ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z,w τέτοιοι, ώστε $w=\frac{z-3i}{1+i}$.

Α).

i) Αν w=2-2i, τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι:

Α)3 Β)4 Γ)5 Δ)2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ii) Αν $|w|=2\sqrt{2}$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

Β).

i) Αν $z=x+\psi i$ με $x,\psi\in R$ να αποδείξετε ότι:

$$Re(w)=\frac{x+\psi-3}{2},\ Im(w)=\frac{-x+\psi-3}{2}$$

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$Arg(w)=\frac{\pi}{4}.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=xlnx-2x.

α). Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β). Να αποδείξετε ότι $\ln x\geq 2-\frac{e}{x}$, για κάθε χ>0.

γ). Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες x = 1, x = e.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$. f(0)=1 και f'(0)=0.

Να αποδείξετε ότι:

α). η συνάρτηση $g(x)=\frac{f'(x)+f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή.

β). $(f(x)\cdot e^x)'=e^{2x},\forall x\in R$.

γ). ο τύπος της f είναι $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2002

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=1-2i$ και $z_2=3+4i$

α). Αν $\frac{z_2}{z_1}=x+yi,\ \ x,y\in R,$ να αποδείξετε ότι $x=-1$ και $y=2$.

β). Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2+\beta x+2\gamma=0$, όπου $\beta,\ \gamma\in R$, είναι η $\frac{z_1}{z_2}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

γ). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $|z-2z_1|=|z_2|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+4+\frac{1}{2x+4}$.

α). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

β). Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

γ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0,\ x=1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(1)=0$ και $xf'(x)-2f(x)=x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β). Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ). Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{(\ln x)^2}$.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2003

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x-3, & x\leq -\frac{4}{3}\\ 2x+1, & x>-\frac{4}{3}\end{cases}$

α). Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=-\frac{4}{3}$.

β). Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-\frac{4}{3}$.

γ). Για $x\neq -\frac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x)+f'(x)=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z)=\frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z\neq 0$.

α). Αν $|f(z)|=|f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

β). Αν $|f(z)|=1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ). Αν $\mathrm{Re}(f(z))=2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0)=0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$:

α). Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιος ώστε $f(x)=x\cdot f'(\xi)$.

β). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}+e^x$, $x>0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0,\ +\infty)$.

γ). Αν $h(x)=e^x+x^5+x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e-1} f(x+1)dx$

ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2004

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ \alpha x+\beta & 0<x<1\\ 1+x\ln x & x\ge 1\end{cases}$ όπου $\alpha,\beta\in R$.

α). Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο Πεδίο Ορισμού της.

β). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει α=1 και β=0, τότε

i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

ii) Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Θέμα 3°

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z, με $z\neq\pm i$, και $w=\dfrac{z}{z^2+1}$.

α). Να αποδείξετε ότι εάν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.

β). Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

γ). Αν z_1,z_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος β, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\dfrac{(z_1\cdot z_2)^3-i}{4+(z_1+z_2)^2}$.

Θέμα 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta=(0,\infty)$, για την οποία ισχύει

$f(x)=x^2-1+\dfrac{1}{x+1}\int_1^x f(t)dt, x\in\Delta$.

α). Να υπολογίσετε το f(1).

β). Να αποδείξετε ότι $f'(x)=3x-1$.

γ). Να υπολογίσετε το Εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα xx' και τις ευθείες x=2 και x=4.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=3+i$ και $z_2=1-3i$.

α). Να αποδείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2}=i$ και $|iz_1+z_2|^2=0$.

β). Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006}+z_2^{2006}=0$.

γ). Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w=\dfrac{kz_1-iz_2}{z_2-kz_2}, k\in R-\{1\}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $k\in R-\{1\}$ ισχύει $\mathrm{Im}(w)=-1$.

ΘΕΜΑ 3°

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha+e^x & x\le 0\\ x\ln x & x>0\end{cases}, a\in R$

α). Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β). Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει α=−1:

i) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=1 και x=e.

ΘΕΜΑ 4°

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x-\ln x+e^x, x\in(1,\infty)$.

α). Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

β). Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=2005 έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1,+\infty)$.

δ). Έστω $\Pi=\int_2^e f(x)dx+\int_{f(2)}^{f(e)}f^{-1}(x)dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi-2\ln 2$.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2006

Θέμα 2°

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $(5z-1)^5=(z-5)^5$.

α). Να δείξετε ότι $|5z-1|=|z-5|$.

β). Να δείξετε ότι $|z|=1$.

γ). Αν $w = 5z + 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ(w) στο μιγαδικό επίπεδο.

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-5) + 2x - 12$.

α). Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β). Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ). Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Θέμα 4°

Έστω η συνεχής συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f(x) = 3 + 2\int_0^x f(t)dt, x \in R$.

α). Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή.

β). Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 3e^{2x}$.

γ). Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ε(λ) που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x), τον άξονα xx' και τις ευθείες x=0 και x=λ με λ>0.

δ). Να βρεθεί το $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2007

Θέμα 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = i$, $z_2 = 1$, και $z_3 = 1 + i$.

