθμών.

Άσκηση 9

Πάρτε τέσσερις οποιουσδήποτε διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς. Πολλαπλασιάστε τον πρώτο με τον τελευταίο. Τότε το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι πάντα κατά δύο λιγότερο από το γινόμενο των δύο μεσαίων αριθμών. Παράδειγμα: $7\cdot 10=70$ και $8\cdot 9=72$. Κάντε μερικά δικά σας παραδείγματα για να σιγουρευτείτε. Αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει για οποιαδήποτε τετράδα διαδοχικών αριθμών.

Άσκηση 10

Ένας μαθητής καθώς έπαιζε με τους αριθμούς έγραψε

$$30=2\cdot 15=\frac{6}{3}\cdot 15=\frac{4+2}{3}\cdot 15=4+2\cdot\frac{15}{3}=4+2\cdot 5=4+10=14$$

δηλαδή βρήκε $30=14$. Τι πήγε στραβά ?

Άσκηση 11

Να υπολογίσετε τους αριθμούς

$$A = 1004 + 1005 \cdot 1004 - 1006 \cdot 1003$$

$$B = 1004^3 - 1004^2 \cdot 1003 - 1004 \cdot 1003 - 1004$$

Αντί να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς σκεφτείτε ότι $1005 = 1004 + 1$ και παρόμοια τα $1006, 1003$.

Άσκηση 12*

Να απλοποιήσετε τους αριθμούς

$$A = 317 \cdot 5172 \cdot 0 \cdot 5 \cdot 6189 \cdot 35$$

$$B = (-1)^{2011} \qquad \Gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} \cdot 100$$

$$\Delta = \frac{2^{500}}{4^{250}} \qquad E = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + ... + 499 + 500}{2 + 4 + 6 + 8 + ... + 998 + 1000}$$

Σημείωση: Και τα πέντε θέλουν σκέψη αλλά χρειάζονται μόνο απλές ιδιότητες που ξέρετε.

Άσκηση 13

Να βρείτε το πρόσημο του παρακάτω αριθμού

$$\frac{(-2)(-4)(-6) \cdot ... \cdot (-2010)}{(-1)(-3)(-5) \cdot ... \cdot (-2009)(-2011)}$$

Άσκηση 14

Σε τι ψηφίο τελειώνει ο αριθμός $B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$?

Μπορείτε να το βρείτε χωρίς να κάνετε όλους αυτούς τους πολλαπλασιασμούς.

Άσκηση 15

Βρείτε τον επόμενο αριθμό (δηλαδή βρείτε με ποιά λογική φτιάχνονται οι αριθμοί) στα παρακάτω

$$1, 2, 3, 4, 5, ...$$

$$3, 6, 9, 12, 15, ...$$

$$3, 1, -1, -3, -5, ...$$

$$1, 4, 9, 16, 25, ...$$

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, ...$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

$$2, 4, 7, 11, 16, 22, ...$$

$$1, 2, 6, 42, 1806, ...$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$$

Να εξηγείσετε τη λογική σας. Η δυσκολία αυξάνει με τη σειρά. Το τελευταίο είναι πολύ δύσκολο να το βρείτε. Παρόλαυτα αυτοί είναι οι πιο σημαντικοί και οι πιο όμορφοι αριθμοί σε όλα τα μαθηματικά.

Άσκηση 16*

Οι ζυγοί αριθμοί ονομάζονται και άρτιοι ενώ οι μονοί αριθμοί ονομάζονται περιττοί. Αυτό το όνομα τους έχει δωθεί διότι όταν κάνουμε τη διαίρεση ενός ζυγού με το 2 δεν περισσεύει υπόλοιπο ενώ αν κάνουμε τη διαίρεση ενός μονού με το 2 περισσεύει υπόλοιπο 1. Παρατηρείστε με διάφορα παραδείγματα ότι άρτιος συν άρτιο δίνει άρτιο. Επίσης περιττός συν περιττό δίνει άρτιο και περιττός συν άρτιο δίνει περιττό. Προσπαθείστε να αποδείξετε ότι αυτά τα τρία συμβαίνουν πάντα.

Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να παραστήσετε κάπως τον τυχαίο άρτιο και κάπως αλλιώς τον τυχαίο περιττό. Αφού οι άρτιοι διαιρούνται με το 2 σημαίνει ότι έχουν τη μορφή 2κ όπου κ ακέραιος. Με παρόμοιο τρόπο βρείτε τη μορφή που έχουν οι περιττοί.

Άσκηση 17*

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο ρητών αριθμών είναι ρητός αριθμός.

Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι ρητοί αριθμοί είναι τα κλάσματα. Άρα όταν έχουμε ένα ρητό αριθμό ρ τότε υπάρχουν ακέραιοι κ, λ με $\lambda \neq 0$ τέτοιοι ώστε $\rho = \frac{\kappa}{\lambda}$.

Άσκηση 18**

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε οι αριθμοί x^7 και x^{12} να είναι ρητοί. Να αποδείξετε ότι και ο αριθμός x είναι ρητός.

Άσκηση 19**

Έστω x, y, z πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε οι αριθμοί xy, yz, zx να είναι ρητοί. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^2 + y^2 + z^2$ είναι ρητός.

Άσκηση 20**

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ρητού και άρρητου είναι άρρητος. Επίσης να αποδείξετε ότι το γινόμενο ρητού και άρρητου είναι άρρητος (εκτός αν ο ρητός είναι το 0). Δείξτε επίσης ότι το άθροισμα και το γινόμενο δύο άρρητων αριθμών άλλοτε είναι άρρητος και άλλοτε ρητός. Χρησιμοποιήστε αν το χρειαστείτε ότι το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.

Άσκηση 21*

Ο διευθυντής ενός γυμνασίου μάζεψε 25 μαθητές συνολικά από τις τρεις τάξεις του σχολείου για να συμμετάσχουν στην χορωδία. Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον 9 μαθητές από αυτούς βρίσκονται στην ίδια τάξη.

Υπόδειξη: Απλή λογική. Τι θα συνέβαινε αν δεν ήταν αλήθεια το ζητούμενο ?

Άσκηση 22

Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α και ταξιδεύει 5 μίλια νότια, στη συνέχεια 6 μίλια ανατολικά, ξανά 3 μίλια νότια και αγκυροβολεί στο λιμάνι Β. Πόσα μίλια απέχει το λιμάνι Α από το λιμάνι Β ?

Άσκηση 23*

Δίνεται ένα τυχαίο τρίγωνο. Δείξτε ότι είναι δυνατό να καλυφθεί ολόκληρο το επίπεδο από απείρως πολλά τρίγωνα ίδια με το δοσμένο, έτσι ώστε οποιαδήποτε δύο τέτοια τρίγωνα να μην επικαλύπτονται.

Άσκηση 24

Τρεις άνθρωποι, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Νίκος είχαν μια συνομιλία. Ο Βασίλης λέει ότι ο Γιώργος ψεύδεται. Ο Γιώργος λέει ότι ο Νίκος ψεύδεται. Ο Νίκος λέει ότι και ο Βασίλης και ο Νίκος ψεύδονται. Ποιός ψεύδεται και ποιός λέει την αλήθεια ?

Άσκηση 25

Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $N = 12345678910111213...201020112012$?

Άσκηση 26

Σε ένα νησί ζουν δύο είδη ανθρώπων, αυτοί που λένε πάντα την αλήθεια και αυτοί που λένε πάντα ψέματα. Μόλις ρωτήσαμε πέντε από αυτούς, οι οποίοι ήξεραν ο ένας τον άλλον: Πόσοι από σας λένε την αλήθεια? Πήραμε τις ακόλουθες απαντήσεις: $0, 1, 2, 3, 4$. Πόσοι από αυτούς ήταν ψεύτες?

Άσκηση 27

Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

Άσκηση 28

Η Μαρία σκέφτηκε δύο αριθμούς ϕ και ω, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις $\phi + \omega = 15$ και $2\phi + 3\omega = 40$. Η φίλη της Μαρίας , η Ιωάννα, υποστηρίζει πως για αυτούς τους δύο αριθμούς ισχύει επιπλέον ότι $\phi^2 - \omega = 5$. Έχει δίκιο η

Ιωάννα ?

Άσκηση 29

Με τη βοήθεια μιας κλεψύδρας 5 λεπτών και μίας 7 λεπτών να μετρήσετε χρόνο 9 λεπτών.

Άσκηση 30

Αν στο εμβαδόν ενός τετραγώνου προσθέσουμε 4 προκύπτει η περίμετρος του. Πόσο μήκος έχει η πλευρά του ?

Άσκηση 31*

Σε 14 κουτιά υπάρχουν 25 σοκολάτες και είναι γνωστό ότι κάθε κουτί περιέχει 1 ή 2 ή 3 σοκολάτες. Ακόμα γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των κουτιών με μια σοκολάτα είναι μεγαλύτερος του 6 και ότι ο αριθμός των σοκολατών στα κουτιά με 2 ή 3 σοκολάτες είναι μεγαλύτερος από 17. Να προσδιορίσετε πόσα κουτιά περιέχουν μία, δύο ή τρεις σοκολάτες.

Άσκηση 32

Να γράψετε με σύμβολα τις παρακάτω φράσεις:

α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5.
β) Το άθροισμα των τετραγώνων τριών αριθμών.
γ) Το εξαπλάσιο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνου του μειωμένο κατά 7.
δ) Το τετράγωνο του γινόμενου δύο αριθμών.
ε) Το πηλίκο των τετραγώνων δύο αριθμών είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών αυτών.
ζ) Ένας αρνητικός αριθμός.
η) Το άθροισμα των ριζών δύο αριθμών.
θ) Η ρίζα του αθροίσματος δύο αριθμών.

Άσκηση 33**

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\Big(x(x-1)\Big)^2 + \Big((x+1)(x-1)\Big)^2 = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 = 0$.

Υπόδειξη: Παραγοντοποίηση ή χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη σχέση $a^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό a.

Άσκηση 34***

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha - 4\beta + 6\gamma + 14 = 0$$

Άσκηση 35

Με 42 λουλούδια η Γεωργία έφτιαξε 7 ανθοδέσμες. Θέλει να φτιάξει 9 ακόμη ανθοδέσμες, ίδιες με τις προηγούμενες, αλλά έχει μόνο 22 λουλούδια. Πόσα λουλούδια της λείπουν ?

Άσκηση 36

Για να παρακολουθήσουν μια θεατρική παράσταση 3 γονείς με τα 4 παιδιά τους, πλήρωσαν συνολικά 62 ευρώ. Ενώ άλλοι 3 γονείς με τα 5 παιδιά τους, πλήρωσαν συνολικά 70 ευρώ. Πόσο κοστίζει το εισιτήριο για το κάθε παιδί και πόσο για τον κάθε γονέα ?

Άσκηση 37

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ε σημείο πάνω στην πλευρά ΑΒ. Δίνεται ότι το τρίγωνο ΑΕΔ έχει εμβαδόν 12 και το τρίγωνο ΔΕΓ έχει εμβαδόν 35. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΓ.