Α. Έστω η συνάρτηση $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{\mathbf{x}}+\mathbf{x}-1,\mathbf{x}\in\mathbf{R}$

i. Να δείξετε ότι αντιστρέφεται

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g

Β. Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{R}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{e}^{\mathbf{f}(\mathbf{x})}+\mathbf{f}(\mathbf{x})\geq\mathbf{x}+1,\forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}.$$

Αν η $\mathbf{g}^{-1}$ είναι συνεχής στο R, τότε να δείξετε ότι

i. η $\mathbf{g}^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii. $\displaystyle\int_0^{\mathbf{e}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\geq\frac{3}{2}$

ΛΥΣΗ

Α.

i. Είναι $\mathbf{g}'(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{\mathbf{x}}+1>0,\forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}$, συνεπώς είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1 δηλαδή αντιστρέψιμη.

ii. Η g είναι συνεχής στο R, ως άθροισμα εκθετικής και πολυωνυμικής.

$$\lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\mathbf{g}(\mathbf{x})=\lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}+\mathbf{x}-1\right)=0+(-\infty)-1=-\infty$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\mathbf{g}(\mathbf{x})=\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{x}}+\mathbf{x}-1\right)=+\infty+(+\infty)-1=+\infty$$

Συνεπώς $\mathbf{g}(\mathbf{R})\overset{\mathbf{g}\uparrow}{=}\left(\lim_{\mathbf{x}\to-\infty}\mathbf{g}(\mathbf{x}),\lim_{\mathbf{x}\to+\infty}\mathbf{g}(\mathbf{x})\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$

Β.

i. Για κάθε $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in\mathbf{g}(\mathbf{R})=\mathbf{R}$ με $\mathbf{y}_1<\mathbf{y}_2$

είναι $\mathbf{y}_1=\mathbf{g}(\mathbf{x}_1)\Leftrightarrow\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}_1)=\mathbf{x}_1$ και

$\mathbf{y}_2=\mathbf{g}(\mathbf{x}_2)\Leftrightarrow\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}_2)=\mathbf{x}_2$

Άρα

$$\mathbf{y}_1<\mathbf{y}_2\Leftrightarrow\mathbf{g}(\mathbf{x}_1)<\mathbf{g}(\mathbf{x}_2)\overset{\mathbf{g}\uparrow}{\Leftrightarrow}\mathbf{x}_1<\mathbf{x}_2\Rightarrow\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}_1)<\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}_2)$$

Οπότε η $\mathbf{g}^{-1}$ είναι γνησίως αύξουσα

ii. $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{e}^{\mathbf{x}}+\mathbf{x}-1\Rightarrow\begin{matrix}\mathbf{g}(0)=0\\\mathbf{g}(1)=\mathbf{e}\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\mathbf{g}^{-1}(0)=0\\\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{e})=1\end{matrix},(1)$

Ισχύει

$$e^{f(x)}+f(x)\geq x+1,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}+f(x)-1\geq x,\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$$

$$g(f(x))\geq x,\forall x\in\mathbf{R}\overset{g^{-1}\uparrow Rg}{\Leftrightarrow}$$

$$g^{-1}(g(f(x)))\geq g^{-1}(x),\forall x\in\mathbf{R}\Leftrightarrow$$

$$f(x)\geq g^{-1}(x),\forall x\in\mathbf{R}$$

Η διαφορά $f(x)-g^{-1}(x)$ είναι συνεχής στο $[0,e]$ ως διαφορά συνεχών και μη αρνητική άρα

$$\int_0^e\left[f(x)-g^{-1}(x)\right]dx\geq 0\Leftrightarrow\int_0^e f(x)dx\geq\int_0^e g^{-1}(x)dx\Leftrightarrow$$

$$\underset{dx=g'(u)du}{\overset{\substack{x=g(u)\\(1)}}{\Leftrightarrow}}\int_0^e f(x)dx\geq\int_0^1 ug'(u)du\Leftrightarrow$$

$$\int_0^e f(x)dx\geq\int_0^1\left(ue^u+u\right)du\Leftrightarrow$$

$$\int_0^e f(x)dx\geq\left[ue^u-e^u+\frac{u^2}{2}\right]_0^1\Leftrightarrow$$

$$\int_0^e f(x)dx\geq\frac{3}{2}$$

mathxl

Σημείωση

Η άσκηση βασίζεται στην ανισότητα του **Young**, η οποία λέει ότι: αν μία συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο $[0,c]$ με $f(0)=0,\alpha\in[0,c]$ και $\beta\in[0,f(c)]$, τότε $\boxed{\alpha\beta\leq\int_0^\alpha f(x)dx+\int_0^\beta f^{-1}(x)dx}$