α . Να αποδείξετε ότι : $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2$.

β . Αν για το μιγαδικό z ισχύει ότι: $|z - z_1| = |z - z_2|$, τότε να αποδείξετε

i) $Re(z) = Im(z)$.

ii) Για $z \neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$.

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{4x}, x \in (0, \infty)$.

Α). Να αποδείξετε ότι : $f(\frac{1}{e^5}) > 0$, $f(\frac{1}{4}) < 0$, και $f(e^5) > 0$.

Β). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ(1,f(1)).

Γ). Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Δ). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα (0,+∞).

Θέμα 4°

Έστω f μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R, για την οποία ισχύει $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ και $f(0) = 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή .

ii) Να αποδείξετε ότι : $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{I(x)}{x^2}$.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2008

Θέμα 2°

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k+1)\cdot i, k \in \mathbb{R}$.

Α). Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία y=x+1.

Β). Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z| = 1$. ;

Γ). Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $a^2 + \beta^2 + 8 = (1-i)^4\beta - (1+i)^4\alpha$, να δείξετε ότι α=2 και β=−2.

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}, x > 0$.

Α). Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β). Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Γ). Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$I = \int_1^{e^2} f(x)dx$.

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση f με f(x) = ημ x, όπου $x \in R$.

Α). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο (0,f(0)) της γραφικής παράστασης της f.

Β). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες y=x και y=1.

Γ). Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει η ανισότητα $\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2$.

ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2009

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}$.

Α). Να αποδείξετε ότι: $-\bar{z} = -1 + i$, $z^2 = 2i$, $z^3 = -2 + 2i$.

Β). Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}, z^2, z^3$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. Να αποδείξετε ότι: $\left|z^3-z^2\right|^2=\left|z^2+\bar{z}\right|^2+\left|z^3+\bar{z}\right|^2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=xe^{x-\alpha}$, όπου α ∈ ℝ.

Α). Να βρεθεί η τιμή του α, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(0, f(0)) να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=e\cdot x$.

Β). Για α=-1,

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

ii) Να αποδείξετε ότι ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) = x-1 και g(x) = lnx, x>0.

Α). Να αποδείξετε ότι: f(x) ≥ g(x), για κάθε x>0.

Β). Αν h(x) = f(x)-g(x), τότε:

i) Να αποδείξετε ότι: 0 ≤ h(x) ≤ e-2, για κάθε x∈[1,e].

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = e.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^e e^{h(x)}\left[h(x)+1\right]\cdot h'(x)dx.$$

ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2010

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει |z|=|z – 2i|

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση ψ = 1

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με 2

Β3. Έστω z_1 = 1 + i και z_2 = –1 + i οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β2.

Να αποδείξετε ότι $z_1^4+z_2^4=-8$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x^3 – 3lnx, x > 0

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο άξονας ψ΄ψ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 2 έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (1, e)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο ℝ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

f΄(x) = – f(x) + x, x∈ℝ και f (0) = 0

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

g(x) = e^x(f(x) – x+1), x∈ℝ, είναι σταθερή.

Δ2. Να αποδείξετε ότι f(x) = e^{-x} + x – 1, x∈ℝ

Δ3. Να αποδείξετε ότι f(x) ≥ 0, για κάθε x∈ℝ

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία x = 1

ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2011

ΘΕΜΑ Β

Έστω $W=z+\frac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με z≠0

i) Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει w=2

ii) Αν $z_1=1+i\sqrt{3}$ και $z_1=1-i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα Β1, τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3=z_2^3=-8$.

iii) Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και $z_3=\frac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

iv) Αν $|z|=2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = x - ln(e^x+1) , x∈ℝ

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

iii) Να αποδείξετε ότι: xf΄(x) < f(x) + ln2 , για κάθε x∈(0, +∞).

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:(-1,+∞)→ℝ για την οποία ισχύει:

$$2\cdot\int_0^x f(t)dt=\left(\ln(x+1)\right),x>-1$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x+1},x>-1$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι: $(x+1)^e \le e^{x+1}$, για κάθε x>-1

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθείαx = e-1

iv) Να αποδείξετε ότι: $(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1)$, x>-1 και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)^2 = 2^{x+1}$, x>-1 έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις x=1 και x=3

ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2012

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|iz-1|=1$.

i) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο Κ (0, -1) και ακτίνα ρ=1.

ii) Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να αποδείξετε ότι $|z| \le 2$.

iii) Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ και Α, Β οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ, όπου Κ(0,-1), είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=1, $x\in\mathbb{R}$ έχει ακριβώς μια ρίζα, το 0.

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες y=1 και x=1.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-2}{x-2} = 2$, f(0)=2 και η f' είναι γνησίως αύξουσα.

i) Να αποδείξετε ότι f(2)= $f'(2)$=2.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) \ge f(\xi)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iv) Αν επιπλέον δίνεται ότι f(ξ)>0, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^x f(t)dt = x^2 - 2x$, $x\in\mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).