Δίνονται οι μιγαδικοί z , w για τους οποίους ισχύει $|\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{w}| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{w}|$, να δείξετε ότι $\boldsymbol{z^2 + w^2 = 0}$

Λύση 1

Αν τουλάχιστον ένας από τους z , w είναι μηδέν (άρα τελικά και οι δύο αφού έχουν το ίδιο μέτρο) η άσκηση είναι τετριμμένη και προφανώς ισχύει το ζητούμενο.

Για $z \neq 0 \neq w$ και δεδομένου ότι και $|z| = |w| \neq 0$ έχουμε

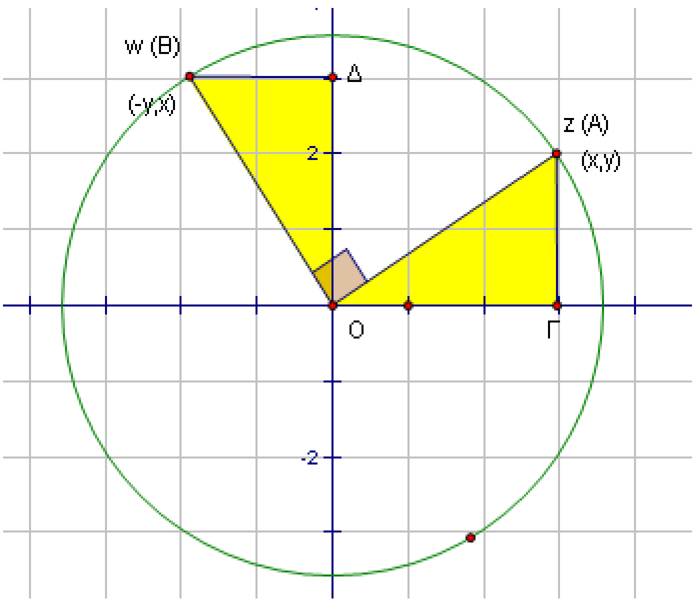
$$|z| = |w| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z - w| = r \ \rightarrow |z|^2 = |w|^2 = \frac{1}{2}|z - w|^2 = r^2 \ \rightarrow$$

$$\boldsymbol{|z|^2 + |w|^2 = |z - w|^2} \quad (1) \ \rightarrow$$

$$z\bar{z} + w\bar{w} = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \rightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0 \ \rightarrow z\frac{r^2}{w} + \frac{r^2}{z}w = 0 \ \rightarrow \quad r^2\left(\frac{z}{w} + \frac{w}{z}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{z}{w} + \frac{w}{z} = 0 \ \rightarrow \quad \frac{z^2 + w^2}{z\,w} = 0 \ \rightarrow \ z^2 + w^2 = 0 \quad o\varepsilon\delta$$

Λύση 2 για $z \neq 0 \neq w$



Στην προηγούμενη απόδειξη η σχέση (1) εκφράζει το πυθαγόρειο θεώρημα με υποτείνουσα την πλευρά μέτρου $|z - w|$. Συνεπώς αν A και B είναι οι εικόνες των z και w αντιστοίχως και O η αρχή των αξόνων τότε γωνΒΟΑ=90^o . Για τις συντεταγμένες των εικόνων των z , w ισχύει ότι αν z(A)(x,y) τότε w(B)(-y,x) ή αν $z = x + yi$ τότε $w = -y + xi$. *(όπως εύκολα συμπεραίνεται από το διπλανό σχήμα από την ισότητα των τριγώνων)*

Είναι όμως

$$z^2 + w^2 = (x + yi)^2 + \ (-y + xi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi + y^2 - x^2 - 2xyi = 0 \qquad o\varepsilon\delta$$

Λύση 3 για $z \neq 0 \neq w$

(Διατηρώντας την ίδια ονοματολογία)

Είναι $|z| = |w|$ από υπόθεση και από (1) -- > γων(ΒΟΑ)=90^o

γων(ΒΟΑ)=90^o άρα μπορούμε να θεωρήσουμ ε ότι οι φορείς των διανυσμάτων ΟΑ,ΟΒ ορίζουν νέο σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο προφανώς εξακολουθεί να ισχύει $|z| = |w|$. Έστω $|z| = |w| = \rho > 0$ Τότε η εικόνα του ενός έστω z(A) θα βρίσκεται πάνω στον άξονα των πραγματικών και ο z θα είναι ο ρ ή - ρ ενώ η εικόνα του w θα βρίσκεται επί του άξονα των φανταστικών συνεπώς w=ρi ή w=-ρi. Σε κάθε περίπτωση όμως είναι

$$z^2 + w^2 = (\pm\rho)^2 + (\pm\rho i)^2 = \rho^2 - \rho^2 = 0 \ \ o\varepsilon\delta$$

Λύση 4 για $z \neq 0 \neq w$

$$(1) \to |z|^2 + |w|^2 = |z-w|^2 \xrightarrow{\div|z|^2} \left|\frac{z}{z}\right|^2 + \left|\frac{w}{z}\right|^2 = \left|\frac{z-w}{z}\right|^2 \to 1^2 + \left|\frac{w}{z}\right|^2 = \left|1 - \frac{w}{z}\right|^2$$

Η τελευταία όμως είναι το πυθαγόρειο θεώρημα για το τρίγωνο που έχει κάθετες πλευρές τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών 1 με εικόνα (Α) και $\frac{w}{z}$ με εικόνα (Β). Επειδή 1 πραγματικός και ΑΟΒ=90^o έπεται ότι $\frac{w}{z}$ βρίσκεται στον άξονα των φανταστικών άρα $\frac{w}{z}$ φανταστικός .

Επομένως

$$\frac{w}{z} = ci\,, c \in R \quad \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta} \quad \left|\frac{w}{z}\right| = 1 \ \to |ci| = 1 \to c = \pm 1 \to c^2 = 1$$

Συνεπώς

$$\frac{w}{z} = ci \to \frac{w^2}{z^2} = c^2 i^2 \to \frac{w^2}{z^2} = 1(-1) \to w^2 = -z^2 \to w^2 + z^2 = 0 \qquad o\varepsilon\delta$$

Γιαννόπουλος Παν

10/8/2009