3.1 Μετασχηματισμός (αντιστροφή) Kelvin

Ορισμός

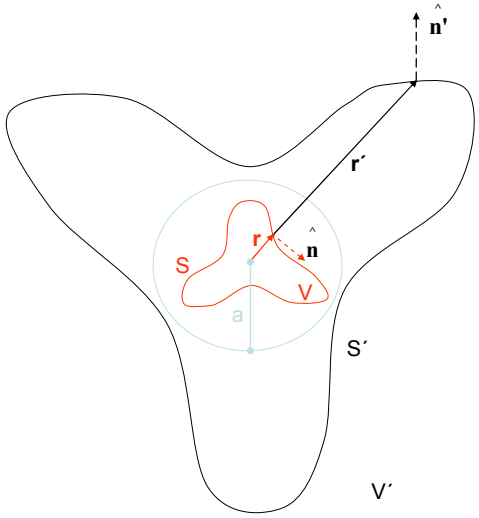
Η αντιστροφή Kelvin (ή **μετασχηματισμός Kelvin)** είναι ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το εσωτερικό μιας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$ στο αντίστοιχο εξωτερικό της και αντιστρόφως.

Αν $a > 0$ είναι η ακτίνα της σφαίρας αντιστροφής, που βρίσκεται στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ είναι το διάνυσμα θέσης του αρχικού σημείου και $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$ είναι το διάνυσμα θέσης του τελικού σημείου που προκύπτει από τον μετασχηματισμό Kelvin K, ισχύει ότι

$$\mathrm{K} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{r}' := \mathrm{K}(\mathbf{r}) := \left(\frac{a}{\mathrm{r}}\right)^2 \mathbf{r},\ \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \tag{3.1.1}$$

όπου

$$|\mathbf{r}| = \mathrm{r}. \tag{3.1.2}$$



Σχήμα 22: Μετασχηματισμός Kelvin – η γενική περίπτωση

Για τον μετασχηματισμό Kelvin και αν

$$\mathrm{r}' = |\mathbf{r}'|, \tag{3.1.3}$$

ισχύει ότι

$$\mathrm{r}'\mathrm{r} = a^2, \tag{3.1.4}$$

αφού παίρνοντας μέτρα στον ορισμό (3.1.1) ισχύει

$$\mathrm{r}' = \frac{a^2}{\mathrm{r}^2}\mathrm{r}$$

ή

$$r' = \frac{a^2}{r}$$

άρα

$$r'r = a^2 . \tag{3.1.5}$$

Επίσης ο μετασχηματισμός αντιστρέφεται και ισχύει ότι

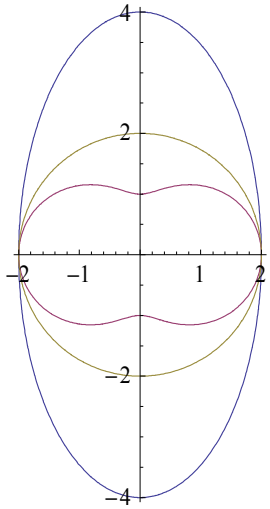
$$\mathbf{r} = \left(\frac{a}{r'}\right)^2 \mathbf{r'}, \; r' \neq 0 , \tag{3.1.6}$$

αφού

$$\left(\frac{a}{r'}\right)^2 \mathbf{r'} \overset{(3.1.1)}{=} \left(\frac{a}{r'}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{r} = \left(\frac{aa}{r'r}\right)^2 \mathbf{r} \overset{(3.1.4)}{=} \left(\frac{a^2}{a^2}\right)^2 \mathbf{r} = \mathbf{r} . \tag{3.1.7}$$

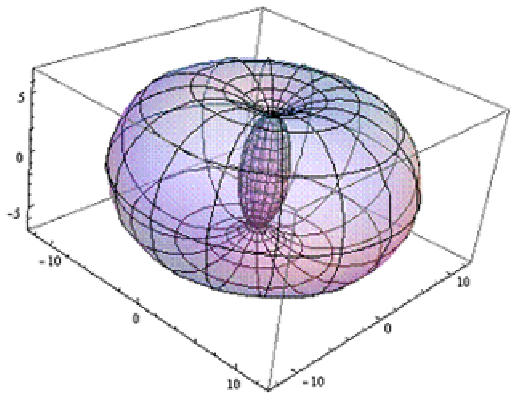
Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι ο μετασχηματισμός Kelvin αντιστρέφει τα σημεία που είναι κοντά στην σφαίρα αντιστροφής σε σημεία επίσης κοντά στη σφαίρα αντιστροφής, αλλά από την άλλη πλευρά της σφαίρας. Επίσης τα σημεία που βρίσκονται κοντά στο κέντρο της σφαίρας αντιστροφής απεικονίζονται σε σημεία της περιοχής του απείρου.

Στο σχήμα 23 παραθέτουμε τον δισδιάστατο μετασχηματισμό Kelvin πάνω στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ όπου ο κύκλος αντιστροφής έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$.



Σχήμα 23: Δισδιάστατος μετασχηματισμός Kelvin

ενώ στο σχήμα 24 παραθέτουμε τον τρισδιάστατο μετασχηματισμό Kelvin



Σχήμα 24: Τρισδιάστατος μετασχηματισμός Kelvin

Είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ότι ο μετασχηματισμός Kelvin γενικά ισχύει στον χώρο $\mathbb{R}^n$ για $n \geq 2$.

Ιδιότητες αντιστροφής Kelvin

Ο μετασχηματισμός Kelvin είναι ένας μονοδιάστατος ακτινικός μετασχηματισμός, γιατί τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα των $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ είναι ίσα, δηλαδή

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}', \tag{3.1.8}$$

αφού

$$\hat{\mathbf{r}}' = \frac{\mathbf{r}'}{r'} \overset{(3.1.1)}{=} \frac{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{r}}{r'} \overset{(3.1.4)}{=} \frac{\frac{a^2}{r^2}}{\frac{a^2}{r}} \mathbf{r} = \frac{a^2 \mathbf{r}}{a^2 r^2} \mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}.$$

Θεώρημα : Ο μετασχηματισμός Kelvin στο χώρο $\mathbb{R}^3$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Διατηρεί αναλλοίωτη τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

(β) Η σχέση που συνδέει το στοιχειώδες εμβαδό ds, πάνω στην επιφάνεια S, με το μετασχηματισμένο στοιχειώδες εμβαδό ds' πάνω στη μετασχηματισμένη επιφάνεια S', είναι

$$\frac{ds}{r^2} = \frac{ds'}{r'^2}. \tag{3.1.9}$$

(γ) Αντιστρέφει τις σφαίρες σε σφαίρες, όπου με την ονομασία σφαίρα θεωρούμε τις σφαίρες με άπειρη ακτίνα, δηλαδή, τα επίπεδα.

(δ) Κάθε επίπεδο αντιστρέφεται σε σφαίρα, που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής. Αντίστροφα, κάθε σφαίρα που διέρχεται από το κέντρο αντιστροφής αντιστρέφεται σε επίπεδο.

(ε) Οι ιδιότητες (α) – (δ) είναι ανεξάρτητες της επιλογής της ακτίνας αντιστροφής

Απόδειξη

Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{r}, \mathbf{r_1}, \mathbf{r_2} \in \mathbb{R}^3$, τα οποία μέσω του μετασχηματισμού Kelvin, με ακτίνα της σφαίρας αντιστροφής a, αντιστοιχίζονται στα $\mathbf{r'}, \mathbf{r_1'}, \mathbf{r_2'} \in \mathbb{R}^3$. Τότε από τον ορισμό της αντιστροφής, έχουμε

$$\mathbf{r'} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{r} \ , \ \mathbf{r_1'} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{r_1} \ \text{και} \ \mathbf{r_2'} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathbf{r_2} .$$

(α) Επίσης θεωρούμε θ και θ' τις γωνίες που σχηματίζουν αντίστοιχα τα διανύσματα $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ και $\mathbf{r_1'}, \mathbf{r_2'}$, οπότε

$$\cos\theta' = \frac{\mathbf{r_1'} \cdot \mathbf{r_2'}}{r_1' r_2'} = \frac{\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 \mathbf{r_1} \cdot \left(\frac{a}{r_2}\right)^2 \mathbf{r_2}}{\frac{a^2}{r_1}\frac{a^2}{r_2}} = \frac{\frac{a^2}{r_1^2}\frac{a^2}{r_2^2} \mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2}}{\frac{a^2}{r_1}\frac{a^2}{r_2}} = \frac{\mathbf{r_1} \cdot \mathbf{r_2}}{r_1 r_2} = \cos\theta$$

και αφού $\theta, \ \theta' \in [0, \pi)$ ισχύει $\theta = \theta'$.

