

ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

Αντώνης Κυριακόπουλος
a_kiriak@otenet.gr

1. Η γενική έννοια της ανίσωσης.

Ορισμός. Θεωρούμενα ένα διατεταγμένο σώμα Σ , ένα μη κενό σύνολο Ω και δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \Sigma$ και $g : B \rightarrow \Sigma$ μιας μεταβλητής x , όπου A και B είναι δύο μη κενά υποσύνολα του Ω . Καθένας από τους προτασιακούς τύπους:
 $f(x) < g(x)$ (α), $f(x) \leq g(x)$ (α'), $f(x) > g(x)$ (β) και $f(x) \geq g(x)$ (β')
 ονομάζεται **ανίσωση με άγνωστο το x και με σύνολο αναφοράς το Ω** .

Αν και οι δύο συναρτήσεις f και g είναι σταθερές, τότε συμφωνούμε στη σταθερή τιμή της μιας να προσθέτουμε το: $0 \cdot x$ (η ίδια συμφωνία γίνεται και στις εξισώσεις).

— Οι ανισώσεις (α) και (β) ονομάζονται και ανισώσεις υπό την **στενή (ή γνήσια) σημασία** και οι ανισώσεις (α') και (β') ονομάζονται και ανισώσεις υπό την **ευρεία σημασία**.

— Οι εκφράσεις $f(x)$ και $g(x)$ ονομάζονται **τα μέλη** καθεμιάς των παραπάνω ανισώσεων. [$f(x)$ πρώτο μέλος και $g(x)$ δεύτερο μέλος].

— Το σύνολο $A \cap B (\subseteq \Omega)$ ονομάζεται **σύνολο ορισμού** καθεμιάς των παραπάνω ανισώσεων και συμβολίζεται με D_α όταν αναφερόμαστε στην ανίσωση (α), με $D_{\alpha'}$ όταν αναφερόμαστε στην ανίσωση (α') κτλ.

— Έστω ότι $A \cap B \neq \emptyset$. Τότε, για κάθε $x \in (A \cap B)$ καθεμία από τις εκφράσεις (α), (α'), (β) και (β') γίνεται μια πρόταση (αληθής ή ψευδής). Ένα στοιχείο $\xi \in (A \cap B)$ λέμε ότι είναι **μια λύση ή μία ρίζα**:

- Της ανίσωσης (α), αν, και μόνο αν, ισχύει $f(\xi) < g(\xi)$.
- Της ανίσωσης (α'), αν, και μόνο αν, ισχύει $f(\xi) \leq g(\xi)$.
- Της ανίσωσης (β), αν, και μόνο αν, ισχύει $f(\xi) > g(\xi)$.
- Της ανίσωσης (β'), αν, και μόνο αν, ισχύει $f(\xi) \geq g(\xi)$.

— Το σύνολο λύσεων:

- Της ανίσωσης (α), είναι: $S_\alpha = \{x \in A \cap B \mid f(x) < g(x)\} \subseteq D_\alpha = A \cap B$.
- Της ανίσωσης (α'), είναι: $S_{\alpha'} = \{x \in A \cap B \mid f(x) \leq g(x)\} \subseteq D_{\alpha'} = A \cap B$.
- Της ανίσωσης (β), είναι: $S_\beta = \{x \in A \cap B \mid f(x) > g(x)\} \subseteq D_\beta = A \cap B$.
- Της ανίσωσης (β'), είναι: $S_{\beta'} = \{x \in A \cap B \mid f(x) \geq g(x)\} \subseteq D_{\beta'} = A \cap B$.

— Είναι φανερό ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης: $f(x) \leq g(x)$ είναι η ένωση των συνόλων λύσεων της ανίσωσης: $f(x) < g(x)$ και της εξίσωσης: $f(x) = g(x)$. Επίσης το σύνολο λύσεων της ανίσωσης: $f(x) \geq g(x)$ είναι η ένωση των συνόλων λύσεων της ανίσωσης: $f(x) > g(x)$ και της εξίσωσης: $f(x) = g(x)$.

— Η εύρεση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, ονομάζεται **επίλυση** της ανίσωσης αυτής.

— Μία ανίσωση λέμε ότι είναι **αδύνατη** αν, και μόνο αν, το σύνολο ορισμού της είναι το κενό σύνολο ή το σύνολο ορισμού της είναι διάφορο του κενού συνόλου, αλλά το σύνολο λύσεων αυτής είναι το κενό σύνολο.

— Μία ανίσωση λέμε ότι είναι **μόνιμη ανίσωση**, αν και μόνο αν, το σύνολο ορισμού της είναι διάφορο του κενού συνόλου και ταυτίζεται με το σύνολο λύσεων αυτής.

2. Ισοδύναμες ανισώσεις.

Ορισμός. Δύο ανισώσεις (γ) και (δ) με το ίδιο σύνολο αναφοράς, λέμε ότι είναι **ισοδύναμες στην τομή** $D_\gamma \cap D_\delta (\neq \emptyset)$ των συνόλων ορισμού τους και γράφουμε: $(\gamma) \Leftrightarrow (\delta)$, αν, και μόνον αν: $S_\gamma = S_\delta$. Δηλαδή, αν, και μόνο αν, κάθε λύση της μιας ανίσωσης είναι και λύση της άλλης.

— Θεωρούμε τρεις ανισώσεις (γ) , (δ) και (ε) με το ίδιο σύνολο αναφοράς. Στην τομή: $D_\gamma \cap D_\delta \cap D_\varepsilon (\neq \emptyset)$ των συνόλων ορισμού των, όπως βρίσκουμε εύκολα, ισχύουν:

- 1) $(\gamma) \Leftrightarrow (\gamma)$.
- 2) $\text{An } (\gamma) \Leftrightarrow (\delta), \text{ τότε } (\delta) \Leftrightarrow (\gamma)$.
- 3) $\text{An } (\gamma) \Leftrightarrow (\delta) \text{ και } (\delta) \Leftrightarrow (\varepsilon), \text{ τότε } (\gamma) \Leftrightarrow (\varepsilon)$.

Σημείωση. Στο σύνολο των ανισώσεων με το ίδιο σύνολο αναφοράς και με κοινό σύνολο ορισμού ένα υποσύνολο αυτού T , η σχέση:

«Η ανίσωση (α) είναι ισοδύναμη με την ανίσωση (β) »

είναι μια **σχέση ισοδυναμίας** στο σύνολο T (αυτοπαθής, συμμετρική, μεταβατική).

— Ας θεωρήσουμε τις δύο ανισώσεις: $f(x) < g(x)$ και $g(x) > f(x)$, αντιστοίχως τις $f(x) \leq g(x)$ και $g(x) \geq f(x)$, με το ίδιο σύνολο αναφοράς, οι οποίες προφανώς, τότε, θα έχουν και το ίδιο σύνολο ορισμού, έστω D . Είναι φανερό ότι, στο $D (\neq \emptyset)$, οι ανισώσεις αυτές είναι ισοδύναμες, δηλαδή:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x), \text{ αντιστοίχως: } f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow g(x) \geq f(x).$$

3. Επίλυση ανισώσεων εντός του $\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την επίλυση ανισώσεων εντός του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, με ανισώσεις, στις οποίες τα μέλη τους είναι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής και το σύνολο αναφοράς τους είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν σε μια ανίσωση δεν αναφέρομε το σύνολο αναφοράς της, θα εννοούμε ότι αυτό είναι το $\mathbb{R}$.

— Σημειώνουμε ότι όταν λέμε ότι θα λύσουμε μια τέτοια ανίσωση εννοούμε ότι θα βρούμε το σύνολο λύσεων αυτής υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$.

— Η επίλυση μιας ανίσωσης ξεκινάει με την εύρεση του συνόλου ορισμού της (όπως και στις εξισώσεις). Δηλαδή, πριν κάνουμε οτιδήποτε στην ανίσωση που θέλουμε να επιλύσουμε, θα πρέπει να βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της. Ο λόγος είναι όχι μόνο για να ξέρουμε για ποιες τιμές του x έχουν νόημα τα μέλη της, αλλά και για να ξέρουμε για ποιες τιμές του x ισχύουν αυτά που θα πούμε στη συνέχεια. Μετά, για την εύρεση του συνόλου λύσεων της ανίσωσης, συνήθως εφαρμόζουμε τα θεωρήματα ισοδυναμιών μεταξύ δύο ανισώσεων, που θα διατυπώσουμε στην επόμενη παράγραφο.

— Επισημαίνουμε ότι σε μια εξίσωση το σύνολο ορισμού της δεν είναι απαραίτητο να το βάζουμε υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Ο λόγος είναι ότι συνήθως οι λύσεις μιας εξίσωσης είναι πεπερασμένου πλήθους και μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε αν κάθε μια απ' αυτές ανήκει ή όχι στο σύνολο ορισμού της. Στις ανισώσεις όμως δεν συμβαίνει το ίδιο. Είναι σπάνιες οι περιπτώσεις που μια ανίσωση έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων. Σ' αυτές τις περιπτώσεις πάλι δεν είναι απαραίτητο να βάζουμε το σύνολο ορισμού της υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Συνήθως όμως το σύνολο λύσεων των ανισώσεων δεν είναι πεπερασμένο και για να το βρούμε χρειαζόμαστε το σύνολο ορισμού της υπό μορφή διαστήματος ή ενώσεων διαστημάτων του $\mathbb{R}$.

— Σημειώνουμε ότι οι γενικοί ορισμοί των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ είναι οι εξής:

- Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \leq \beta$. Ορίζουμε:

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}, \quad (\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\},$$

$$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}, \quad (\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\},$$

$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \alpha\}, \quad (\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \alpha\},$$

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}, \quad (-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}.$$

- Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$[\alpha, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \alpha\} = \{\alpha\}, \quad (\alpha, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \alpha\} = \emptyset,$$

$$[\alpha, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \alpha\} = \emptyset, \quad (\alpha, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \alpha\} = \emptyset.$$

- Σημειώνουμε, τέλος, ότι, για παράδειγμα, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\{\alpha, \beta\} = \{\alpha\} \cup \{\beta\} = [\alpha, \alpha] \cup [\beta, \beta] \quad (\text{όμοια αν το σύνολο περιέχει περισσότερα στοιχεία}).$$

4. Θεωρήματα ισοδυναμιών μεταξύ ανισώσεων.

Τα θεωρήματα ισοδυναμιών μεταξύ δύο ανισώσεων θα τα διατυπώσουμε για μια ανίσωση μιας μορφής: $f(x) < g(x)$, αλλά ισχύουν και για ανισώσεις των υπόλοιπων τριών μορφών.

Θεώρημα 1. Έστω μία ανίσωση: $f(x) < g(x)$ με σύνολο ορισμού D . Για κάθε συνάρτηση h που είναι ορισμένη στο σύνολο D , ισχύει στο D η ισοδυναμία:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x).$$

Απόδειξη.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ ρίζα της} \\ f(x) < g(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \in D \text{ και} \\ f(\rho) < g(\rho) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \in D \text{ και} \\ f(\rho) + h(\rho) < g(\rho) + h(\rho) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ ρίζα της} \\ f(x) + h(x) < g(x) + h(x) \end{array} \right\}$$

Πόρισμα 1. Έστω μία ανίσωση: $f(x) < g(x)$ με σύνολο ορισμού D . Για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει στο D η ισοδυναμία: $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + \kappa < g(x) + \kappa$.

Πόρισμα 2. Αν σε μια ανίσωση μεταφέρουμε έναν «όρο» της από το ένα μέλος στο άλλο θέτοντας προ αυτού το πρόσημο «-», τότε η ανίσωση που προκύπτει είναι ισοδύναμη με την αρχική.

Για παράδειγμα, έστω μια ανίσωση: $f(x) + g(x) < \varphi(x) - h(x)$ με σύνολο ορισμού το D . Ισχύουν (στο D) οι ισοδυναμίες:

$$f(x) + g(x) < \varphi(x) - h(x) \Leftrightarrow f(x) + g(x) + h(x) < \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) + h(x) < \varphi(x) - g(x) \Leftrightarrow \varphi(x) - h(x) - g(x) - f(x) > 0$$

Θεώρημα 2. Έστω μία ανίσωση: $f(x) < g(x)$ με σύνολο ορισμού D και μία συνάρτηση h που είναι ορισμένη στο σύνολο D .

α) Αν $h(x) > 0$, για κάθε $x \in D$, τότε, ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x)$$

β) Αν $h(x) < 0$, για κάθε $x \in D$, τότε, ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x)$$

Απόδειξη. Εύκολη.

Πόρισμα 3. Έστω μία ανίσωση: $f(x) < g(x)$ με σύνολο ορισμού D .

α) Για κάθε αριθμό $\lambda > 0$, ισχύει (στο D): $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \lambda f(x) < \lambda g(x)$.

β) Για κάθε αριθμό $\lambda < 0$, ισχύει (στο D): $f(x) < g(x) \Leftrightarrow \lambda f(x) > \lambda g(x)$.

- Ειδικά με $\lambda = -1$, έχουμε (στο D) τις ισοδυναμίες:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow -f(x) > -g(x) \quad \text{και} \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow -f(x) < -g(x).$$

- Με τη βοήθεια του πορίσματος 3 μπορούμε να εξαλείψουμε τους αριθμητικούς παρονομαστές μιας ανίσωσης (αν έχει).

Πόρισμα 4. Κάθε ανίσωση με ένα άγνωστο x είναι ισοδύναμη, στο σύνολο ορισμού της, με μια ανίσωση που έχει μια από τις μορφές: $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση.

Θεώρημα 3. Έστω μία ανίσωση: $f(x) < g(x)$ με σύνολο ορισμού D .

1) Στο D ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^{2^{v+1}}(x) < g^{2^{v+1}}(x), \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}.$$

2) Αν $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in D$, τότε στο D ισχύει η αδυναμία:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^v(x) < g^v(x), \text{ για κάθε } v \in \mathbb{N}^*.$$

Απόδειξη. Εύκολη.

Θεώρημα 4. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Στο $D = A \cap B (\neq \emptyset)$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$1) |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ -g(x) < f(x) \end{cases} \quad 2) |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow [f(x) > g(x) \vee f(x) < -g(x)]$$

Απόδειξη. Εύκολη.

Πόρισμα 5. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και ένα αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$. Στο A ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$1) |f(x)| < \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \lambda \\ f(x) > -\lambda \end{cases} \quad 2) |f(x)| > \lambda \Leftrightarrow [f(x) > \lambda \vee f(x) < -\lambda]$$

Σημείωση. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Στο $D = A \cap B (\neq \emptyset)$, έχουμε :

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow [g(x) + f(x)][g(x) - f(x)] > 0.$$

5. Ακέραιες ανισώσεις .

Ορισμός. Μια ανίσωση λέγεται **ακέραια** ή **πολυωνυμική αν**, και **μόνο αν**, τα μέλη της είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Για παράδειγμα, καθεμία από τις παρακάτω ανισώσεις είναι ακέραια:

$$\sqrt{2}x - 5 < 3x^2 - x + 1, \quad 7x^3 - 10x + 3 \geq 0, \quad 2x - 3 > 2x + 1.$$

- Προφανώς, το σύνολο ορισμού μιας ακεραίας ανίσωσης ταυτίζεται με το σύνολο αναφοράς της

— Αν σε μία ακέραια ανίσωση μεταφέρουμε όλους τους όρους της στο πρώτο μέλος και κάνουμε όλες τις δυνατές πράξεις και απλοποιήσεις, τότε βρίσκουμε μια ισοδύναμη ανίσωση, της οποίας το πρώτο μέλος είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση f με τύπο της μορφής :

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad (1)$$

όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ πραγματικοί αριθμοί και το δεύτερο μέλος είναι 0. Η ανίσωση αυτή λέμε ότι είναι η **ανηγμένη** μορφή της αρχικής δοσμένης ανίσωσης.

— **Βαθμό** μιας ακεραίας ανίσωσης, της οποίας το πρώτο μέλος είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής (1) και το δεύτερο μέλος είναι το 0, ονομάζουμε τον βαθμό n της πολυωνυμικής συνάρτησης (1) του πρώτου μέλους ($\alpha_n \neq 0$).

— **Βαθμό** μιας ακεραίας ανίσωσης (της οποίας τα μέλη είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις) ονομάζουμε το βαθμό της ισοδύναμης ανηγμένης ανίσωσης.

— Οι γενικές μορφές των (ανηγμένων) ακέραιων ανισώσεων με ένα άγνωστο x :

- **Πρώτου βαθμού** είναι:

$$\alpha x + \beta > 0, \quad \alpha x + \beta \geq 0, \quad \alpha x + \beta < 0, \quad \alpha x + \beta \leq 0, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha \neq 0.$$

- Δευτέρου βαθμού είναι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0, \alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0, \text{ κτλ. }, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha \neq 0.$$

- Τρίτου βαθμού είναι:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta > 0, \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \geq 0, \text{ κτλ. }, \text{ όπου } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Κ.Ο.Κ.

6. Επίλυση ακεραίων ανισώσεων.

Η επίλυση των ακεραίων ανισώσεων πρώτου βαθμού είναι απλή. Η επίλυση των ακεραίων ανισώσεων δευτέρου βαθμού γίνεται με τη βοήθεια του θεωρήματος του τριωνύμου δευτέρου βαθμού (βλέπε παρακάτω), αφού προηγουμένως βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου του πρώτου μέλους. Η επίλυση των ακεραίων ανισώσεων, με πρώτο μέλος μια πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού $n \geq 3$ (και δεύτερο μέλος το 0), απαιτεί επίσης την εύρεση των ριζών της εξίσωσης: $f(x)=0$, που δεν είναι πάντοτε δυνατή (αν η εξίσωση αυτή είναι τρίτου ή τετάρτου βαθμού, τότε η επίλυσή της είναι δυνατή, αλλά η μέθοδος επίλυσης της διδάσκεται στα Ανώτερα Μαθηματικά). Θεωρητικά αποδεικνύεται ότι ο τύπος κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού $n \geq 1$, μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρωτοβαθμίων ή και δευτεροβαθμίων παραγόντων ως προς x (με πραγματικούς συντελεστές). Μερικές φορές μπορούμε και στην πράξη να αναλύσουμε σε γινόμενο πρωτοβαθμίων ή και δευτεροβαθμίων παραγόντων ως προς x (με πραγματικούς συντελεστές) το πρώτο μέλος μιας ακεραίας ανίσωσης (με το δεύτερο μέλος 0). Τότε, η επίλυσή της ανάγεται στην εύρεση των προσήμων του γινομένου του πρώτου μέλους, για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Το γινόμενο αυτό θα αποτελείται από παράγοντες της μορφής: $(\alpha x + \beta)^k$ ή και της μορφής: $(\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)^\lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$ με $\alpha \gamma \neq 0$. Παρατηρούμε ότι στους παράγοντες της μορφής: $(\alpha x + \beta)^k$ μπορούμε να υποθέτουμε ότι ο συντελεστής του x είναι θετικός, δηλαδή $\alpha > 0$ και στους παράγοντες της μορφής: $(\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon)^\lambda$ ο συντελεστής του x^2 είναι επίσης θετικός, δηλαδή $\gamma > 0$. Πράγματι, έστω ότι σε ένα παράγοντα της μορφής $(\alpha x + \beta)^k$ είναι $\alpha < 0$. Έχουμε: $(\alpha x + \beta)^k = (-1)^k (-\alpha x - \beta)^k$.

- Αν ο k είναι άρτιος, τον παράγοντα αυτόν τον γράφουμε: $(-\alpha x - \beta)^k$,
- Αν ο k είναι περιττός, τον γράφουμε: $-(-\alpha x - \beta)^k$ και πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το -1 οπότε προκύπτει μια ισοδύναμη ετερόστροφος ανίσωση, στην οποία ο παράγοντας αυτός γίνεται $(-\alpha x - \beta)^k$.

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις ο συντελεστής του x είναι θετικός ($-\alpha > 0$).

Όμοια εργαζόμαστε και για τους παράγοντες της δεύτερης μορφής, στους οποίους ο συντελεστής του x^2 είναι αρνητικός.

Έτσι αναγόμαστε στην επίλυση ανισώσεων, των οποίων το δεύτερο μέλος είναι 0 και το πρώτο μέλος είναι της μορφής:

$$f(x) = (\alpha_1 x + \beta_1)^{k_1} \dots (\alpha_n x + \beta_n)^{k_n} (\gamma_1 x^2 + \delta_1 x + \varepsilon_1)^{\lambda_1} \dots (\gamma_\mu x^2 + \delta_\mu x + \varepsilon_\mu)^{\lambda_\mu} \quad (1),$$

όπου $k_1, \dots, k_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\mu \in \mathbb{N}^*$, όλοι οι συντελεστές στις παρενθέσεις είναι πραγματικοί αριθμοί με: $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_\mu > 0$ και τα διώνυμα στις παρενθέσεις έχουν ανά δύο διαφορετικές ρίζες.

— Στη συνέχεια, αφού υπενθυμίσουμε το θεώρημα του τριωνύμου, θα δούμε με ποιον τρόπο μπορούμε να επιλύσουμε εύκολα ανισώσεις, των οποίων το δεύτερο μέλος είναι το 0 και το πρώτο μέλος είναι της μορφής:

$$(a_1x + \beta_1)^{K_1} (a_2x + \beta_2)^{K_2} \dots (a_vx + \beta_v)^{K_v}$$

και μετά, γενικότερα, της παραπάνω μορφής (1), με όλους τους προηγούμενους περιορισμούς.
Θεώρημα (του τριωνύμου). Θεωρούμε το τριώνυμο: $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

με $\alpha \neq 0$. Θέτουμε: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ (διακρίνουσα).

1) Έστω ότι $\Delta < 0$. Τότε: $\forall x \in \mathbb{R}, af(x) > 0$.

2) Έστω ότι $\Delta = 0$. Τότε: $\forall x \in \left(\mathbb{R} - \left\{ -\frac{\beta}{2\alpha} \right\} \right)$, $af(x) > 0$ και $\forall x \in \mathbb{R}, af(x) \geq 0$.

3) Έστω ότι $\Delta > 0$. Τότε: $\begin{cases} \forall x \in (-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty), af(x) > 0 \\ \forall x \in (\rho_1, \rho_2), af(x) < 0 \end{cases}$

(όπου ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του $f(x)$, $\rho_1 < \rho_2$).

• Υπενθυμίζουμε ακόμα ότι με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, ισχύουν:

$$1) \left(\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + \beta x + \gamma > 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad 2) \left(\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + \beta x + \gamma \geq 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$3) \left(\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + \beta x + \gamma < 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad 4) \left(\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + \beta x + \gamma \leq 0 \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

Εφαρμογή. Να λυθεί η ανίσωση: $|x| < -x^2 + x + 6$ (1).

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε στο $\mathbb{R}$ (§ 3, θεώρημα 4):

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -x^2 + x + 6 \\ -(-x^2 + x + 6) < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6 < 0 \\ x^2 - 2x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \\ 1 - \sqrt{7} < x < 1 + \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \sqrt{7} < x < \sqrt{6}.$$

Άρα, το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι: $S = (1 - \sqrt{7}, \sqrt{6})$.

7. Επίλυση ανισώσεων με δεύτερο μέλος το 0 και πρώτο μέλος της μορφής :

$$\Gamma(x) = (a_1x + \beta_1)^{K_1} (a_2x + \beta_2)^{K_2} \dots (a_vx + \beta_v)^{K_v}.$$

Στο γινόμενο $\Gamma(x)$ είναι : $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v \in \mathbb{N}^*$, όλοι οι συντελεστές στις παρενθέσεις είναι πραγματικοί αριθμοί με: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v > 0$ και τα διώνυμα στις παρενθέσεις έχουν ανά δύο διαφορετικές ρίζες.

Πρώτος τρόπος.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι:

• Αν ένας παράγοντας έχει άρτιο εκθέτη, τότε είναι θετικός ή μηδέν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, έχουμε: $(3x + 2)^4 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

• Αν ένας παράγοντας έχει περιττό εκθέτη, τότε για κάθε πραγματικό αριθμό x , διαφορετικό από τη ρίζα του, είναι ομόσημος με το διώνυμο της βάσης. Για παράδειγμα, ο παράγοντας $(x - 2)^7$ μηδενίζεται για $x = 2$, ενώ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2$, οι αριθμοί $(x - 2)^7$ και $x - 2$ είναι ομόσημοι, αφού, τότε, ισχύει: $(x - 2)^7(x - 2) = (x - 2)^8 > 0$.

Βήμα 1. Βρίσκουμε τις ρίζες των διωνύμων που έχουν άρτιο εκθέτη. Ονομάζουμε A το σύνολο των ριζών αυτών.

Βήμα 2. Βρίσκουμε τα διώνυμα που έχουν περιττό εκθέτη και ονομάζουμε $\Delta(x)$ το γινόμενό τους (χωρίς τους εκθέτες). Έστω ότι:

$$\Delta(x) = (\gamma_1x + \delta_1)(\gamma_2x + \delta_2) \dots (\gamma_\lambda x + \delta_\lambda) \quad (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\lambda > 0).$$

Βήμα 3. Βρίσκουμε εύκολα ότι:

$$\begin{aligned} 1) \quad \Gamma(x) > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ \Delta(x) > 0 \end{cases} & 2) \quad \Gamma(x) \geq 0 &\Leftrightarrow [x \in A \text{ ή } \Delta(x) \geq 0] \\ 3) \quad \Gamma(x) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ \Delta(x) < 0 \end{cases} & 4) \quad \Gamma(x) \leq 0 &\Leftrightarrow [x \in A \text{ ή } \Delta(x) \leq 0] \end{aligned}$$

Έτσι, η επίλυση της ανίσωσης ανάγεται στην εύρεση των προσήμων του γινόμενου $\Delta(x)$, για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. Προς τούτο εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 4. Βρίσκουμε τις ρίζες των διωνύμων του $\Delta(x)$. Οι ρίζες αυτές είναι ανά δύο διαφορετικές και είναι κατά σειρά οι εξής:

$$r_1 = -\frac{\delta_1}{\gamma_1}, r_2 = -\frac{\delta_2}{\gamma_2}, \dots, r_\lambda = -\frac{\delta_\lambda}{\gamma_\lambda}.$$

Βήμα 5. Τις ρίζες αυτές τις βάζουμε κατά σειρά μεγέθους στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Δεν είναι βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι: $r_1 < r_2 < \dots < r_\lambda$. Μετά, βάζουμε στα διαστήματα εναλλάξ τα πρόσημα: $+$, $-$, $+$, $-$, $\dots$, αρχίζοντας από το τελευταίο διάστημα $(r_\lambda, +\infty)$. Έτσι θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	r_1	r_2	$r_{\lambda-1}$	r_λ	$+\infty$
$\Delta(x)$		0	0	0	0	
				-		+

Βήμα 6. Γράφουμε το σύνολο λύσεων της ανίσωσης.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί η ανίσωση:

$$(x+3)^{15}(x-1)^{10}x^5(-x+2)^3(4-x)^4 < 0 \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Έχουμε στο $\mathbb{R}$:

$$(1) \Leftrightarrow (x+3)^{15}(x-1)^{10}x^5(x-2)^3(x-4)^4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, x \neq 4 \\ (x+3)x(x-2) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ονομάζουμε $\Delta(x)$ το πρώτο μέλος της ανίσωσης (2). Οι ρίζες του $\Delta(x)$ είναι κατά σειρά: -3 , 0 και 2 . Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων του $\Delta(x)$:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$\Delta(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της δοσμένης ανίσωσης είναι οι αριθμοί $x \in \mathbb{R}$ με: $-3 < x < 0$, $x > 2$, $x \neq 1$ και $x \neq 4$. Συνεπώς, το σύνολο λύσεων αυτής είναι:

$$S = (-3, 0) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty).$$

• Δεύτερος τρόπος.

Βήμα 1. Βρίσκουμε τις ρίζες των διωνύμων που είναι στις παρενθέσεις. Οι ρίζες αυτές είναι ανά δύο διαφορετικές και είναι κατά σειρά οι εξής:

$$\rho_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \rho_2 = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}, \dots, \rho_v = -\frac{\beta_v}{\alpha_v},$$

με βαθμό πολλαπλότητας $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v$, αντιστοίχως.

Βήμα 2. Τις ρίζες αυτές τις βάζουμε κατά σειρά μεγέθους στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Δεν είναι βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι: $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_v$. Έτσι θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	ρ_1	ρ_2	ρ_{v-1}	ρ_v	$+\infty$
$\Gamma(x)$		0	0	0	0	
					+	

Βήμα 3. Στο τελευταίο δεξιά διάστημα $(\rho_v, +\infty)$ θέτουμε το πρόσημο $+$.

