Δίνονται οι μιγαδικοί z , w για τους οποίους ισχύει

$|z| = |w| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |z - w|$ (1). Να δείξετε ότι $z^2 + w^2 = 0$

Λύση

1^{ος} τρόπος

Αν z = w τότε λόγω της (1) , z = w = 0 και η ισότητα είναι προφανής.
Έστω $z \neq w$ και ας θεωρήσουμε ΟΑΒ το παρ/μμο που σχηματίζεται από τις εικόνες των Ο , A(z) , B(w)

Είναι $|z - w|^2 = \left(\sqrt{2}\,|z|\right)^2$ και $|z - w|^2 = \left(\sqrt{2}\,|w|\right)^2$ επομένως

$2 \cdot |z - w|^2 = 2 \cdot |z|^2 + 2 \cdot |w|^2 \Rightarrow |z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2$

*** στο τέλος μία λύση όχι σχολική

Είναι :

$$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \Rightarrow (z - w)\left(\bar{z} - \bar{w}\right) = z\bar{z} + w\bar{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\bar{z} + w\bar{w} - z\bar{w} - w\bar{z} = z\bar{z} + w\bar{w} \Rightarrow z\bar{w} + w\bar{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z}{w} = -\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

από όπου παίρνουμε : $\frac{z}{w} \in I$ δηλ. $\frac{z}{w} = c \cdot i \Rightarrow z = c \cdot i \cdot w$ όπου c πραγματικός .

Όμως $|z| = |w|$ άρα $|z| = |c \cdot i \cdot w| \Rightarrow |z| = |c| \cdot 1 \cdot |z| \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = \pm 1$

Έτσι αν z = i w έχουμε $z^2 + w^2 = (iw)^2 + w^2 = -w^2 + w^2 = 0$

αν z = - i w έχουμε $z^2 + w^2 = (-iw)^2 + w^2 = -w^2 + w^2 = 0$

2^{ος} τρόπος

Έστω $z \neq w$ και ας θεωρήσουμε ΟΑΒΓ το παρ/μμο που σχηματίζεται από τις εικόνες των Ο , A(z) , B(w) , Γ(z + w)

Είναι ΟΑ = ΟΒ αφού $|z| = |w|$, άρα το ΟΑΒΓ είναι ρόμβος .

Αν Κ το κέντρο του ΟΑΒΓ θα είναι

$$\frac{(AK)}{(OA)}=\eta\mu\omega \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot|z-w|}{|z|}=\frac{\sqrt{2}\cdot|z|}{2\cdot|z|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

δηλ. $\omega=45^0$ οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές δηλ. το ΟΑΒΓ είναι τετράγωνο

*** στο τέλος μία λύση όχι σχολική

Επομένως οι διαγώνιοι είναι ίσοι δηλ. ΑΒ = ΟΓ άρα $|z-w|=|z+w|$

Υψώνοντας στο τετράγωνο προκύπτει

$$|z-w|^2=|z+w|^2 \Rightarrow (z-w)\left(\bar{z}-\bar{w}\right)=(z+w)\left(\bar{z}+\bar{w}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\bar{z}+w\bar{w}-z\bar{w}-w\bar{z}=z\bar{z}+w\bar{w}+z\bar{w}+w\bar{z}\Rightarrow 2\left(z\bar{w}+w\bar{z}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\bar{w}+w\bar{z}=0\Rightarrow \frac{z}{w}=-\frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

από όπου παίρνουμε : $\frac{z}{w}\in I$ δηλ. $\frac{z}{w}=c\cdot i\Rightarrow z=c\cdot i\cdot w$ όπου c πραγματικός .

Όμως $|z|=|w|$ άρα $|z|=|c\cdot i\cdot w|\Rightarrow |z|=|c|\cdot 1\cdot |z|\Rightarrow |c|=1\Rightarrow c=\pm 1$

Έτσι αν z = i w έχουμε $z^2+w^2=(iw)^2+w^2=-w^2+w^2=0$

αν z = - i w έχουμε $z^2+w^2=(-iw)^2+w^2=-w^2+w^2=0$

***

Σε αυτό το σημείο η άσκηση θα μπορούσε να τελειώσει με μία λύση όχι σχολική : Η παραπάνω ισότητα σημαίνει ότι η γωνία ΑΟΒ είναι ορθή , άρα ο w προκύπτει από το z με στροφή κατά 90^0 ή -90^0 οπότε αφού έχουν ίσα μέτρα θα είναι w = i z ή w = - i z .

Σε κάθε περίπτωση με αντικατάσταση είναι $z^2+w^2=0$

Λεωνίδας Θαρραλίδης - Χρήστος Καρδάσης