(β) $$\frac{ds'}{r'^2} = \frac{dx'dy'}{r'^2} \overset{(3.1.1)}{=} \frac{\frac{a^2}{r^2}dx\frac{a^2}{r^2}dy}{\left(\frac{a^2}{r}\right)^2} = \frac{\frac{a^4}{r^4}dxdy}{\frac{a^4}{r^2}} = \frac{dxdy}{r^2} = \frac{ds}{r^2} .$$

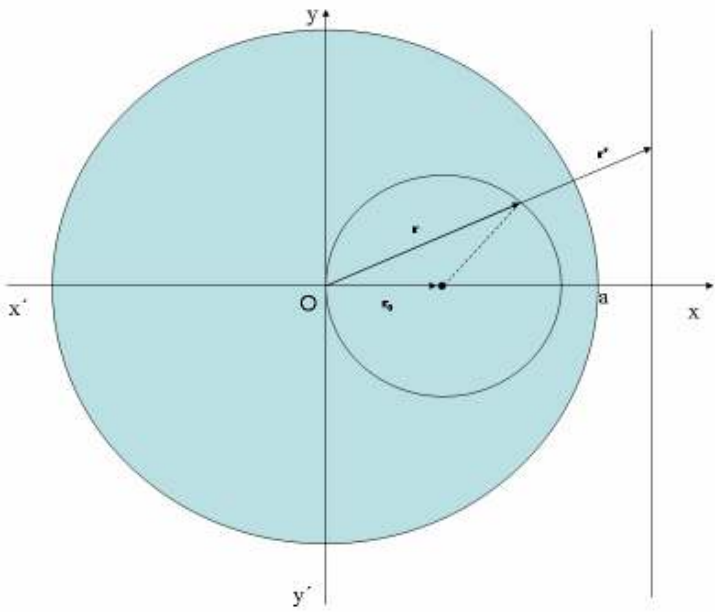
(γ) Έστω ότι το $\mathbf{r'} \in \mathbb{R}^3$ αντιστοιχεί σε σφαίρα ακτίνας $b > 0$, οπότε ισχύει $r = b$.

Τότε αφού $r'r = a^2$, ισχύει $r' = \frac{a^2}{r} \Leftrightarrow r' = \frac{a^2}{b}$,

δηλαδή η εικόνα του $\mathbf{r}$ ανήκει σε σφαίρα ακτίνας $\frac{a^2}{b}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

(δ)



Σχήμα 25: ……

Έστω $|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}| = |\mathbf{r_0}|$ με $|\mathbf{r_0}| = r_0$ η σφαίρα που διέρχεται από το (0, 0).

Τότε $\mathbf{r} = (r_0 + r_0 \sin\theta\cos\varphi, r_0 \sin\theta\sin\varphi, r_0\cos\theta)$ και

$$r^2 = (r_0 + r_0 \sin\theta\cos\varphi)^2 + (r_0 \sin\theta\sin\varphi)^2 + (r_0\cos\theta)^2 =$$

$$= r_0^2(1 + 2\sin\theta\cos\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta) =$$

$$= r_0^2(1 + 2\sin\theta\cos\varphi + \sin^2\theta + \cos^2\theta) =$$

$$= r_0^2(2 + 2\sin\theta\cos\varphi) = 2r_0^2(1 + \sin\theta\cos\varphi).$$

Συνεπώς

$$\mathbf{r'} = \left(a^2 \frac{r_0 + r_0\sin\theta\cos\varphi}{2r_0^2(1+\sin\theta\cos\varphi)}, a^2 \frac{r_0\sin\theta\sin\varphi}{2r_0^2(1+\sin\theta\cos\varphi)}, a^2 \frac{r_0\cos\theta}{2r_0^2(1+\sin\theta\cos\varphi)} \right)$$

ή

$$\mathbf{r'} = \left(\frac{a^2}{2r_0}, \frac{a^2\sin\theta\sin\varphi}{2r_0(1+\sin\theta\cos\varphi)}, \frac{a^2\cos\theta}{2r_0(1+\sin\theta\cos\varphi)} \right),$$

δηλαδή η εικόνα του $\mathbf{r}$ ανήκει στο επίπεδο με εξίσωση $x = \frac{a^2}{2r_0}$.

Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

(ε) Από τις παραπάνω αποδείξεις είναι φανερό ότι η ακτίνα αντιστροφής a δεν επηρεάζει τις ιδιότητες (α) – (δ).