Έστω οι μιγαδικοί z ,w, u . Αν ισχύουν οι ισότητες |z|=|w|=|u|=p>0 (1) και z+w+u=0 (2) τότε $z^{2^n}+w^{2^n}+u^{2^n}=0$, n ∈ N*

Βοηθητική πρόταση:*** Ισχύει $\boxed{z^2=wu}$, $\boxed{w^2=zu}$, $\boxed{u^2=wz}$ (3) *(απόδειξη στο τέλος)*

Απόδειξη

για n=1 η πρόταση είναι αληθής αφού η αποδεικτέα γίνεται λόγω της (3) και της (2)

$z^2+w^2+u^2=z^2+zu+zw=z^2+z(u+w)=z^2+z(-z)=0$

έστω ότι ισχύει για n=n δηλαδή

$$z^{2^n}+w^{2^n}+u^{2^n}=0$$

Θα δείξουμε οτι ισχύει για n=n+1

Πράγματι

$$z^{2^n}+w^{2^n}+u^{2^n}=0$$

$$\to \left(z^{2^n}+w^{2^n}+u^{2^n}\right)^2=0$$

$$\to z^{2^{n+1}}+w^{2^{n+1}}+u^{2^{n+1}}+2z^{2^n}w^{2^n}+2z^{2^n}u^{2^n}+2w^{2^n}u^{2^n}=0$$

$$\to z^{2^{n+1}}+w^{2^{n+1}}+u^{2^{n+1}}+2(zw)^{2^n}+2(zu)^{2^n}+2(wu)^{2^n}=0$$

$$\xrightarrow{(3)} z^{2^{n+1}}+w^{2^{n+1}}+u^{2^{n+1}}+2(u^2)^{2^n}+2(w^2)^{2^n}+2(z^2)^{2^n}=0$$

$$\to z^{2^{n+1}}+w^{2^{n+1}}+u^{2^{n+1}}+2u^{2^{n+1}}+2w^{2^{n+1}}+2z^{2^{n+1}}=0$$

$$\to 3z^{2^{n+1}}+3w^{2^{n+1}}+3u^{2^{n+1}}=0$$

$$\to z^{2^{n+1}}+w^{2^{n+1}}+u^{2^{n+1}}=0$$

Που αποδεικνύει το ζητούμενο.

*****Βοηθητική πρόταση:** Ισχύει $\boxed{z^2=wu}$

Απόδειξη

$z+w+u=0\to z=-w-u\to |z|=|-w-u|\to |z|^2=|w|^2+|u|^2+w\bar{u}+\bar{w}u\to$

$-p^2=w\bar{u}+\bar{w}u\to -p^2=w\dfrac{p^2}{u}+\dfrac{p^2}{w}u\to -1=\dfrac{w}{u}+\dfrac{u}{w}\to -wu=w^2+u^2\to$

$-wu=(w+u)^2-2wu\to wu=(-z)^2\to \boxed{z^2=wu}$ *και ομοίως* $\boxed{w^2=zu}$, $\boxed{u^2=wz}$

1/9/2009 Γιαννόπουλος Παναγιώτης