ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Να βρεθούν, σε κάθε περίπτωση, οι ακέραιοι αριθμοί n, για τους οποίους:

α) $(3n+4)|(7n+1)$,
β) $(n+1)|(n^2+1)$,
γ) $(3n+2)|(5n^2+2n+4)$,
δ) $(2n+1)|(n^2+n-2)$.

2. Αν $a, b \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι

$$17|(2a+3b) \Leftrightarrow 17|(9a+5b)$$

3. Αν $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + x = 2n + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Έχει ακέραια ρίζα·

4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε ο αριθμός $4n+2$ να είναι τετράγωνο φυσικού. Αποδείξτε το ίδιο και για τους αριθμούς $4n+3, n^2+5n+5$.

5.
α) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$, ώστε ο αριθμός $n^3 + 3n$ να είναι περιττός.
β)Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι, ώστε

$$5x^3 - 4y^2 - 6xy + 15x + 6y - 5 = 0.$$

6. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι, ώστε

$$x^2 + y^2 - 8z = 6.$$

7. Να βρείτε τις τιμές του φυσικού αριθμού n, για τις οποίες ο αριθμός $A = n^3 - n^2 + n - 1$ είναι πρώτος.

8. Αν οι αριθμοί $a, a+2$ είναι πρώτοι και $a > 3$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $a+4$ είναι σύνθετος.

9. Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι ο $4^n + 2$ είναι πολλαπλάσιο του 6.

10. Σε πόσα μηδενικά λήγουν οι αριθμοί

$$10!,\ 100!,\ 1000!$$

.

11. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του φυσικού αριθμού n, για την οποία ο αριθμός 13^n διαιρεί το $500!$.

12. Να λύσετε την εξίσωση $1! + 2! + 3! + \cdots + x! = y^2$.

13. Αν ο αριθμός $62ab427$ είναι πολλαπλάσιο του 99, να βρείτε τα ψηφία a, b.

14. Σε κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις να βρείτε τους ακέραιους x, y:

α) $xy = x + y$, β) $x^2 - y^2 = 105$, γ) $x^5y^2 + 100x^3 = 200$,

δ) $x^3 = 91 + y^3$, ε) $6x^2 + 5y^2 = 74$, στ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$,

ζ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$, η) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p,}$ όπου p πρώτος.

15. Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο των αριθμών

$$2^{50},\ 3^{100}, 42^{42}.$$

16. Αν $n > 2$ ακέραιος, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z τέτοιοι, ώστε $x^n + y^n = z^n$.