Βήμα 4. Τα πρόσημα στα υπόλοιπα διαστήματα τα βρίσκουμε ακολουθώντας τον εξής κανόνα, αρχίζοντας από το προτελευταίο διάστημα (ρ_{v-1}, ρ_v) :

- Στο διάστημα (ρ_{v-1}, ρ_v) θέτουμε το ίδιο πρόσημο με εκείνο του (επόμενου) $(\rho_v, +\infty)$ (δηλαδή το $+$), αν η ρίζα που τα χωρίζει (δηλαδή η ρίζα ρ_v) έχει άρτιο βαθμό πολλαπλότητας (δηλαδή αν ο κ_v είναι άρτιος) ή το αντίθετο του (δηλαδή το $-$), αν έχει περιττό βαθμό πολλαπλότητας (δηλαδή αν ο κ_v είναι περιττός).

- Όμοια, στο (προηγούμενο) διάστημα (ρ_{v-2}, ρ_{v-1}) θέτουμε το πρόσημο του (επόμενου) (ρ_{v-1}, ρ_v) , αν η ρίζα που τα χωρίζει (δηλαδή η ρίζα ρ_{v-1}) έχει άρτιο βαθμό πολλαπλότητας (δηλαδή αν ο κ_{v-1} είναι άρτιος) ή το αντίθετο του, αν έχει περιττό βαθμό πολλαπλότητας (δηλαδή αν ο κ_{v-1} είναι περιττός).

- Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο έως ότου βάλουμε πρόσημα σε όλα τα διαστήματα.

Βήμα 5. Γράφουμε το σύνολο λύσεων της ανίσωσης.

Σημείωση 2. Είναι φανερό ότι, αν όλοι οι εκθέτες $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_v$ είναι 1, οπότε:

$$\Gamma(x) = (a_1x + \beta_1)(a_2x + \beta_2) \dots (a_vx + \beta_v),$$

τότε τα πρόσημα στον παραπάνω πίνακα, αρχίζοντας από το τελευταίο διάστημα, είναι εναλλάξ: $+, -, +, -, \dots$

Παράδειγμα 2. Να λυθεί η ανίσωση:

$$(7-x)^3(-5x-8)^2(x+3)(3x-2)^5 \leq 0. \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Επειδή: $(7-x)^3 = -(x-7)^3$ και

$(-5x-8)^2 = (5x+8)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε στο $\mathbb{R}$:

$$(1) \Leftrightarrow -(x-7)^3(5x+8)^2(x+3)(3x-2)^5 \leq 0 \Leftrightarrow (x-7)^3(5x+8)^2(x+3)(3x-2)^5 \geq 0 \quad (2).$$

Ονομάζουμε $\Gamma(x)$ το πρώτο μέλος της ανίσωσης (2). Οι ρίζες του $\Gamma(x)$ (ανεξαρτήτως βαθμού πολλαπλότητας) είναι κατά σειρά οι εξής: 7, $-\frac{8}{5}$, -3 και $\frac{2}{3}$. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων του $\Gamma(x)$:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{8}{5}$		$\frac{2}{3}$		7		$+\infty$
$\Gamma(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι: $S = \left[-3, \frac{2}{3}\right] \cup [7, +\infty)$.

• Τρίτος τρόπος.

Βήμα 1. Βρίσκουμε τις ρίζες των διωνύμων που είναι στις παρενθέσεις.

Βήμα 2. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα διπλής εισόδου, στον οποίο στην πρώτη στήλη γράφουμε κατά σειρά τους παράγοντες του $\Gamma(x)$ και στην πρώτη γραμμή τις ρίζες του $\Gamma(x)$. Κατόπιν, δίπλα από κάθε παράγοντα, γράφουμε τα πρόσημα που λαμβάνει, για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. Στην τελευταία σειρά γράφουμε τα πρόσημα που λαμβάνει το γινόμενο $\Gamma(x)$, για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3. Να λυθεί η ανίσωση: $x^3(x+3)^7(x+2)^4(x-4) > 0$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε $\Gamma(x)$ το πρώτο μέλος της ανίσωσης. Οι ρίζες του $\Gamma(x)$ είναι κατά σειρά: 0, -3, -2 και 4. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-3	-2	0	4	$+\infty$
x^3	-	-	-	0	+	+
$(x+3)^7$	-	0	+	+	+	+
$(x+2)^4$	+	+	0	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	0	+
$\Gamma(x)$	-	0	+	0	-	+

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι:

$$S = (-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty).$$

Σχόλιο. Συγκρίνοντας τους τρεις τρόπους, βλέπουμε ότι στην πράξη, συντομότερος είναι ο πρώτος τρόπος, αρκεί βέβαια να κατανοηθεί.

8. Επίλυση ανισώσεων με δεύτερο μέλος το 0 και πρώτο μέλος της μορφής :

$$\Gamma(x) = (a_1x + \beta_1)^{K_1} \dots (a_vx + \beta_v)^{K_v} (\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1)^{\lambda_1} \dots (\gamma_\mu x^2 + \delta_\mu x + \varepsilon_\mu)^{\lambda_\mu}.$$

Στο γινόμενο $\Gamma(x)$ είναι : $K_1, \dots, K_v, \lambda_1, \dots, \lambda_\mu \in \mathbb{N}^*$, όλοι οι συντελεστές στις παρενθέσεις είναι πραγματικοί αριθμοί με: $a_1, \dots, a_v, \gamma_1, \dots, \gamma_\mu > 0$ και τα διώνυμα στις παρενθέσεις έχουν ανά δύο διαφορετικές ρίζες.

Βήμα 1. Μελετάμε το πρόσημο του πρώτου τριωνύμου: $\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1$. Προς τούτο βρίσκουμε την διακρίνουσά του, έστω Δ_1 .

- Έστω ότι $\Delta_1 < 0$. Τότε, επειδή $\gamma_1 > 0$, ισχύει: $\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τότε, παραλείπουμε τον παράγοντα $(\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1)^{\lambda_1}$, οπότε προκύπτει ισοδύναμη ανίσωση.
- Έστω ότι $\Delta_1 = 0$. Τότε, το τριώνυμο αυτό έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, έστω ξ , οπότε:

$$(\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1)^{\lambda_1} = \gamma_1^{\lambda_1} (x - \xi)^{2\lambda_1}.$$

Επειδή $\gamma_1^{\lambda_1} > 0$, αντικαθιστούμε στην ανίσωση τον παράγοντα $(\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1)^{\lambda_1}$ με $(x - \xi)^{2\lambda_1}$, οπότε προκύπτει ισοδύναμη ανίσωση.

- Έστω ότι $\Delta_1 > 0$. Τότε, το τριώνυμο αυτό έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις ονομάζουμε ξ_1 και ξ_2 , οπότε:

$$(\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1)^{\lambda_1} = \gamma_1^{\lambda_1} (x - \xi_1)^{\lambda_1} (x - \xi_2)^{\lambda_1}.$$

Επειδή $\gamma_1^{\lambda_1} > 0$, αντικαθιστούμε στην ανίσωση τον παράγοντα $(\gamma_1x^2 + \delta_1x + \varepsilon_1)^{\lambda_1}$ με $(x - \xi_1)^{\lambda_1} (x - \xi_2)^{\lambda_1}$, οπότε προκύπτει ισοδύναμη ανίσωση.

Βήμα 2. Επαναλαμβάνουμε την ίδια εργασία για όλα τα τριώνυμα που περιέχει η ανίσωση.

Βήμα 3. Συμπτύσσουμε τις δυνάμεις με την ίδια βάση, αν υπάρχουν.

Έτσι φθάνουμε σε ανίσωση της μορφής που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Παράδειγμα. Να λυθεί η ανίσωση:

$$(x^2 - 4)^3 (x^2 - 3x + 2)^6 (x^2 + 2x)(-2x^2 + 3x - 4)^4 (-x^2 + 2x - 2)^9 > 0. \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Με $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 4)^3 (x^2 - 3x + 2)^6 (x^2 + 2x)(2x^2 - 3x + 4)^4 (x^2 - 2x + 2)^9 < 0. \quad (2)$$

Έχουμε: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ και $x^2 + 2x = x(x + 2)$. Τα τριώνυμα: $2x^2 - 3x + 4$ και $x^2 - 2x + 2$ έχουν διακρίνουσες αρνητικές και συνεπώς:

$2x^2 - 3x + 4 > 0$ και $x^2 - 2x + 2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow (x-2)^3(x+2)^3(x-1)^6(x-2)^6x(x+2) < 0 \Leftrightarrow x(x-2)^9(x+2)^4(x-1)^6 < 0 \quad (3).$$

Ονομάζουμε $\Gamma(x)$ το πρώτο μέλος της ανίσωσης (3). Στην ανίσωση αυτή οι ρίζες του πρώτου μέλους είναι κατά σειρά οι εξής : 0, 2, -2 και 1. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων του $\Gamma(x)$:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		$+\infty$
$\Gamma(x)$		+	0	+	0	-	0	-	0	+	

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι: $S = (0, 1) \cup (1, 2)$.

9. Ρητές ανισώσεις.

Ορισμός. Μια ανίσωση λέγεται ρητή αν, και μόνο αν, τα μέλη της είναι ρητές συναρτήσεις.

Για παράδειγμα, καθεμία από τις παρακάτω ανισώσεις είναι ρητή:

$$\frac{3x-1}{x+1} < \frac{x+3}{2x-5}, \quad 2x+3 \geq \frac{x-1}{2x+3}, \quad \frac{1}{x} - 3 > \frac{2x-3}{5}.$$

— Αν σε μία ρητή ανίσωση, με σύνολο ορισμού D , μεταφέρουμε όλους τους όρους της στο πρώτο μέλος και κάνουμε όλες τις δυνατές πράξεις και απλοποιήσεις, τότε βρίσκουμε μια ισοδύναμη ανίσωση, της οποίας το πρώτο μέλος είναι μια ρητή συνάρτηση: $\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου f και g

είναι δύο (ανηγμένες) πολωνυμικές συναρτήσεις, [με $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in D$] και το δεύτερο μέλος είναι 0.

• Έστω μια ρητή ανίσωση με δεύτερο μέλος το 0 και πρώτο μέλος: $\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου f και g είναι δύο πολωνυμικές συναρτήσεις. Προφανώς, το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$. Όπως βρίσκουμε εύκολα, στο D , ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0 &\Leftrightarrow f(x)g(x) > 0 & 2) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 &\Leftrightarrow f(x)g(x) \geq 0 \\ 3) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0 &\Leftrightarrow f(x)g(x) < 0 & 4) \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 &\Leftrightarrow f(x)g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

— Συμπεραίνουμε ότι η επίλυση μιας ρητής ανίσωσης ανάγεται την επίλυση μιας ακεραίας ανίσωσης.

Παράδειγμα. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq 2 \frac{x-1}{x(x-2)}. \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της συνάρτησης του πρώτου μέλους της ανίσωσης (1) είναι: $\mathbb{R} - \{1, 2\}$ και εκείνης του δεύτερου μέλους είναι: $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. Η τομή των δύο αυτών συνόλων είναι το σύνολο ορισμού D της ανίσωσης (1). Βρίσκομαι ότι: $D = \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$. Με $x \in D$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1) + x(x-2) - 2(x-1)^2}{x(x-1)(x-2)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x(x-1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \geq 0. \end{aligned}$$

Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι το ζητούμενο σύνολο λύσεων είναι:

$$S = [-\sqrt{2}, 0) \cup (1, \sqrt{2}] \cup (2, +\infty).$$

10. Ανισώσεις με ριζικά.

Ονομάζουμε ανισώσεις με ριζικά (ή άρρητες ανισώσεις) τις ανισώσεις, στις οποίες ο άγνωστος x εμφανίζεται κάτω από σύμβολο ριζικού.

• Στην παράγραφο αυτή, θα συμβολίζουμε με A το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f , με B το σύνολο ορισμού της συνάρτησης g και με Γ το σύνολο ορισμού της συνάρτησης h .

1) Ανισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (A \cap B), f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\}$.

Με $x \in D$, έχουμε:

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

• Γενικότερα, στο D ισχύει η ισοδυναμία:

$$\sqrt[v]{f(x)} < \sqrt[v]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \quad (v \in \mathbb{N}^*, v \geq 2).$$

2) Ανισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (A \cap B), f(x) \geq 0\}$. Με $x \in D$, έχουμε:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

• Επίσης, στο D έχουμε: $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$

• Γενικότερα, στο D ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\sqrt[v]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^v(x) \end{cases}, \quad \sqrt[v]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^v(x) \end{cases} \quad (v \in \mathbb{N}, v \geq 2)$$

3) Ανισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (A \cap B), f(x) \geq 0\}$. Με $x \in D$, έχουμε:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[g(x) < 0 \text{ ή } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \right]$$

• Επίσης, στο D έχουμε: $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[g(x) < 0 \text{ ή } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \right]$

• Γενικότερα, στο D ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\sqrt[v]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[g(x) < 0 \text{ ή } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^v(x) \end{cases} \right], \quad \sqrt[v]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[g(x) < 0 \text{ ή } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^v(x) \end{cases} \right]$$

($v \in \mathbb{N}, v \geq 2$).

4) Ανισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < h(x)$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (A \cap B \cap \Gamma), f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\}. \text{ Με } x \in D, \text{ έχουμε:}$$

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} < h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} < h^2(x) \text{ (δεύτερη μορφή)} \end{cases}$$

• Επίσης, στο D έχουμε:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \leq h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} \leq h^2(x) \text{ (δεύτερη μορφή)} \end{cases}$$

5) Ανισώσεις της μορφής: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > h(x)$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (A \cap B \cap \Gamma), f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\}. \text{ Με } x \in D, \text{ έχουμε:}$$

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} > h(x) \Leftrightarrow \left[h(x) < 0 \text{ ή } \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} > h^2(x) \end{cases} \right]$$

• Επίσης, στο D έχουμε:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} \geq h(x) \Leftrightarrow \left[h(x) < 0 \text{ ή } \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)g(x)} \geq h^2(x) \end{cases} \right]$$

Σημείωση. Αν μια ανίσωση με ριζικά είναι διαφορετικής μορφής από τις παραπάνω, τότε διά καταλλήλων μετασχηματισμών αυτής στο σύνολο ορισμού της και με επανειλημμένες εφαρμογές των προηγούμενων προτάσεων, φθάνουμε σε ισοδύναμο σύστημα ρητών ανισώσεων.

11. Ανισώσεις που περιέχουν εκθετικές ή λογαριθμικές συναρτήσεις.

• Στην παράγραφο αυτή, θα συμβολίζουμε με A το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f, με B το σύνολο ορισμού της συνάρτησης g και με Γ το σύνολο ορισμού της συνάρτησης φ.

1) Ανισώσεις της μορφής: $f(a^x) > 0$, όπου $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Βρίσκουμε το σύνολο ορισμού D της ανίσωσης αυτής. Θέτουμε: $\alpha^x = t$. Έτσι, στο σύνολο ορισμού της D, αναγόμεντε στην επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} t > 0 \\ f(t) > 0 \end{cases}$$

Ανάλογα, αν η ανίσωση είναι της μορφής: $f(\alpha^x) \geq 0$ ή $f(\alpha^x) < 0$ ή $f(\alpha^x) \leq 0$.

2) Ανισώσεις της μορφής: $\alpha^{f(x)} < \alpha^{g(x)}$, όπου $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι: $D = A \cap B$. Με $x \in D$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha^{f(x)} < \alpha^{g(x)} &\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \alpha > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \alpha - 1 > 0 \\ f(x) - g(x) < 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \right] \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1)(f(x) - g(x)) < 0. \end{aligned}$$

• Επίσης, με $x \in D$, έχουμε:

$$\alpha^{f(x)} \leq \alpha^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \alpha > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (\alpha - 1)(f(x) - g(x)) \leq 0.$$

3) Ανισώσεις της μορφής: $\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x)$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (A \cap B \cap \Gamma), f(x) > 0, g(x) > 0, \varphi(x) > 0, \varphi(x) \neq 1\}.$$

Με $x \in D$ έχουμε:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) < \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \varphi(x) < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} \varphi(x) - 1 > 0 \\ f(x) - g(x) < 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \varphi(x) - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow (\varphi(x) - 1)(f(x) - g(x)) < 0.$$

• Επίσης, με $x \in D$, έχουμε:

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \leq \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \varphi(x) > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \varphi(x) < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (\varphi(x) - 1)(f(x) - g(x)) \leq 0.$$

4) Ανισώσεις της μορφής: $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, όπου $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Είναι ειδική περίπτωση της προηγούμενης μορφής με: $\varphi(x) = a$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \cap B, f(x) > 0, g(x) > 0\}$.

Με $x \in D$ έχουμε:

$$\bullet \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) < 0$$

$$\bullet \log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{cases} a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} a < 1 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) \leq 0$$

12. Ανισώσεις που περιέχουν συναρτήσεις της μορφής $[f(x)]^{g(x)}$.

Ονομάζουμε A το σύνολο ορισμού της συνάρτησης f και B το σύνολο ορισμού της συνάρτησης g .

• Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ανήκει το σύνολο ορισμό της συνάρτησης $[f(x)]^{g(x)}$ αν, και μόνο αν, πληροί μία (τουλάχιστον) από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

$$\text{i)} \begin{cases} x \in (A \cap B) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x \in (A \cap B) \\ f(x) = 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x \in (A \cap B) \\ f(x) < 0 \\ g(x) \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

• Σημειώνουμε ότι, για κάθε $x \in (A \cap B)$ με $f(x) > 0$, ισχύει:

$$[f(x)]^{g(x)} = a^{g(x) \log_a f(x)}, \text{ όπου } a \in \mathbb{R} \text{ με } a > 0 \text{ και } a \neq 1.$$

Παράδειγμα 1. Να λυθεί η ανίσωση: $(3x^2 - 2x)^{x-2} > 1$ (1)

Λύση. Το σύνολο ορισμού καθεμιάς από τις συναρτήσεις με τύπους: $3x^2 - 2x$ και $x - 2$ είναι το $\mathbb{R}$. Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της συνάρτησης του πρώτου μέλους της ανίσωσης (1), αν, και μόνο αν :

$$\left[3x^2 - 2x > 0 \text{ ή } \begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x^2 - 2x < 0 \\ (x - 2) \in \mathbb{Z} \end{cases} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\left(x < 0 \text{ ή } x > \frac{2}{3} \right) \text{ ή } \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = \frac{2}{3} \\ x > 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 0 < x < \frac{2}{3} \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left(x < 0 \text{ ή } x > \frac{2}{3} \right).$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι: $D = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Με $x \in D$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (x-2)\log(3x^2-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 > 0 \\ \log(3x^2-2x) > 0 \end{array} \right] \text{ ή } \left[\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ \log(3x^2-2x) < 0 \end{array} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 > 0 \\ 3x^2-2x > 1 \end{array} \right] \text{ ή } \left[\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ 3x^2-2x < 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow (x-2)(3x^2-2x-1) > 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(x > 2 \text{ ή } -\frac{1}{3} < x < 1\right).
\end{aligned}$$

Και επειδή επιπλέον είναι $x \in D$, βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι: $S = \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (2, +\infty)$.

Παράδειγμα 2. Να λυθεί η ανίσωση: $(2x^2 - 3x)^{x-2} < 1$ (2)

Λύση. Το σύνολο ορισμού καθεμιάς από τις συναρτήσεις με τύπους: $2x^2 - 3x$ και $x - 2$ είναι το $\mathbb{R}$. Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της συνάρτησης του πρώτου μέλους της ανίσωσης (2), αν, και μόνο αν :

$$\begin{aligned}
&\left[2x^2 - 3x > 0 \text{ ή } \begin{cases} 2x^2 - 3x = 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2x^2 - 3x < 0 \\ (x-2) \in \mathbb{Z} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \\
&\left[\left(x < 0 \text{ ή } x > \frac{3}{2} \right) \text{ ή } \begin{cases} \left(x = 0 \text{ ή } x = \frac{3}{2} \right) \\ x > 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \left(0 < x < \frac{3}{2} \right) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left(x < 0 \text{ ή } x > \frac{2}{3} \right) \text{ ή } x = 1.
\end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι: $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

- Με $x = 1$ το πρώτο μέλος της ανίσωσης (2) γίνεται: $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = -1$. Άρα, το -1 είναι μια λύση της ανίσωσης αυτής.

