

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$

$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}}$, $\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\chi}{\rho} \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{\chi}, \text{ με } \chi \neq 0 \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\chi}{\psi} \text{ με } \psi \neq 0$$

$$\text{όπου } \rho = \sqrt{\chi^2 + \psi^2}$$

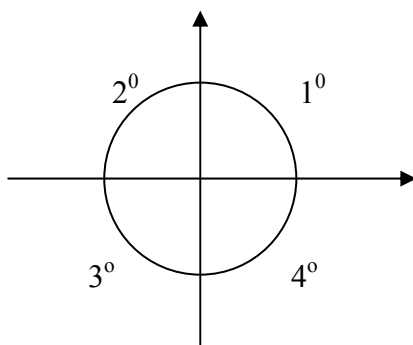
Γωνίες μεγαλύτερες των 360^0

$\eta\mu(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \eta\mu\omega$	$\epsilon\varphi(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \epsilon\varphi\omega$
$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\varphi(\kappa \cdot 360^0 + \omega) = \sigma\varphi\omega$

Ισχύει πάντα $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$ και $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$

Πρόσημα τριγωνομετρικών αριθμών

<u>τεταρτημοριο</u>	1^0	2^0	3^0	4^0
$\eta\mu\omega$	+	+	-	-
$\sigma\upsilon\nu\omega$	+	-	-	+
$\epsilon\varphi\omega$	+	-	+	-
$\sigma\varphi\omega$	+	-	+	-



Ακτίσιο ή rad είναι η γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο (Ο,ρ) βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου.

Ο τύπος που χρησιμοποιούμε για να μετατρέψουμε μία γωνία απο μοίρες σε rad και αντίστροφα είναι ο

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γνωστών τόξων

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
Σε μοίρες	Σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0 ⁰	0 ⁰	0	1	0	Δεν ορίζεται
30 ⁰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45 ⁰	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60 ⁰	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90 ⁰	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
$\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$	$\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$	$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$

Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Αντίθετες γωνίες

$\sin(-\omega) = \sin\omega$	$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$

Γωνίες με άθροισμα 180°

$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	$\sin(180^\circ - \omega) = -\sin\omega$
$\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$	$\sin(180^\circ + \omega) = -\sin\omega$
$\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \epsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$

Γωνίες με άθροισμα 90°

$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sin\omega$	$\sin(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
$\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \epsilon\varphi\omega$

• Περιοδική συνάρτηση

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική** όταν υπάρχει $T > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $\chi \in A$ να ισχύει:

$$\alpha) \chi + T \in A, \quad \chi - T \in A \quad \text{και} \quad \beta) f(\chi + T) = f(\chi - T) = f(\chi)$$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Οι συναρτήσεις $\eta\mu\chi$, $\sin\chi$ έχουν περίοδο 2π , ενώ οι συναρτήσεις $\epsilon\varphi\chi$, $\sigma\varphi\chi$ έχουν περίοδο π .

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
HMX	0	1	0	-1	0

(Ως **περιττή** συνάρτηση έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων $(0, 0)$).

X	0	$\frac{\Pi}{2}$	Π	$\frac{3\Pi}{2}$	2Π
ΣΥΝΧ	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1 ↘

(Ως **άρτια** συνάρτηση είναι **συμμετρική** ως προς τον άξονα ΰψ.)

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega\chi)$ όπου $\omega > 0$

- α) έχει μέγιστη τιμή το $|\rho|$ και ελάχιστη τιμή το $-|\rho|$
- β) η περίοδος της συνάρτησης είναι ίση με $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Τα ίδια ισχύουν και για τη συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega\chi)$.