- Με $x \in D$ και $x \neq 1$, ισχύει: $2x^2 - 3x > 0$. Έτσι, τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow (x-2)\log(2x^2-3x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 > 0 \\ \log(2x^2-3x) < 0 \end{array} \right] \text{ ή } \left[\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ \log(2x^2-3x) > 0 \end{array} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 > 0 \\ 2x^2-3x < 1 \end{array} \right] \text{ ή } \left[\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ 2x^2-3x > 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \\
&\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ \left(\frac{3-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{4} \right) \end{array} \right] \text{ ή } \left[\begin{array}{l} x < 2 \\ \left(x < \frac{3-\sqrt{17}}{4} \text{ ή } x > \frac{3+\sqrt{17}}{4} \right) \end{array} \right] \\
&\Leftrightarrow \left(x < \frac{3-\sqrt{17}}{4} \text{ ή } \frac{3+\sqrt{17}}{4} < x < 2 \right).
\end{aligned}$$

Έτσι, βρίσκουμε ότι το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι:

$$S = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}, 2\right).$$

Παράδειγμα 3. Να λυθεί η ανίσωση:

$$(x^2 - 3x + 3)^{2x^2 - 3x + 1} < (x^2 - 3x + 3)^{x^2 + x - 2}. \quad (3)$$

Απάντηση. $2 < x < 3$

13. Παραμετρικές ανισώσεις.

Μια ανίσωση λέμε ότι είναι **παραμετρική ανίσωση** αν, και μόνο αν, εκτός από τον άγνωστο x περιέχει και άλλα γράμματα (ένα ή περισσότερα), τα οποία όμως υποθέτουμε ότι παριστάνουν δοσμένους αριθμούς. Τα γράμματα αυτά ονομάζονται **παράμετροι** της ανίσωσης.

- Η διαδικασία με την οποία, για κάθε συνδυασμό τιμών των παραμέτρων, βρίσκουμε αν υπάρχουν λύσεις της ανίσωσης και ποιες είναι, ονομάζεται **διερεύνηση** της ανίσωσης αυτής.
- Όταν μια ανίσωση είναι παραμετρική στη λύση της συμπεριλαμβάνεται και η διερεύνηση.

Παράδειγμα. Να λυθεί η ανίσωση:

$$x - 1 > \sqrt{x - \lambda} \quad (1)$$

με άγνωστο το x και παράμετρο το $\lambda \in \mathbb{R}$.

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \lambda\}$. Με $x \in D$, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ (x - 1)^2 > x - \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ f(x) = x^2 - 3x + (\lambda + 1) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x)$ είναι:

$$\Delta = 9 - 4(\lambda + 1) = -4\lambda + 5 \begin{cases} < 0, \text{ αν } \lambda > \frac{5}{4} \\ = 0, \text{ αν } \lambda = \frac{5}{4} \\ > 0, \text{ αν } \lambda < \frac{5}{4} \end{cases}$$

1) Έστω ότι: $\lambda > \frac{5}{4}$. Τότε $\Delta < 0$ και άρα η (3) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τότε, ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της δοσμένης ανίσωσης, αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases} x \in D \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \lambda \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \lambda.$$

- Άρα, τότε, το σύνολο λύσεων είναι: $S = [\lambda, +\infty)$.

2) Έστω ότι: $\lambda = \frac{5}{4}$. Τότε $\Delta = 0$ και :

$$\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Έτσι, τότε, ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της δοσμένης ανίσωσης, αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases} x \in D \\ x > 1 \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{4} \\ x \neq \frac{3}{2} \end{cases}$$

• Άρα, τότε, το σύνολο λύσεων είναι: $S = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$.

3) Έστω ότι: $\lambda < \frac{5}{4}$. Τότε $\Delta > 0$. Άρα, τότε, το τριώνυμο $f(x)$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και

άνισες, τις εξής: $\rho_1 = \frac{3 - \sqrt{\Delta}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{3 + \sqrt{\Delta}}{2}$ ($\rho_1 < \rho_2$) και συνεπώς:

$$\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x < \rho_1 \text{ ή } x > \rho_2) \end{cases}$$

Έτσι, τότε, ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ είναι λύση της δοσμένης ανίσωσης, αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases} x \in D \\ x > 1 \\ (x < \rho_1 \text{ ή } x > \rho_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \lambda \\ x > 1 \\ (x < \rho_1 \text{ ή } x > \rho_2) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

Τώρα, για να συνεχίσουμε, θα πρέπει να ξέρουμε την σειρά μεγέθους των αριθμών: $\lambda, 1, \rho_1$ και ρ_2 .

Παρατηρούμε ότι: $f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \geq 0$ και άρα το λ δεν ανήκει στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) . Αν $\lambda \geq \rho_2$, τότε:

$$\lambda \geq \frac{3 + \sqrt{5 - 4\lambda}}{2} \Rightarrow 2\lambda - 3 \geq \sqrt{5 - 4\lambda} \Rightarrow 2\lambda - 3 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq \frac{3}{2}, \text{ άτοπο.}$$

Συνεπώς: $\lambda \leq \rho_1$. Έχουμε:

$$\lambda = \rho_1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 - \sqrt{5 - 4\lambda}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{5 - 4\lambda} = 3 - 2\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\lambda \geq 0 \\ 5 - 4\lambda = (3 - 2\lambda)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

3α) Έστω ότι $\lambda = 1$. Τότε: $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 2$. Και, όπως βρίσκουμε εύκολα, έχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow x > 2.$$

• Άρα, τότε, το σύνολο λύσεων είναι: $S = (2, +\infty)$.

3β) Έστω ότι $\lambda < 1$. Τότε $\lambda < \rho_1$ και επειδή $f(1) = \lambda - 1 < 0$, έπεται ότι: $\rho_1 < 1 < \rho_2$, οπότε: $\lambda < \rho_1 < 1 < \rho_2$. Και, όπως βρίσκουμε εύκολα, έχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow x > \rho_2.$$

• Άρα, τότε, το σύνολο λύσεων είναι: $S = (\rho_2, +\infty)$.

3γ) Έστω ότι $1 < \lambda < \frac{5}{4}$. Τότε $\lambda < \rho_1$, οπότε: $1 < \lambda < \rho_1 < \rho_2$. Και, όπως βρίσκουμε εύκολα, έχουμε:

$$(\Sigma) \Leftrightarrow (\lambda \leq x < \rho_1 \text{ ή } x > \rho_2).$$

• Άρα, τότε, το σύνολο λύσεων είναι: $S = [\lambda, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$.

Συνοπτικά:

$$\lambda > \frac{5}{4}: S = [\lambda, +\infty)$$

$$\lambda = \frac{5}{4}: S = \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

$$1 < \lambda < \frac{5}{4}: S = [\lambda, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$$

$$\lambda \leq 1: S = (\rho_2, +\infty)$$

$$\text{όπου: } \rho_1 = \frac{3 - \sqrt{5 - 4\lambda}}{2}, \rho_2 = \frac{3 + \sqrt{5 - 4\lambda}}{2}$$

14. Συναληθεύουσες ανισώσεις.

Όταν έχουμε δύο ή περισσότερες ανισώσεις με ένα άγνωστο x (σύστημα ανισώσεων με ένα άγνωστο) και ζητάμε να βρούμε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν (αληθεύουν μαζί) (δηλαδή, ζητάμε να επιλύσουμε το σύστημα αυτό), εργαζόμαστε συνήθως ως εξής:

α) Επιλύουμε καθεμία από τις ανισώσεις αυτές (του συστήματος) χωριστά.

β) Πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών σημειώνουμε τις λύσεις κάθε μιας ανίσωσης.

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος που φτιάχνουμε βρίσκουμε εύκολα τις τιμές του x που συναληθεύουν.

15. Ανισώσεις και Μαθηματική Ανάλυση.

Μερικές φορές για να λύσουμε μια ανίσωση χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Παράδειγμα. Να λυθεί η ανίσωση: $3^{x-2}(x-2)^3(x^3-1) < 3^x - 1$ (1)

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Με $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)^3(x^3-1) < 3^{2-x}(3^x-1) \Leftrightarrow x^3(x-2)^3 - (x-2)^3 < 3^{2x-x^2} - 3^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2-x} - (x-2)^3 < 3^{2x-x^2} - (x^2-2x)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} - (x-2)^3 < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} - (x^2-2x)^3 \quad (2).$$

Παρατηρούμε ότι και τα δύο μέλη της ανίσωσης αυτής προκύπτουν από την συνάρτηση f με

τύπο: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - x^3$, θέτοντας για το πρώτο μέλος όπου x το $x-2$ και για το δεύτερο μέλος

όπου x το $x^2 - 2x$. Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3} - 3x^2 < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι, έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow f(x-2) < f(x^2-2x) \Leftrightarrow x-2 > x^2-2x \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

• Άρα, το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι το διάστημα: $S = (1, 2)$.

Σημείωση. Σε πολλές περιπτώσεις, με τη βοήθεια της πρότασης: « **Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει: $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f έχει σταθερό πρόσημο στο Δ** », και με την προϋπόθεση ότι έχουμε βρει τις ρίζες της $f(x)=0$, μπορούμε να βρίσκουμε το πρόσημο των τιμών της $f(x)$, και κατ' επέκταση, να επιλύουμε α-

νισώσεις της μορφής $f(x) < 0$ ($f(x) > 0$), επιλέγοντας κατάλληλο αριθμό σε κάθε διάστημα που σχηματίζουν οι ρίζες.

16. Βασικές τριγωνομετρικές ανισώσεις.

Η επίλυση των τριγωνομετρικών ανισώσεων (ανισώσεις που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις) ανάγεται συνήθως στην επίλυση των παρακάτω βασικών τριγωνομετρικών ανισώσεων. Η δε επίλυση των βασικών τριγωνομετρικών ανισώσεων στηρίζεται στο γεγονός ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις: $\sin x$, $\eta\mu x$, $\epsilon\phi x$ (όπως και $\sigma\phi x$) είναι περιοδικές στο σύνολο ορισμού τους. Οι συναρτήσεις $\sin x$ και $\eta\mu x$ έχουν σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$ και περίοδο 2π . Η συνάρτηση $\epsilon\phi x$ έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R} - \left\{ \kappa \frac{\pi}{2} \mid \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$ και περίοδο π (η συνάρτηση $\sigma\phi x$ έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R} - \{ \kappa\pi \mid \kappa \in \mathbb{Z} \}$ και περίοδο π).

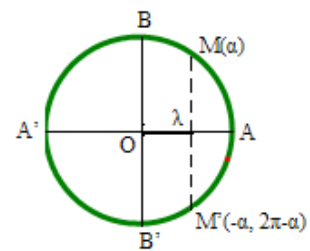
• $\sin x > \lambda$ (1), $\sin x < \lambda$ (2) | $-1 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda = \sin \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

— Οι λύσεις της (1) στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ (πλάτους μιας περιόδου) είναι: $-\alpha < x < \alpha$ και όλες οι λύσεις της είναι:

$$2\kappa\pi - \alpha < x < 2\kappa\pi + \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

— Οι λύσεις της (2) στο διάστημα $[0, 2\pi)$ (πλάτους μιας περιόδου) είναι: $\alpha < x < 2\pi - \alpha$ και όλες οι λύσεις της είναι:

$$2\kappa\pi + \alpha < x < (2\pi - \alpha) + 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$



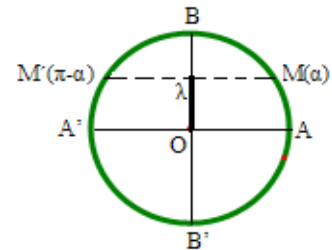
• $\eta\mu x > \lambda$ (3), $\eta\mu x < \lambda$ (4) | $-1 \leq \lambda \leq 1$, $\lambda = \eta\mu \alpha$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

— Οι λύσεις της (3) στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (πλάτους μιας περιόδου) είναι: $\alpha < x < \pi - \alpha$ και όλες οι λύσεις της είναι:

$$2\kappa\pi + \alpha < x < (\pi - \alpha) + 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

— Οι λύσεις της (4) στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ (πλάτους μιας περιόδου) είναι: $\pi - \alpha < x < 2\pi + \alpha$ και όλες οι λύσεις της είναι:

$$2\kappa\pi + (\pi - \alpha) < x < (2\pi + \alpha) + 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$



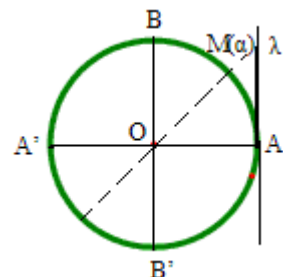
• $\epsilon\phi x > \lambda$ (5), $\epsilon\phi x < \lambda$ (6) | $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = \epsilon\phi \alpha$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

— Οι λύσεις της (5) στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (πλάτους μιας περιόδου) είναι: $\alpha < x < \frac{\pi}{2}$ και όλες οι λύσεις της είναι:

$$\kappa\pi + \alpha < x < \frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

— Οι λύσεις της (6) στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (πλάτους μιας περιόδου) είναι: $-\frac{\pi}{2} < x < \alpha$ και όλες οι λύσεις της είναι:

$$\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < x < \alpha + \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$



Σημείωση. Στις παραπάνω περιπτώσεις, η επιλογή του διαστήματος πλάτους μιας περιόδου έγινε κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι λύσεις εντός του διαστήματος αυτού να είναι ένα διάστημα και όχι η ένωση δύο ή περισσότερων διαστημάτων και τούτο για να εκφράσουμε απλούστερα τις λύσεις. Δεν συνιστώ να αποστηθίσουν οι μαθητές τα διαστήματα αυτά. Είναι εύκολο να τα βρίσκουν πάνω στο τριγωνομετρικό κύκλο.

17. Γενικές παρατηρήσεις και σχόλια.

1) Το σύμβολο της ανισότητας στις ανισώσεις.

Όπως στις εξισώσεις με το σύμβολο της ισότητας, έτσι και στις ανισώσεις τα σύμβολα $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ που γράφουμε δεν έχουν την έννοια των ανισοτήτων όπως τις ξέρουμε στα Μαθηματικά. Ούτε έχουν τις ιδιότητες αυτών. Οι ανισώσεις δεν είναι ανισότητες.

Για παράδειγμα, το $<$ σε μια ανίσωση $f(x) < g(x)$ ούτε ισχύει ούτε ζητείται να αποδειχθεί. Οι ανισώσεις δεν είναι ανισότητες συναρτήσεων. Αυτό πρέπει να τονίζεται ιδιαίτερα στους μαθητές ώστε να μην αντιμετωπίζουν τις ανισώσεις σαν ανισότητες και να μην εφαρμόζουν τις ιδιότητες των ανισοτήτων για να λύσουν μια ανίσωση (όπως δυστυχώς γράφουν τα σχολικά βιβλία).

Όπως στις εξισώσεις, ένας τρόπος για να εμπεδώσουν οι μαθητές την έννοια της ανίσωσης είναι να γράφουμε τις ανισώσεις ως εξής:

$$f(x) \overset{?}{<} g(x), \quad f(x) \overset{?}{\leq} g(x) \text{ κτλ.}$$

Ίσως αυτό να είναι κουραστικό. Συμφωνώ. Τουλάχιστον όμως ας τις γράφουμε στην αρχή έτσι έως ότου καταλάβουν οι μαθητές περί τίνος πρόκειται. Εγώ αυτό έκανα στα μαθήματά μου και μπορώ να πω με επιτυχία.

2) Το σύμβολο της ισοδυναμίας στις ανισώσεις.

Επισημαίνουμε ότι, το σύμβολο της ισοδυναμίας « $\Leftrightarrow$ » έχει άλλη έννοια όταν το γράφουμε μεταξύ δύο προτάσεων και άλλη όταν το γράφουμε μεταξύ δύο ανισώσεων.

- Δεν είναι σωστό να προσπαθούμε να μάθουμε τους μαθητές, οποιασδήποτε τάξης, να λύνουν ανισώσεις χωρίς να τους έχουμε πει τότε δύο ανισώσεις είναι ισοδύναμες, γράφοντας την μία κάτω από την άλλη. Γιατί, κατ' αυτόν τον μηχανικό τρόπο, οι μαθητές δεν ξέρουν τι σχέση πρέπει να έχει κάθε μια ανίσωση που γράφουν με την προηγούμενη. Έτσι, ένας μαθητής μπορεί να σκεφτεί να γράψει μια δική του ανίσωση, άσχετη με την προηγούμενη!!! Γιατί όχι; Αφού κανένας δεν του έχει πει ποια σχέση πρέπει να έχει η ανίσωση που θα γράψει με την προηγούμενη. Ο ορισμός της ισοδυναμίας δύο ανισώσεων είναι πολύ απλός και μπορεί εύκολα να κατανοηθεί από ένα μαθητή, οποιασδήποτε τάξης. Δεν υπάρχει λοιπόν καμία δικαιολογία να διδάσκονται οι ανισώσεις (και οι εξισώσεις) κατά αυτόν τον μηχανικό και λανθασμένο τρόπο, τον οποίο, δυστυχώς, βλέπουμε και στα σχολικά βιβλία.

3) Το σύνολο αναφοράς στις ανισώσεις.

Στην επίλυση μιας ανίσωσης παίζει πρωτεύοντα ρόλο το σύνολο αναφοράς της, όπως και στις εξισώσεις.

Παράδειγμα. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{3} > 0 \quad (1)$$

με σύνολο αναφοράς: α) το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και β) το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Λύση. α) Με σύνολο αναφοράς το σύνολο $\mathbb{N}$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{N}^*$. Με $x \in \mathbb{N}^*$, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3-x}{3x} > 0 \Leftrightarrow 3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3.$$

- Άρα, το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι: $S = \{1, 2\}$.

β) Με σύνολο αναφοράς το σύνολο $\mathbb{R}$.

Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}^*$. Με $x \in \mathbb{R}^*$, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3-x}{3x} > 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

- Άρα, το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι το διάστημα: $S = (0, 3)$.

4) Σχετικά με το βαθμό μιας ανίσωσης.

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, μιλάμε για βαθμό μιας ανίσωσης μόνο όταν η ανίσωση αυτή είναι ακέραια. Έτσι, δεν έχει νόημα να ρωτάμε ποίου βαθμού είναι, για παράδειγμα, οι ανισώσεις:

$$\frac{x-1}{x+2} < \frac{2}{x} + 3, \quad \sqrt{x+3} \geq x+1, \quad 3^{2x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} + 1 < 0, \quad \log(x-2) + \log(x+1) \leq 1.$$

5) Εξαφάνιση του αγνώστου.

Όταν λύνουμε μια ανίσωση (όπως και όταν λύνουμε μια εξίσωση) δεν πρέπει να εξαφανίζουμε τον άγνωστο x , γιατί ανίσωση χωρίς άγνωστο δεν έχει νόημα. Για παράδειγμα, δεν πρέπει να γράφουμε:

$$3x - 2 > 3x + 1 \Leftrightarrow -2 > 1.$$

Το σωστό είναι :

$$3x - 2 > 3x + 1 \Leftrightarrow 3x - 3x > 2 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 3 \text{ (αδύνατη)}.$$

6) απαλοιφή των παρονομαστών.

Οι μαθητές, όταν θέλουν να λύσουν μια ανίσωση, για παράδειγμα, της μορφής:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{h(x)}{r(x)} \quad (1)$$

συχνά κάνουν το λάθος να κάνουν απαλοιφή παρονομαστών και να γράφουν την ανίσωση ως εξής: $f(x)r(x) > h(x)g(x)$. Πρέπει να τους τονίζεται ιδιαίτερα ότι:

α) Κατ' αυτόν τον τρόπο, ουσιαστικά πολλαπλασιάζουν και τα δύο μέλη της ανίσωσης (1) με: $g(x) \cdot r(x)$. Αλλά για να είναι σωστό αυτό, σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα, θα πρέπει να ισχύει: $g(x) \cdot r(x) > 0$, για κάθε x που ανήκει στο σύνολο ορισμού της ανίσωσης (1). Διαφορετικά δεν είναι σωστό.

β) Ο γενικός τρόπος επίλυσης της ανίσωσης (1) είναι ο εξής: Καταρχήν βρίσκουμε το σύνολο ορισμού της, έστω D . Με $x \in D$, έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{r(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)r(x) - h(x)g(x)}{g(x)r(x)} > 0 \Leftrightarrow [f(x)r(x) - h(x)g(x)]g(x)r(x) > 0 \text{ κτλ.}$$

18) Διάφορες ασκήσεις ανισώσεων.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί η ανίσωση:

$$x^4 - 8x^3 + 23x^2 + 28x + 12 < 0. \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι το $\mathbb{R}$. Με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 7x^2 - 28x + 12 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 < 0 \quad (2).$$

Το πρώτο μέλος της ανίσωσης (2) είναι ένα τριώνυμο ως προς: $x^2 - 4x$, του οποίου οι ρίζες είναι: -4 και -3 . Έτσι, έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow -4 < x^2 - 4x < -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 > 0 \\ (x-1)(x-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ 1 < x < 3 \end{cases},$$

- Άρα, το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι $S = (1, 2) \cup (2, 3)$.

Παράδειγμα 2. Να λυθεί η ανίσωση:

$$(x-6)^4 + (x-8)^4 \leq 16. \quad (1)$$

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής είναι το $\mathbb{R}$. Με $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow [(x-7)+1]^4 + [(x-7)-1]^4 \leq 16 \quad (2).$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα:

$$(A+B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$$

με $A = x-7$ και $B=1$ και μετά με $A = x-7$ και $B = -1$, μετά τις πράξεις βρίσκουμε:

$$(2) \Leftrightarrow (x-7)^4 + 6(x-7)^2 - 7 \leq 0 \Leftrightarrow [(x-7)^2 - 1][(x-7)^2 + 7] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)(x-6) \leq 0 \Leftrightarrow 6 \leq x \leq 8.$$

• Άρα, το σύνολο λύσεων της δοσμένης ανίσωσης είναι: $S = [6, 8]$.

Σημείωση. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να επιλύσουμε μια οποιαδήποτε ανίσωση (ή εξίσωση) με πρώτο μέλος της μορφής: $(x-\alpha)^4 + (x-\beta)^4$ και δεύτερο μέλος ένα πραγματικό αριθμό. Ο γενικός τρόπος είναι να θέσουμε το πρώτο μέλος υπό τη μορφή:

$$\left[\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) - \frac{\alpha-\beta}{2} \right]^4 + \left[\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) + \frac{\alpha-\beta}{2} \right]^4$$

και μετά να εφαρμόσουμε την παραπάνω ταυτότητα.

Παράδειγμα 3. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1 \right) \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x} \left(\sqrt{-2x^2 + 8x - 6} + 1 \right) > 0. \quad (1)$$

Λύση. Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής αν, και μόνο αν:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x > 0 \\ -2x^2 + 8x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=3).$$

Άρα, το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι: $D = \{1, 3\}$.

Με $x=1$ το πρώτο μέλος της ανίσωσης (1) γίνεται: $\log_5 \frac{1}{5} + 1 = -1 + 1 = 0$ και με $x=3$ γίνεται:

$$\log_5 \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \log_5 3 - 1 + \frac{1}{3} = \log_5 3 - \frac{2}{3} = \log_5 3 - \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \log_5 \left(3 \cdot 5^{-\frac{2}{3}} \right) > 0,$$

γιατί: $3 \cdot 5^{-\frac{2}{3}} > 1$. Άρα, η δοσμένη ανίσωση έχει τη μοναδική λύση $x=3$.

Παράδειγμα 4. Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha \in \mathbb{R}$, για τους οποίους η ανίσωση:

$$1 + \log_5 (x^2 + 1) \geq \log_5 (\alpha x^2 + 4x + \alpha)$$

έχει σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$ και επαληθεύεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Ένας αριθμός $x \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο ορισμού της ανίσωσης αυτής αν, και μόνο αν: $\alpha x^2 + 4x + \alpha > 0$. Έτσι, ζητάμε τους αριθμούς $\alpha \in \mathbb{R}$, για τους οποίους για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \alpha x^2 + 4x + \alpha > 0 \\ 1 + \log_5 (x^2 + 1) \geq \log_5 (\alpha x^2 + 4x + \alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x^2 + 4x + \alpha > 0 \\ \log_5 5 (x^2 + 1) \geq \log_5 (\alpha x^2 + 4x + \alpha) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x^2 + 4x + \alpha > 0 \\ 5(x^2 + 1) \geq \alpha x^2 + 4x + \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x^2 + 4x + \alpha > 0 \\ (\alpha - 5)x^2 + 4x + \alpha - 5 \leq 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

1) Έστω ότι: $\alpha=0$. Τότε η (1) δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) Έστω ότι: $\alpha=5$. Τότε η (2) δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3) Έστω ότι: $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 5$. Τότε:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha > 0, 16 - 4\alpha^2 < 0) \\ (\alpha - 5 < 0, 16 - 4(\alpha - 5)^2 \leq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha > 0, \alpha^2 > 4) \\ (\alpha - 5 < 0, (\alpha - 5)^2 \geq 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha > 0, |\alpha| > 2) \\ (\alpha - 5 < 0, |\alpha - 5| \geq 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 2 \\ (\alpha < 5, -\alpha + 5 \geq 2) \end{cases} \Leftrightarrow 2 < \alpha \leq 3.$$

Άρα, οι ζητούμενες τιμές του α είναι οι αριθμοί του διαστήματος $(2, 3]$.

Παράδειγμα 5. Να λυθεί η ανίσωση: $\eta\mu^4 x + \eta\mu^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{4}$. (1)

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $\mathbb{R}$. Με $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 + \left[\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \eta\mu 2x}{2}\right)^2 < \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x - \eta\mu 2x > 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x - \epsilon\phi \frac{\pi}{4} \eta\mu 2x > 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \eta\mu 2x \eta\mu \frac{\pi}{4} > \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \quad (2). \end{aligned}$$

Οι λύσεις της (2) στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ είναι: $-\frac{\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$ και όλες οι λύσεις της, που είναι και οι ζητούμενες λύσεις της (1), είναι:

$$2k\pi - \frac{\pi}{4} < 2x + \frac{\pi}{4} < 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 6. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\log_{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x + \log_{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x \leq 2 \quad (1)$$

με σύνολο αναφοράς το διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν: $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ και $0 < \eta\mu x < 1$. Έτσι, το σύνολο ορισμού

της ανίσωσης αυτής ταυτίζεται με το σύνολο αναφοράς της $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, Έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{\log \sigma\upsilon\nu x}{\log \eta\mu x} + \frac{\log \eta\mu x}{\log \sigma\upsilon\nu x} \leq 2 \quad [\epsilon\pi\epsilon\iota\delta\acute{\eta} (\log \eta\mu x)(\log \sigma\upsilon\nu x) > 0] \\ &\Leftrightarrow \log^2 \sigma\upsilon\nu x + \log^2 \eta\mu x \leq 2 \log \sigma\upsilon\nu x \cdot \log \eta\mu x \Leftrightarrow (\log \sigma\upsilon\nu x - \log \eta\mu x)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \log \sigma\upsilon\nu x = \log \eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Άρα, η μοναδική λύση της δοσμένης ανίσωσης είναι $x = \frac{\pi}{4}$.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.

Ευχαριστώ τους συναδέλφους:
Δημήτρη Χριστοφίδη, Γιώργο Τασσόπουλο και Νίκο Αντωνόπουλο
για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Θ. Ν. Καζαντζή: «ΑΛΓΕΒΡΑ», τόμος 1.
2. Κ. Καμπούκου – Γ. Τασσόπουλου: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 1»
3. Σ. Γ. Κανέλλου: «ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ»
4. Α. Κ. Κυριακόπουλου: «ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ»
5. Α. Κ. Κυριακόπουλου: «ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ».
6. Α. Κ. Κυριακόπουλου: «ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ», τόμος 1.
7. Π. Ν. Μάγειρα: «ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ».
8. V.V.Vavilov, I. I. Melnikov, S. N. Olekhnik, P. I. Pasichenko: «EQUATIONS AND INEQUALITIES».
9. G. Dorofeev, M. Potapov, N. Rozov: «ELEMENTARY MATHEMATICS».
10. John. M. H. Olmsted: «THE REAL NUMBER SYSTEM».
11. Περιοδικό της Ε.Μ.Ε.: «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄», τεύχος 40, άρθρο Γ. Τασσόπουλου.
12. Περιοδικό της Ε.Μ.Ε.: «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄», τεύχος 83, άρθρο Δ. Γιάνναρου.
13. www.mathematica.gr

Αθήνα 3-6-2012