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \varepsilon\varphi(\omega\chi)$

α) Έχει πεδίο ορισμού το :

$$A_f = \{x \in \mathbb{R} / \sigma\upsilon\nu(\omega\chi) \neq 0\} = \left\{ \chi \in \mathbb{R} / \omega\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \chi \in \mathbb{R} / \chi \neq \frac{\kappa\pi}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

- β) έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{\omega}$
- γ) δεν έχει ακρότατα

Η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \sigma\varphi(\omega\chi)$

α) έχει πεδίο ορισμού το :

$$A_g = \{x \in \mathbb{R} / \eta\mu\omega\chi \neq 0\} = \{ \chi \in \mathbb{R} / \omega\chi \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \} = \left\{ \chi \in \mathbb{R} / \chi \neq \frac{\kappa\pi}{\omega}, \kappa \in \mathbb{Z} \right\}$$

- β) έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{\omega}$
- γ) δεν έχει ακρότατα

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

- 1) $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \chi = 2κ\pi + \theta$ ή $\chi = 2κ\pi + \pi - \theta$, κ ακέραιος
- 2) $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \chi = 2κ\pi + \theta$ ή $\chi = 2κ\pi - \theta$, κ ακέραιος
- 3) $\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \theta$, κ ακέραιος
- 4) $\sigma\phi\chi = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \theta$, κ ακέραιος

Προσοχή!

Για να λύσουμε μια εξίσωση της μορφής $\epsilon\phi(f(x)) = \epsilon\phi(g(x))$ βάζουμε πρώτα περιορισμούς. Οι συναρτήσεις $\epsilon\phi(f(x))$ και $\epsilon\phi(g(x))$ ορίζονται όταν

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu(f(x)) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\triangleright \sigma\upsilon\nu(g(x)) \neq 0 \Leftrightarrow g(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Αντίστοιχα δουλεύουμε και κατα την επίλυση της εξίσωσης $\sigma\phi(f(x)) = \sigma\phi(g(x))$. Δηλαδή πρέπει

$$\triangleright \eta\mu(f(x)) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\triangleright \eta\mu(g(x)) \neq 0 \Leftrightarrow g(x) \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ελέγχουμε αν οι λύσεις ικανοποιούν τους περιορισμούς!

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$$

$$\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}, \quad \epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$$

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}, \quad \sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

Σχόλιο!

Για τις γωνίες A, B, Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $A + B + \Gamma = \pi$.

Άρα $A + B = \pi - \Gamma$ ή $A = \pi - (B + \Gamma)$ και στη συνέχεια παίρνουμε ισότητα τριγωνομετρικών αριθμών.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}$$

τύποι αποτετραγωνισμού:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

Μεθοδολογία

- Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = \beta$ λύνονται με τις αντικαταστάσεις $\eta\mu\chi = 2\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = 1 - 2\eta\mu^2\frac{\chi}{2}$
- Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = -\beta$ λύνονται με τις αντικαταστάσεις $\eta\mu\chi = 2\eta\mu\frac{\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\chi}{2} - 1$
- Οι εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot \eta\mu^2\chi + \beta \cdot \eta\mu 2\chi + \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$ γίνονται $\alpha \cdot \eta\mu^2\chi + 2\beta \cdot \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$. Αν $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ τότε θα ήταν και $\eta\mu\chi = 0$ ΑΤΟΠΟ. Άρα $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0$ όποτε διαιρούμε με $\sigma\upsilon\nu^2\chi$ την εξίσωση και έτσι αναγεται στη μορφή $\alpha \cdot \epsilon\varphi^2\chi + 2\beta \cdot \epsilon\varphi\chi + \gamma = 0$.
- Στις εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot \eta\mu^2\chi + \beta \cdot \eta\mu 2\chi + \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = \delta$ κάνουμε την αντικατάσταση $\delta = \delta \cdot 1 = \delta \cdot (\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) = \delta \cdot \eta\mu^2\chi + \delta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi$. Μετά την αντικατάσταση η εξίσωση ανάγεται στη μορφή $\kappa \cdot \eta\mu^2\chi + \beta \cdot \eta\mu 2\chi + \lambda \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = 0$ και δουλεύουμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση.